Exercices du chapitre XII (Espaces préhilbertiens et euclidiens) – corrigés

✓ **Exercice 47. (Topologie de l'ensemble des matrices positives)**

1. Étudier la connexité par arcs de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

✓ **Corrigé 47.**

1. Nous allons montrer que $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe. Soit $(A,B) \in (\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, la matrice $C_t = tA + (1-t)B$ est symétrique puisque $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, et de plus :
$$\forall t \in [0,1],\ \forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top C_t X = tX^\top AX + (1-t)X^\top BX \geqslant 0,$$
puisque $t \geqslant 0$, $1-t \geqslant 0$, $X^\top AX \geqslant 0$ et $X^\top BX \geqslant 0$ par hypothèse sur t, A et B. On a montré : $\forall (A,B) \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\forall t \in [0,1]$, $tA + (1-t)B \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, d'où le résultat : $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe, donc connexe par arcs.
Le raisonnement est analogue pour montrer que $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe, à un détail près : pour justifier que $X^\top C_t X > 0$ pour X non nul, nous devons invoquer le fait que soit t, soit $1-t$ est strictement positif, de sorte qu'au moins l'un des deux termes de la somme ci-dessus soit strictement positif (et l'autre positif).
2. Soit $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. Posons : $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A_p = A + \frac{1}{p}\mathrm{I}_n$. Alors A_p est bien sûr symétrique pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et on a :
$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}, \quad X^\top A_p X = X^\top AX + \frac{1}{p}X^\top X.$$
Comme A est positive, on a : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}$, $X^\top AX \geqslant 0$, et de plus $X^\top X$ est la norme euclidienne de X au carré, donc : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}$, $X^\top X > 0$. Ainsi l'égalité ci-dessus implique :
$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}, \quad X^\top A_p X > 0.$$
Ainsi : $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A_p \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et on a clairement : $\lim\limits_{p \to +\infty} A_p = A$. Ceci montre que toute matrice symétrique positive est limite de matrices symétriques définies positives, donc $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices symétriques positives convergeant vers une matrice $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer que A est positive. Pour cela, on note simplement que l'on a :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top A_p X \geqslant 0.$$
Par continuité du produit matriciel on a donc, quand on prend la limite quand $p \to +\infty$ dans cette inégalité :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top AX \geqslant 0,$$
donc : $A \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait démontrer.
Ainsi $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est stable par passage à la limite et est donc une partie fermée de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
Remarque. C'est aussi une partie fermée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On a besoin pour cela de démontrer que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui est immédiat puisqu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Remarque. On peut aussi écrire, en posant $f_X : M \mapsto X^\top MX$ pour tout vecteur colonne X :
$$\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R}) = \bigcap_{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f_X^{-1}(\mathbb{R}_+).$$
Les fonctions $f_X : \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ par continuité du produit matriciel et $\mathbb{R}_+$ est fermé dans $\mathbb{R}$: ainsi $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé en tant qu'intersection de fermés.