Exercices du chapitre X (Dérivation et intégration des fonctions vectorielles)

Dérivation des fonctions vectorielles

✓ **Exercice 1.** Comme f est de classe C^1 et ne s'annule pas, montrer que $|f|$ est aussi de classe C^1 (écrivez $|f|$ à l'aide de différentes fonctions que vous savez être de classe C^1 : qu'est-ce que le module d'un nombre complexe par définition ?). Dériver $|f|$ grâce à la composition que vous avez reconnue, et exprimer cette dérivée en fonction de $\mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right)$. Vous en déduirez alors facilement la condition demandée.

Vous pouvez aussi bien traiter cet exercice en écrivant explicitement $f(t) = x(t) + iy(t)$, et sans le faire (ce sera alors moins calculatoire, à condition de bien connaître les formules exprimant module et partie réelle intrinsèquement).

Commentaires.

✓ **Exercice 2.**

1. Se souvenir que $f'(t)$ désigne la vitesse du point mobile dont le vecteur position est donné par $f(t)$. Dire que la famille est liée signifie que le vecteur vitesse et le vecteur position ont même direction : cela rend la conjecture facile.
2. Montrer que $\frac{1}{\|f\|}$ est dérivable en reconnaissant une composition d'applications dérivables (écrire la norme euclidienne à l'aide d'applications usuellement dérivables). Ensuite, en dérivant et en utilisant l'hypothèse que $f(t)$ et $f'(t)$ sont proportionnels, vous devriez pouvoir simplifier $g'(t)$. Cette simplification permet, en intégrant, d'en déduire g, puis f, étant donné qu'on peut facilement exprimer f en fonction de g.

Commentaires.

Exercice 3. Première piste : introduire une base $\mathcal{B}$ et des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ convenables, de sorte que : $\varphi(t) = \det_{\mathcal{B}}((f_1(t), \ldots, f_n(t)))$, et on utilise un résultat du cours pour en déduire $\varphi'(0)$ (remarquer que tous les déterminants de la somme qui en résulte sont largement simplifiables, et que cette somme est une quantité connue liée à la matrice A ; une façon intelligente de simplifier ces déterminants est de se ramener par échange de lignes et colonnes, ou par changement de base, à des déterminants triangulaires).

Deuxième piste : faire un développement à l'ordre 1 en 0 de φ, en développant intelligemment le déterminant $\varphi(t)$ de sorte à identifier tous les coefficients en facteur de t (les coefficients en facteur de t^k, pour $k \geqslant 2$, donnent le $\underset{t\to 0}{o}(t)$ du développement limité).

Troisième piste, au fond équivalente à la précédente : exprimer $\varphi(t)$ en fonction de χ_f et utiliser la connaissance des coefficients de χ_f pour en déduire un développement explicite de φ à l'ordre 1 en 0.

Commentaires.

Exercice 4. Première piste : noter que $t \mapsto \mathrm{tr}(M(t))$ est à valeurs entières (pourquoi ?) et continue : conclure que c'est une fonction constante.

Deuxième piste : dériver la relation $M^2 = \mathrm{I}_n$ pour en déduire une expression de M' en fonction de M et elle-même (ne pas faire n'importe quoi en voulant trop vite imiter la dérivation de la fonction réelle $x \mapsto x^2$), qui permet de montrer : $\mathrm{tr}(M') = -\mathrm{tr}(M')$.

Ensuite : utiliser la valeur en 0 pour déterminer à quelle constante est égale la trace de $M(t)$ pour tout t. Cela donne une information précise sur les valeurs propres de $M(t)$, puis sur une matrice diagonale à laquelle $M(t)$ est semblable (pourquoi $M(t)$ est-elle diagonalisable ?), ce qui permet de conclure.

Commentaires.

Exercice 5. Dériver la relation vérifiée par φ pour obtenir une relation entre φ' et φ. Prendre l'image de chaque membre de l'égalité par le déterminant.

Commentaires.

Exercice 6. (Calcul de déterminant par la dérivation)

1. Dériver Δ_n. Les déterminants obtenus sont presque tous nuls en dérivant. On obtient une relation entre Δ_n et Δ_{n-1}, ce qui permet de conjecturer puis démontrer par récurrence une expression explicite de $\Delta_n(x)$ pour tout n et tout x.

2. Remarquer qu'on a presque le déterminant de Vandermonde $V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (seule la dernière colonne ne va pas). Essayer de s'y ramener. Pour cela : modifier $V(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ en ajoutant à chaque coefficient une fonction dépendant d'une variable x, de sorte que le nouveau déterminant ainsi fabriqué (que je note $D_n(x)$ ci-dessous) donne, après dérivation et évaluation en 0, le déterminant de l'énoncé. Pour trouver quelles fonctions ajouter aux coefficients d'un déterminant de Vandermonde, pour que la parade fonctionne : songez à des fonctions dont la dérivation « transforme » α_i^{n-1} (présent dans la dernière colonne du déterminant de Vandermonde) en α_i^n (présent dans la dernière colonne du déterminant de l'énoncé).
Comme $D_n(x)$ est explicitement calculable, obtenir $D_n'(0)$ ne pose pas la moindre difficulté et on conclut.

Commentaires.

Exercice 7. (Le théorème de Darboux ne se généralise pas à la dimension supérieure) Calculer f' se fait en dérivant composante par composante, sauf en 0 où il suffit de calculer la limite d'un taux d'accroissement (raisonner composante par composante avec le théorème des gendarmes).

Pour la connexité par arcs : en minorant $\|f'(t)\|_2$ pour tout $t>0$, montrer que $f'(]-1{,}1[)$ est la réunion de $\{(0{,}0)\}$ et d'une partie de $\mathbb{R}^2$ non vide située en dehors de la boule $\mathrm{B}(0{,}1)$.

Commentaires.

Vous saurez tout sur l'exponentielle matricielle

✓ **Exercice 8. (Calcul d'exponentielles de matrice)**

1. Diagonaliser A et calculer $\exp(A)$ grâce à l'interpolation de Lagrange, qui marche ici très aisément parce qu'il n'y a que deux valeurs propres (traiter $b=0$ à part, trivialement). Vous aurez ainsi une expression de $\exp(A)$ comme combinaison linéaire de A et I_n, ne nécessitant pas de calculer ni d'inverser une matrice de passage.
2. Trianguler B grâce à la stratégie de *Méthodes*, chapitre V (la matrice B n'est en effet pas diagonalisable). En déduire une écriture de B sous la forme $B=D+N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent (notons qu'il s'agit plus précisément de la décomposition de Dunford de B : j'explique aussi dans *Méthodes* comment l'obtenir directement dès qu'on connaît le polynôme caractéristique sous forme factorisée). On en déduit une expression de $\exp(B)$ en fonction de $\exp(D)$ et $\exp(N)$, que l'on calcule classiquement (voir le cours). C'est calculatoire mais il n'y a plus de mystère à ce stade.

Commentaires.

Exercice 9. Remarquer que les puissances paires de A s'expriment simplement en fonction de A^2, et de même les puissances impaires de A s'expriment simplement en fonction de A. On fait mieux que le « remarquer » par un drôle de hasard si l'on sait réduire une matrice antisymétrique, mais ce ne sera pas naturel avant le chapitre XII ; autre piste : utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour obtenir une relation entre A et A^3, puis raisonner par récurrence ou utiliser une division euclidienne afin d'en déduire les puissances suivantes.

En déduire une expression explicite de $\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}A^n$ comme combinaison linéaire de I_3, A et A^2. Passer à la limite.

Commentaires.

Exercice 10. Il serait facile de montrer que l'exponentielle d'une matrice à coefficients positifs est à coefficients positifs (vous aurez à le montrer plus loin, si vous suivez cette indication). S'y ramener en introduisant un λ convenablement choisi pour que $B=A+\lambda\mathrm{I}_n$ soit à coefficients positifs. Vérifier alors que, facilement, B^n est à coefficients positifs pour tout n, et donc $\exp(B)$ aussi par passage à la limite. Conclure en écrivant $\exp(A)$ en fonction de $\exp(B)$.

Commentaires.

Exercice 11. Prendre une norme d'algèbre $\|\cdot\|$. Majorer $\left\|\exp(A)-\left(1+\frac{1}{p}A\right)^p\right\|$. Utiliser la formule du binôme de Newton. Montrer que $\frac{1}{k!}\geqslant\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, afin de simplifier la valeur absolue de la différence qui devrait apparaître dans vos calculs. Il devrait alors apparaître $e^{\|A\|}-\left(1+\frac{\|A\|}{p}\right)^p$ dont vous connaissez la limite.

Commentaires.

Exercice 12. (Matrice dont la classe de similitude est bornée) Remarquer que $z \mapsto \exp(zB)A(\exp(zB))^{-1}$ est bornée par hypothèse sur S_A, donc chacune de ses composantes aussi. Or ses composantes sont des fonctions développables en série entière sur $\mathbb{C}$ (à vérifier soigneusement) : que sait-on d'une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et bornée ? Un exercice du chapitre VIII traite la question. Conclure, *via* la dérivée de $t \mapsto \exp(tB)A(\exp(tB))^{-1}$ selon la variable réelle t, que A commute avec B. Ceci vaut pour toute matrice B : conclure en reproduisant un raisonnement dans le cours du chapitre V.

Commentaires.

★ **Exercice 13.** Si $\lim\limits_{t\to+\infty} \exp(tA) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, alors par continuité du produit matriciel on doit avoir $\exp(tA)X \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ pour tout vecteur colonne X. De bons choix de X donnent une condition nécessaire sur les valeurs propres de $\exp(A)$. Or les valeurs propres de $\exp(A)$ s'expriment à l'aide de celles de A : on en déduit une condition nécessaire sur $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ pour que cette limite soit nulle.

Pour la réciproque : prendre une norme $\|\cdot\|$ appropriée (ce sont les majorations qui suivent qui vous diront comment « bien choisir »). Trianguler A sous la forme $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent, puis exprimer $\exp(tA)$ à l'aide de cette triangulation. Majorer $\|\exp(tD)\|$ par une quantité de la forme $\bigstar e^{\lambda t}$ avec λ que vous déterminerez, et $\|\exp(tN)\|$ par une fonction à la croissance polynomiale en t grâce à la nilpotence de N. Conclure par croissances comparées.

Commentaires.

★ **Exercice 14.** Montrer d'abord que A et B sont codiagonalisables. Pour cela : montrer que A est un polynôme en B, en montrant d'abord que c'est un polynôme en $\exp(A)$. On y parvient par interpolation de Lagrange, après avoir codiagonalisé A et $\exp(A)$. Le document *Méthodes* du chapitre V donne des détails sur l'emploi de l'interpolation de Lagrange. Ceci étant dit : on en déduit que A est un polynôme en B et commute donc avec B. On sait en déduire que A et B sont semblables à deux matrices diagonales avec la même matrice de passage. L'équation $\exp(A) = \exp(B)$ se ramène alors banalement à une équation avec deux matrices diagonales. Identifier les coefficients diagonaux, et utiliser l'injectivité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour conclure.

Un exemple du cours permet de contredire l'injectivité dans le cas non diagonalisable.

Commentaires.

☢ **Exercice 15. (🖹)**

1. Sens direct immédiat (c'est du cours). Sens réciproque : on est exactement dans la configuration décrite dans *Méthodes* du chapitre V, *Utiliser la décomposition de Dunford* (c'est $\exp(A)$ qui s'exprime en fonction de A, et pourtant on veut déduire la diagonalisabilité de A à partir de celle de $\exp(A)$). Relire la stratégie si besoin.

   Cela nécessite cependant d'expliciter la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ en fonction de celle de $A = D+N$. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de $\exp(D)$ et $\exp(N)$ grâce à une propriété du cours. Ensuite : comme $\exp(D)$ est diagonalisable, il semble naturel de penser que c'est la partie diagonalisable de la décomposition de Dunford de $\exp(A)$. Vérifier que $\exp(A) - \exp(D)$ est la partie nilpotente : l'exprimer en fonction de $\exp(D)$ et $\exp(N)$, et utiliser le fait que $\exp(N) - \mathrm{I}_n$ soit nilpotente (pourquoi ?).

   Vous aurez un peu partout besoin du fait que D et N soient des polynômes en A, pour avoir de la commutation.

   Poursuivre en raisonnant comme dans *Méthodes*. Vous arriverez alors à : $\exp(N) = \mathrm{I}_n$. Vérifier que ce n'est possible que si N est nulle. Deux pistes pour cela : 1° supposer que N est non nulle, et évaluer cette égalité en un vecteur de $\ker(M^2) \setminus \ker(M)$ (pourquoi en existe-t-il ?) pour avoir une contradiction, 2° ramener l'égalité précédente à une égalité de la forme $NQ = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, où Q est la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente : c'est classique d'en déduire que Q est inversible. Conclure que A est diagonalisable.

2. Si l'on reprend le raisonnement de la question précédente, la seule chose qu'il reste à vérifier est la donnée du spectre. Pour cela : diagonaliser A et calculer $\exp(A)$. Regarder à quelle condition nécessaire l'égalité $\exp(A) = \mathrm{I}_n$ est vérifiée.

Commentaires.

☢ **Exercice 16. (Surjectivité de l'exponentielle matricielle et applications)**

1. Quitte à trianguler, se convaincre que cela revient à montrer que toute matrice de la forme $\lambda \mathrm{I}_n + N$, et même toute matrice de la forme $\mathrm{I}_n + N$ (avec N nilpotente), admet un antécédent par l'exponentielle. Si l'on se souvient de l'adage plusieurs fois répété cette année : une identité algébrique formelle est valable peu importe l'anneau (ce qui est en particulier le cas des identités données par des développements en série entière), alors on a une piste pour traiter cette question : construire un logarithme de matrice à l'aide du développement en série entière

du logarithme réel. Après avoir posé : $\ln(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \bigstar$ en suivant cette idée (attention, il n'y a pas convergence pour toute matrice M, ne négligez pas ce point ; il y a aussi un bon choix de norme à faire pour montrer la convergence dans certains cas), il s'agit de montrer que $\exp(\ln(\mathrm{I}_n + M)) = \mathrm{I}_n + M$. Plusieurs pistes pour cela, qui dépendent des goûts.

Première piste : écrire $e^x = P(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-1}\right)$, $\ln(1+x) = Q(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-1}\right)$, puis utiliser l'unicité de la partie régulière du développement limité de $e^{\ln(1+x)}$, pour montrer : $P \circ Q = 1 + X + X^N R$. Évaluer en M nilpotente cette égalité, et noter que $P \circ Q(M)$ donne exactement $\exp(\ln(\mathrm{I}_n + M))$.

Deuxième piste : s'inspirer de l'exercice 33 du chapitre VII en considérant la dérivée de l'application $t \mapsto (\mathrm{I}_n + tM)\exp\left(-\ln(\mathrm{I}_n + tM)\right)$. Si l'on se restreint à M nilpotente (ce qui suffit pour notre affaire), il n'y a pas de dérivation terme à terme ni même de souci de convergence, ce qui simplifie la vie.

Troisième piste : on montre d'abord que l'identité $\exp(\ln(\mathrm{I}_n + M)) = \mathrm{I}_n + M$ est vraie pour toute matrice *diagonalisable* M de norme suffisamment petite : imiter le calcul des exponentielles de matrices diagonalisables fait dans le cours (il marche aussi bien pour les logarithmes). En déduire, par un argument de densité, que c'est vrai de toute matrice M de norme suffisamment petite (pour la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables, voir l'exercice 53 du chapitre VI). Conclure en montrant l'assertion non triviale suivante : pour toute matrice nilpotente M, il existe une norme $\|\cdot\|_M$ telle que : $\|M\|_M < 1$ (les exercices 50 et 59 du chapitre VI peuvent chacun vous aider à leur manière ; une norme qui convient est de la forme $A \mapsto \|DPA(DP)^{-1}\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, P une matrice de passage entre la matrice nilpotente M fixée et une matrice triangulaire supérieure stricte, tandis que D est une matrice aux coefficients diagonaux bien choisis car proches de 0).

Une fois une de ces pistes suivies, vous en déduisez un antécédent par l'exponentielle de $\lambda\mathrm{I}_n + N$ pour tout λ non nul, puis de toute matrice triangulable.

2. Facile si la question précédente a été réussie, et en s'inspirant de l'extraction de racines p^{es} de nombres complexes *via* l'exponentielle complexe.
3. Noter que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'image d'un espace vectoriel par une application continue.

Commentaires.

☢ **Exercice 17.** Pour conjecturer ce qu'on doit avoir : utiliser ce que vous savez de l'exponentielle réelle classique, et écrire algébriquement la propriété d'être dans son image. Conjecturer que c'est la même caractérisation algébrique qui décrit l'image de l'exponentielle matricielle réelle. Soit X l'image conjecturée.

Montrer que $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) \subseteq X$ découle aisément de la propriété de morphisme de l'exponentielle (qu'on utilise aussi pour l'exponentielle réelle, d'ailleurs, quand on veut déterminer son image). Pour l'inclusion réciproque : reprendre le raisonnement de la première question de l'exercice 16 : vous remarquerez qu'un antécédent de toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est plus précisément un polynôme en A (*a priori* à coefficients complexes). Si P est un polynôme tel que : $A = \exp(P(A))$, alors *a priori* $P(A)$ est complexe ; mais comment fait-on, partant d'un complexe, pour aisément fabriquer un réel ? Une de ces opérations peut se faire sans difficulté avec la matrice $P(A)$. S'en servir alors pour montrer que tout élément de X est l'image par exp d'une matrice réelle.

Commentaires.

Exercice 18. (Morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

1. Dériver par rapport à une variable, l'autre étant fixée, la relation $f(t+t') = f(t)f(t')$. En déduire une équation différentielle vérifiée par f. Montrer qu'une fonction de la forme $t \mapsto \exp(tA)$, avec A bien choisie, vérifie la même équation différentielle avec la même condition initiale. Conclure (si vous n'avez pas encore le théorème de Cauchy linéaire à disposition, il suffit de reproduire la preuve d'unicité vue pour les équations différentielles d'ordre 1 en 1re année : c'est la même approche ici). Penser à vérifier la réciproque.
2. En intégrant la relation $f(t+t') = f(t)f(t')$, montrer qu'un morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est aussi dérivable (à une petite subtilité près : il faut l'inversibilité en au moins un réel non nul de $\int_0^a f$: on y parvient en utilisant le fait que la dérivée de $x \mapsto \int_0^x f$ soit inversible en 0 grâce aux hypothèses et on conclut grâce à une propriété topologique de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

Commentaires.

☢ **Exercice 19. (Morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)**

1. Montrer que l'image directe par $\det(\varphi)$ de $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$ connexe par arcs et compact. Conclure en notant qu'un tel sous-groupe est soit trivial, soit non borné.

2. Munir $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme triple (le $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$ n'est pas une coquille : pourquoi ?). Montrer : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z))$, $|\lambda| \leqslant |||\varphi(z)|||$. Noter ensuite qu'un argument topologique assure que φ est bornée, donc $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists z \in \mathbb{U}, \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z))\}$ aussi. Or, s'il existe $z \in \mathbb{U}$ et une valeur propre λ de $\varphi(z)$ tels que $|\lambda| \neq 1$, la propriété de morphisme de φ permet d'en déduire que λ^k est une valeur propre d'un élément de $\varphi(\mathbb{U})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit le caractère borné. Conclure.
3. Partant de φ, construire un morphisme continu et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Raisonner comme dans l'exercice 18. Utiliser la périodicité pour ramener le problème à déterminer les matrices A telles que $\exp(2\pi A) = \mathrm{I}_n$. La deuxième question de l'exercice 15 permet de résoudre cette équation et de diagonaliser A. On en déduit une réduction diagonale par blocs de A dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, dont les blocs sont soit une matrice identité, soit des matrices de rotation $R(k_it) = \begin{pmatrix} \cos(k_it) & -\sin(k_it) \\ \sin(k_it) & \cos(k_it) \end{pmatrix}$ avec $k_i \in \mathbb{Z}$ (revoir l'exemple du cours où l'on a construit des exponentielles de matrices égales à $R(\theta)$, pour voir comment faire le lien avec les valeurs propres trouvées de A) ; la matrice de passage est *a priori* dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, mais un raisonnement classique permet de la remplacer par une matrice à coefficients réels (exercice 12 du chapitre V). Conclure que les morphismes φ qui conviennent sont de la forme $e^{it} \mapsto QM(t)Q^{-1}$, où Q est une matrice réelle inversible et $M(t)$ une diagonale par blocs de blocs diagonaux $R(k_it)$. Penser à vérifier la réciproque et en particulier la continuité.

Commentaires.