**Exercices du chapitre X (Dérivation et intégration des fonctions vectorielles)**

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

La lettre $K$ désigne systématiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Lorsqu'on écrit une matrice de $\mathrm{M}_n(K)$, l'élément $n$ est un entier naturel non nul (sauf mention explicite du contraire).

# Dérivation des fonctions vectorielles

✓ **Exercice 1.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathrm{C}^1$. On suppose que $f$ ne s'annule jamais. Montrer que $|f|$ est croissante sur $I$ si et seulement si : $\mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) \geqslant 0$.

✓ **Exercice 2.** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, et $f : I \to E$ une application de classe $\mathrm{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$, on ait : $f(t) \neq \vec{0}$, et la famille $(f(t), f'(t))$ soit liée.

1. Si l'on raisonne d'un point de vue cinématique, quelle devrait être l'allure de la courbe de $f$ ?
2. Pour tout $t \in I$, on pose : $g(t) = \dfrac{1}{\|f(t)\|} f(t)$. Montrer que $g$ est constante et conclure.

**Exercice 3.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Montrer que l'application $\varphi : t \mapsto \det(\mathrm{I}_n + tA)$ est dérivable en 0 et donner la valeur de $\varphi'(0)$.

**Exercice 4.** Soit $M : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que : $M(0) = \mathrm{I}_n$, et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(M(t))^2 = \mathrm{I}_n$. Montrer que l'application $t \mapsto \mathrm{tr}(M(t))$ est constante et en déduire les applications $M$ qui conviennent.

**Exercice 5.** Soit $n$ un entier naturel impair. Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une application dérivable telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t)^\top \varphi(t) = \mathrm{I}_n$ (autrement dit, l'application $\varphi$ est à valeurs dans ce qu'on notera plus tard $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$), alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 6. (Calcul de déterminant par la dérivation)** L'objectif de cet exercice est de calculer des déterminants par dérivation.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & 0 & & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^n \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_3^{n-2} & \alpha_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

**Exercice 7. (Le théorème de Darboux ne se généralise pas à la dimension supérieure)** Soit $f$ l'application définie sur $]-1,1[$ par : $t \mapsto \begin{cases} (0,0) & \text{si } t \in ]-1,0] \\ \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) & \text{si } t \in ]0,1[ \end{cases}$. Montrer que $f$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs.

# Vous saurez tout sur l'exponentielle matricielle

✓ **Exercice 8. (Calcul d'exponentielles de matrice)**

1. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Calculer l'exponentielle de $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 9.** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer l'exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 10.** Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \implies a_{i,j} \geqslant 0$. Montrer que les coefficients de $\exp(A)$ sont tous positifs ou nuls.

**Exercice 11.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\mathrm{I}_n + \dfrac{1}{p}A\right)^p = \exp(A)$.

**Exercice 12. (Matrice dont la classe de similitude est bornée)** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont la classe de similitude $\mathrm{S}_A = \left\{PAP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$ est bornée. En considérant, pour toute matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'application $z \mapsto \exp(zB)A(\exp(zB))^{-1}$, montrer que $A$ commute avec toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et en déduire que c'est une matrice d'homothétie.

*À comparer avec l'approche de l'exercice 59 du chapitre* VI.

★ **Exercice 13.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(tA) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.

★ **Exercice 14.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables, telles que : $\exp(A) = \exp(B)$. Montrer : $A = B$, et donner un contre-exemple au résultat de cet exercice lorsque $A$ et $B$ ne sont pas diagonalisables.

☢ **Exercice 15.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ l'est.
2. Montrer que : $\exp(A) = \mathrm{I}_n$, si et seulement si $A$ est diagonalisable et : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z}$.

☢ **Exercice 16. (Surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe et applications)**

1. Montrer que pour tout $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $B = \exp(A)$.
2. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que pour tout $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $B = A^p$.
3. Donner une nouvelle démonstration que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

☢ **Exercice 17.** Déterminer $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$.

**Exercice 18. (Morphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)**

1. Montrer que les morphismes dérivables de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\cdot)$ sont exactement les applications de la forme $t \mapsto \exp(tA)$ avec $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Déterminer les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\cdot)$.

☢ **Exercice 19. (Morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)** Soit $\varphi$ un morphisme de groupes de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continu.

1. Montrer : $\forall z \in \mathbb{U}$, $\det(\varphi(z)) = 1$.
2. Montrer : $\forall z \in \mathbb{U}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z)) \subseteq \mathbb{U}$.
3. Conclure en donnant une description explicite des morphismes $\varphi$ qui conviennent. *Vous aurez besoin du résultat de l'exercice 18.*