Exercices du chapitre XI (Équations différentielles linéaires) – Indications

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Résolution pratique d'équations différentielles

✓ **Exercice 1. (🗎C)** Écrire le système sous la forme $Y' = AY$ et trianguler A. Passer ensuite par $Z = P^{-1}Y$ pour se ramener à un système différentiel $Z' = TZ$ qui, après identification composante par composante, équivaut à deux équations différentielles linéaires d'ordre 1 faciles à résoudre.

À noter qu'ici, le calcul de l'exponentielle de A est raisonnablement facile.

Commentaires.

Exercice 2. (🗎C) Donner une relation entre les dérivées de y et celles de u. Injecter ces expressions des dérivées de y dans l'équation différentielle : en déduire une équation différentielle simple vérifiée par u. La résoudre. En déduire y grâce à : $y(x) = \frac{u(x)}{x^2}$.

Attention au problème en 0 : vous devez proposer un prolongement de y en 0 qui soit de classe C^2. Une condition nécessaire peut être trouvée *via* un développement limité à la précision $\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ de u, pour en déduire un développement limité à l'ordre 2 de y (on sait en effet que la classe C^2 implique l'existence d'un tel développement). La réciproque s'obtient soit en reconnaissant une fonction développable en série entière, soit par le théorème de la limite de la dérivée.

Commentaires.

Exercice 3. (🗎C) Introduire la fonction $z : t \mapsto y(\sqrt{t})$. Donner une relation entre les dérivées de y et celles de z. Injecter ces expressions des dérivées de y dans l'équation différentielle : en déduire une équation différentielle simple vérifiée par z. La résoudre. En déduire y grâce à : $y(x) = z(x^2)$.

Commentaires.

★ **Exercice 4. (Équations différentielles d'Euler) (🗎C)**

1. Exprimer les dérivées de g en fonction de celles de y. Injecter ces expressions de g, g' et g'' dans (E_2) et simplifier de sorte à reconnaître (E_1). Si vous rédigez convenablement, vous n'aurez pas à démontrer l'implication réciproque.
2. On sait résoudre (E_2). Utiliser la première question.

Commentaires.

★ **Exercice 5. (🗎C)**

1. Écrire f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire et utiliser l'unicité des coefficients pour identifier les parties paires et parties impaires dans l'équation différentielle à résoudre. On est ainsi ramené à résoudre deux équations différentielles ne faisant plus figurer de $-x$ en argument : on sait faire. Après résolution, penser à vérifier que réciproquement, les solutions trouvées ont la bonne parité, et les sommer pour en déduire f.
2. Même idée, à la différence près qu'il en résulte un système différentiel couplé vérifié par les parties paire et impaire g et h de f (bien faire attention : les dérivées successives de g ne sont pas toutes paires, et de même pour h). On peut résoudre ce système différentiel de deux façons : 1° soit en résolvant une équation différentielle vérifiée par $g + ih$, 2° soit en l'écrivant sous la forme $Y' = AY + B$.

   Dans le second cas, la recherche d'une solution particulière peut être un peu tortueuse : soit avec la méthode de variation des constantes, soit en invoquant le principe de superposition et en cherchant directement les solutions sous la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{\pm t} \\ \beta e^{\pm t} \end{pmatrix}$. En revanche la résolution de l'équation homogène ne pose pas de problème particulier.

Commentaires.

✓ **Exercice 6. (🗎C)** C'est très classique. Se ramener à un système : $Y' = AY$. Voir le cours et *Méthodes*.

Commentaires.

✓ **Exercice 7.**

1. Exprimer A^{2n} et A^{2n+1} pour tout n en fonction de I_n et A, grâce à l'hypothèse de l'énoncé. En déduire $\exp(tA)$, puis les solutions de $Y' = AY$.
2. Raisonnement analogue, à ceci près qu'il n'y a pas besoin de raisonner sur la parité.

Commentaires.

Exercice 8. (🗎) Mettre sous forme matricielle $Y' = AY$ le système. Comme les coefficients de $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ ne sont pas constants ici, il semble que le cours ne soit d'aucun service pour résoudre explicitement cette équation. Deux pistes possibles : 1° on détermine les sous-espaces propres $A(t)$ pour tout t et on remarque qu'une base de vecteurs propres possible ne dépend pas de t : on en déduit trois solutions de la forme $t \mapsto e^{\lambda(t)} X_i$ linéairement indépendantes et qui forment donc un système fondamental de solutions ; 2° on remarque que $A(t)$ et $t \mapsto \displaystyle\int_0^t A(x)\mathrm{d}x$ commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on le « remarque » plus facilement si l'on a diagonalisé $A(t)$), ce qui permet de montrer que la dérivée de $t \mapsto \exp\left(\displaystyle\int_0^t A(x)\mathrm{d}x\right) X$ est solution de $Y' = AY$ pour tout X (imiter la dérivation terme à terme faite au chapitre X). De plus cette exponentielle est simplifiable *via* diagonalisation de $A(t)$. En déduire un système fondamental de solutions en prenant trois X convenables.

Commentaires.

Exercice 9. (🗎) Trouver une première solution sous forme de fonction développable en série entière et une seconde solution soit par les méthodes habituelles (abaissement de l'ordre ou utilisation du wronskien) qui ici sont peu commodes, soit avec un peu de nez : au vu de la première solution trouvée (et simplifiée *via* une expression à l'aide d'une fonction usuelle), vous devriez pouvoir conjecturer une seconde solution de l'équation différentielle.

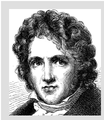
Commentaires.

✓ **Exercice 10. (🗎)** Chercher des solutions développables en série entière. Les exprimer à l'aide de fonctions usuelles. Remarquer que les fonctions trouvées sont aussi solutions sur $]1, +\infty[$.

Commentaires.

✓ **Exercice 11. (🗎)** Trouver une première solution sous forme de fonction développable en série entière et une seconde solution par les méthodes habituelles (abaissement de l'ordre ou utilisation du wronskien).

Commentaires.


1784-1846

★ **Exercice 12. (Équation différentielle de Bessel)**

1. La première partie de la question est facile et nous vous renvoyons si besoin au document *Méthodes* du chapitre VIII. Pour la deuxième : si f est une solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$, introduire une fonction g telle que (J, g) soit un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$. Écrire $f = \alpha J + \beta g$. Montrer que si $\beta \neq 0$, alors βg et $\beta g'$ ont une limite finie en 0 et donc le wronskien de J et βg aussi. Obtenir une absurdité en calculant explicitement ce wronskien et sa limite en 0. Raisonner de même sur $\mathbb{R}_-^*$ et raccorder en 0 par un argument élémentaire.
2. Deux pistes sont possibles.

   Première piste : développer en série entière le cosinus et justifier correctement l'intégration terme à terme (là, les deux théorèmes classiques s'appliquent bien). Reconnaître des intégrales de Wallis, quitte à modifier l'intervalle d'intégration par des opérations élémentaires sur les intégrales. Après simplification, on obtient le développement explicite de J trouvé à la première question.

   Deuxième piste : dériver deux fois l'intégrale à paramètre $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$. Vérifier que cela fournit une solution de (E) égale à 1 en 0, et utiliser l'unicité démontrée à la première question.
3. Pour l'implication directe : utiliser le wronskien pour obtenir le comportement asymptotique de f' au voisinage de 0 (raisonner par l'absurde en supposant f bornée pour gérer le facteur $J'f$) et en déduire celui de f par intégration. Sens réciproque facile si l'on remarque que J est bornée (pourquoi ?).

Commentaires.

✓ **Exercice 13. (Méthode de variation des constantes)** Il suffit d'appliquer les méthodes du cours : résolution de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière. Il n'y a pas de subtilité particulière, sauf éventuellement pour le calcul d'une primitive de $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{1-(\sin(t))^2}$. Pour cela, noter qu'on sait fournir une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ grâce à une méthode très classique de première année. S'en inspirer ou s'y ramener.

Commentaires.

Exercice 14. (🗎) C'est un système différentiel de la forme $Y' = AY + B$. La résolution de l'équation différentielle linéaire homogène associée est classique. On peut trouver une solution particulière soit par la méthode de variation de la constante, soit en la cherchant sous la forme $t \mapsto e^t X$ où X est à déterminer.

Commentaires.

Exercice 15. (🗎) C'est un système différentiel de la forme $Y' = AY + B$.

Pour la résolution de l'équation différentielle linéaire homogène associée, deux pistes possibles : 1° on détermine les sous-espaces propres $A(t)$ pour tout t et on remarque qu'une base de vecteurs propres possible ne dépend pas de t : on en déduit deux solutions de la forme $t \mapsto e^{\lambda(t)} X_i$ linéairement indépendantes et qui forment donc un système fondamental de solutions ; 2° on remarque que $A(t)$ et $t \mapsto \displaystyle\int_0^t A(x)\mathrm{d}x$ commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on le « remarque » plus facilement si l'on a diagonalisé $A(t)$), ce qui permet de montrer que la dérivée de $t \mapsto \exp\left(\displaystyle\int_0^t A(x)\mathrm{d}x\right) X$ est solution de $Y' = AY$ pour tout X (imiter la dérivation terme à terme faite au chapitre X). De plus cette exponentielle est simplifiable *via* diagonalisation de $A(t)$. En déduire un système fondamental de solutions en prenant deux X convenables.

Pour la recherche d'une solution particulière : soit on utilise la méthode de variation des constantes, soit on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}$ avec P et Q de degré raisonnable.

Commentaires.

Exercice 16. Si δ est l'endomorphisme de dérivation, cette équation différentielle peut se réécrire : $\delta^2(y) + y = P$, ce dont on déduit : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^{2(k+1)}(y) + \delta^{2k}(y) = \delta^{2k}(P)$. Le fait que $\delta^{2k}(Q)$ soit nul pour tout polynôme Q dès qu'on prend k suffisamment grand d'une part, et l'utilisation d'un bon télescopage d'autre part (éventuellement lire le document en ligne *Méthodes* sur les *Suites récurrentes*), permet d'en déduire y.

Je pense qu'expliciter les solutions *via* la méthode de variation des constantes pourrait marcher sans que cela soit aussi direct.

Commentaires.

★ **Exercice 17.** S'inspirer du principe de superposition : trouver une solution particulière de (E_n) : $\forall t \in \mathbb{R}$, $y''(t) + y(t) = a_n \cos(nt)$ pour tout n. Le cours de 1re année (ou la méthode de variation des constantes) vous dit comment faire. On aimerait en déduire qu'en sommant toutes ces solutions particulières pour $n = 0$ à $+\infty$, on obtient une solution particulière de l'équation de l'énoncé. Il y a une dérivation terme à terme à justifier : c'est pour les hypothèses de convergence simple ou uniforme qu'intervient l'hypothèse de l'énoncé sur les a_n. Le reste ne soulève pas de difficulté particulière.

Commentaires.

Exercice 18. (Un contre-exemple au théorème de Cauchy linéaire ?) Faire l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Noter que c'est une équation différentielle d'Euler (exercice 4) : on sait la résoudre avec un changement de variable. Étudier ensuite le problème du raccord en 0 et en déduire un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ de cardinal 4 : la clé est que les différentes constantes apparaissant dans l'explicitation des solutions ne sont pas nécessairement les mêmes sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Commentaires.

Équations différentielles non linéaires et équations fonctionnelles

★ **Exercice 19.** (🗎) Montrer convenablement que f est dérivable et la dériver (utiliser le théorème fondamental de l'analyse). Recommencer de sorte à obtenir une équation différentielle du second ordre vérifiée par f. En chercher des solutions développables en série entière. Vous en trouverez deux linéairement indépendantes, qui forment donc un système fondamental de solutions. En notant que $f(0)$ et $f'(0)$ sont connus, vous en déduirez que f est égale à l'une des deux (à une constante près). Or ce développement en série entière peut s'exprimer à l'aide de fonctions usuelles. Ne pas oublier de vérifier la réciproque.

Commentaires.

Exercice 20. Si f est solution : dériver l'égalité (pourquoi est-ce possible ?) et en déduire que $y : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est solution d'une équation différentielle *non linéaire* du premier ordre. Pour la résoudre : remarquer qu'après une division convenable, on obtient une équation *polynomiale* du second degré vérifiée par une fonction dépendant de y. Pour cette étape, il est plus facile de d'abord supposer que y ne s'annule jamais.

Résoudre l'équation du second degré obtenue. On en déduit y par une intégration. En déduire f. Penser à vérifier la réciproque.

Si y s'annule en un réel t_0 : remarquer qu'à cause de l'équation vérifiée par f, on a $f = 0$ sur $[0, t_0]$. Introduire $t_1 = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \mid y(t) = 0\} \in [0, +\infty]$ et faire le raisonnement ci-dessus sur $]t_0, +\infty[$. Ne pas oublier d'étudier le raccord en t_0 à la fin.

Commentaires.

Exercice 21. Montrer que si f convient alors f est deux fois dérivable et que, à y fixé, f vérifie une équation différentielle du second ordre. La résoudre. Penser à vérifier la réciproque.

Commentaires.

Exercice 22. Montrer que f est trois fois dérivable et déduire de l'équation différentielle que $\frac{f'}{f}$ est solution d'une équation différentielle très simple. La résoudre. Comment passer de la connaissance de $\frac{f'}{f}$ à celle de f ? Conclure.

Commentaires.

Exercice 23. Noter que si y est solution, alors y doit être de signe constant sur $]-r,0[$ et sur $]0, r[$ pour r adéquat. Cela permet de simplifier la valeur absolue. En déduire la forme explicite de y sur ces voisinages, la condition initiale assurant qu'il n'y a qu'une seule possibilité sur $]0, r[$ et sur $]-r,0[$. Vérifier que le raccord en 0 est bien de classe C^2.

La question est alors de savoir si ces expressions sont valables sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$. Une piste possible sur $\mathbb{R}_-$: utiliser le signe de y'' sur $\mathbb{R}_-$, dicté par l'équation différentielle, afin d'en déduire que y est négative sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi le raisonnement effectué sur $]-r,0[$ est en fait valable sur $\mathbb{R}_-$.

Sur $\mathbb{R}_+$, le signe de y'' assure que l'expression proposée ci-dessus sur $]0, r[$ ne peut être valable sur $\mathbb{R}_+$, et que plus précisément on doit avoir $r \leqslant \pi$. Montrer qu'on peut en fait prendre $r = \pi$. Un argument élégant, mais savant et hors programme, est de montrer que $\left\{r \in]0, \pi] \mid y_{|]0,r]} \geqslant 0\right\}$ est un ouvert et fermé relatif de $]0, \pi]$, qui est connexe ; un argument proche mais moins savant est de raisonner par l'absurde en supposant que la borne supérieure r_0 de l'ensemble précédent n'est pas π, et de constater que y ne s'annule pas (et est donc de signe constant) sur $]0, r_0]$: la continuité de y assure alors que $y'' + |y| = 0$ peut être simplifiée et résolue sur un intervalle plus grand que $]0, r_0]$.

Ainsi on sait déterminer y sur $\mathbb{R}_-$ et $[0, \pi]$. Sur $[\pi, +\infty[$: utiliser le signe de y'' pour en déduire, comme pour l'étude sur $\mathbb{R}_-$, que y est négative sur cet intervalle. Cela permet encore de simplifier l'équation différentielle sur $[\pi, +\infty[$. Grâce aux conditions initiales en π, que l'on peut obtenir grâce à l'expression explicite de y sur $[0, \pi]$, on peut entièrement expliciter la fonction sur $[\pi, +\infty[$ et conclure (vérifier le raccord puis la réciproque).

Je n'exclus pas la possibilité qu'il y ait d'autres approches plus directes pour montrer qu'il y a un changement de comportement en π.

Commentaires.

Exercice 24. D'abord factoriser le déterminant grâce à une opération que vous avez l'habitude de faire sur les lignes ou les colonnes. Vous aurez une équation équivalente du type : $\bigstar \cdot q(y, y', y'') = 0$, où $\bigstar$ est le membre de gauche d'une équation différentielle *linéaire* du second ordre à coefficients constants (donc aisée à résoudre), et $q(y, y', y'')$ est une forme quadratique en y, y' et y'' (c'est-à-dire une combinaison linéaire de carrés et de produits de deux termes parmi les trois suivants : y, y' et y''). L'équation ci-dessus est vérifiée si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\bigstar(t) = 0$ ou $q(y, y', y'')(t) = 0$: pour poursuivre, il importe donc de comprendre où s'annule cette forme quadratique.

Pour y parvenir, le document *Méthodes* du chapitre XII, section *Montrer qu'une application est un produit scalaire*, peut vous inspirer : écrire $q(y, y', y'')$ comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de carrés dépendant de y et de ses dérivées (sans qu'il n'y ait plus de termes « croisés »). En déduire que $q(y, y', y'') = 0$ si et seulement si $y = y'$: on sait résoudre.

Ainsi $\bigstar = 0$ et $q(y, y', y'') = 0$ sont résolubles. Problème : l'anneau des fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas intègre. Autrement dit : il est faux de penser que $\bigstar \cdot q(y, y', y'') = 0$ si et seulement si $\bigstar = 0$ ou $q(y, y', y'') = 0$. Pour cela, la clé est d'étudier les raccords : on suppose l'existence de t_0 tel que y soit solution de la première équation à gauche de t_0 et solution de la seconde à droite de t_0 (par exemple). On écrit y explicitement de chaque côté de t_0, et on constate qu'il n'y a pas classe C^2 au voisinage de t_0 : contradiction.

D'un point de vue calculatoire, cette dernière étape est plus simple si, d'une part, on écrit y comme combinaison linéaire de deux exponentielles complexes (dans le cas de la solution à une équation différentielle d'ordre 2, sans oublier que les scalaires de cette combinaison linéaire sont conjugués), et d'autre part on utilise le fait qu'une application deux fois dérivable en t_0 admet un développement limité d'ordre 2 en t_0. Utiliser l'unicité de la partie régulière d'un développement limité donne rapidement une contradiction.

Je pense qu'il y a des résolutions plus simples.

Commentaires.

Études qualitatives

✓ **Exercice 25.**

1. L'existence et unicité découle du théorème de Cauchy linéaire. Noter que $t \mapsto y_1(-t)$ est aussi solution avec la même condition initiale. Conclure.
2. Raisonnement analogue.
3. Considérer $\left(\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix}\right)$.

Commentaires.

★ **Exercice 26. (Solutions périodiques à l'ordre 1)** Dans les deux questions qui suivent, l'étude passe d'abord par une explicitation des solutions. On sait faire. Ensuite, grâce au théorème de Cauchy linéaire, démontrer qu'une solution y est périodique si et seulement si $y(0) = y(2\pi)$ (cette égalité équivaut à avoir la même condition initiale pour deux fonctions solutions : lesquelles ?). C'est cette égalité qu'il convient d'analyser selon que $\alpha \neq 0$ ou $\alpha = 0$.

1. Noter que dans ce cas, $y(0) = y(2\pi)$ admet une unique solution (cette équation revient à déterminer la constante qui devrait apparaître dans votre explicitation des solutions faite précédemment).
2. Montrer que dans ce cas, l'équation $y(0) = y(2\pi)$ équivaut à une égalité du type : $\int_0^{2\pi} \varphi \cdot \bigstar = 0$. Selon que l'intégrale ci-avant soit nulle ou non, on aboutit à $0 = 0$ (équation toujours vérifiée, donc tout y convient) ou à $\spadesuit = 0$ avec $\spadesuit$ non nul (aucun y ne convient).

Commentaires.

★ **Exercice 27. (Solutions périodiques à l'ordre 2)** La démarche est la même que dans l'exercice 26. La différence est dans l'explicitation des solutions : utiliser la méthode de variation des constantes.

Commentaires.

Exercice 28. Montrer que si Y est solution, alors Y' est à valeurs dans l'image de A, qui elle-même est contenue dans un espace vectoriel de dimension $n-1$. Conclure en passant de Y' à Y naturellement.

Commentaires.

Exercice 29. Si A admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, réelles ou non : introduire une base (X_1, X_2) de vecteurs propres de A et exprimer toutes les solutions de $Y' = AY$ à l'aide de ces vecteurs propres et des valeurs propres de A.

Si λ_1 et λ_2 sont réelles : selon leur signe, voir les différents comportements possibles des fonctions solutions. Représenter le graphe dans un repère dirigé par X_1 et X_2, grossièrement avec les asymptotes.

Si λ_1 et λ_2 sont non réelles : noter qu'elles sont complexes conjuguées, et que les vecteurs propres peuvent être choisis de sorte à l'être également. En déduire une base (X_3, X_4) de vecteurs *réels* permettant d'exprimer toutes les solutions de $Y' = AY$ comme une combinaison de $t \mapsto e^{t\mathrm{Re}(\lambda_1)} \cos(t\mathrm{Im}(\lambda_1))$ et $t \mapsto e^{t\mathrm{Re}(\lambda_1)} \sin(t\mathrm{Im}(\lambda_1))$. Le comportement des solutions dépend du signe de $\mathrm{Re}(\lambda_1)$. Représenter le graphe dans un repère dirigé par X_3 et X_4.

Si A admet une unique valeur propre λ réelle : soit $A = \lambda \mathrm{I}_n$ et l'étude est très facile ; sinon, utiliser le fait que $A - \lambda \mathrm{I}_2$ soit nilpotente (pourquoi ?) pour simplifier $t \mapsto \exp(tA)$ puis l'expression des solutions de $Y' = AY$. Représenter le graphe dans la base canonique par exemple.

On peut aussi trianguler A et représenter le graphe dans une base de triangulation.

Commentaires.

✓ **Exercice 30.** Dériver $t \mapsto \|Y(t)\|^2$ et chercher à quelle condition nécessaire et suffisante la dérivée est nulle. Le sens réciproque est le plus facile. Pour le sens direct, d'abord déduire du calcul de dérivée ci-dessus que : $\forall (X_1, X_2) \in (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $X_1^\top (A + A^\top) X_2 = 0$ (s'inspirer des identités de polarisation de la géométrie), puis prendre X_1 et X_2 adéquats pour en déduire $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ (où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de A).

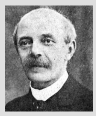
Commentaires.

Exercice 31.

1. Sens réciproque facile (on sait expliciter un système fondamental de solutions dans ce cas). Pour le sens direct : d'abord montrer que si une valeur propre λ n'est pas un imaginaire pur, alors pour un bon choix de vecteur X la solution $t \mapsto \exp(tA)X$ n'est pas bornée, du fait que $e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}$ tende vers l'infini en $-\infty$ ou $+\infty$. Pour montrer que A est diagonalisable : écrire $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente. Décrire une solution de $Y' = AY$ à l'aide de D et N. Si $N \neq 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, alors les composantes de $t \mapsto \exp(tA)X$ avec X adéquat sont polynomiales donc non bornées. Conclure que N est nulle.
2. Utiliser la question précédente et l'exercice 30.

Commentaires.

Exercice 32. (Théorème de Floquet)


1847-1920

1. Remarquer que si Y est solution alors $Y_T : t \mapsto Y(t+T)$ l'est aussi. Interpréter l'égalité à démontrer en termes d'existence de valeur propre d'un certain endomorphisme. Un argument dimensionnel assure l'existence d'une telle valeur propre et il suffit de considérer un vecteur propre associé pour conclure.
2. Pour tout i, décomposer $Y_{i,T}(t)$ (avec les notations ci-dessus) dans la base $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$. Écrire matriciellement l'égalité obtenue. Identifier l'endomorphisme canoniquement associé à C et noter qu'il est injectif.

Commentaires.

Exercice 33.

1. On sait résoudre explicitement cette équation différentielle. Exprimer les solutions et constater qu'avoir le caractère borné se résume à bien choisir la seule constante apparaissant dans l'expression de ces solutions.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application y_n est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Passer à la limite dans (E_n) convenablement. Ce même raisonnement offre une condition suffisante sur y_n' pour qu'il y ait convergence uniforme (ce qui induit une condition sur f).

Commentaires.

Exercice 34. (Où est l'équation différentielle ?)

1. Exprimer f en fonction de $g = f' + \alpha f$ (c'est une équation différentielle à résoudre). Utiliser le fait que $g(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(1)$ pour obtenir une estimation du même type pour f (on rappelle que sous certaines hypothèses, on sait intégrer les relations de comparaison). Conclure.
2. Factoriser P sur $\mathbb{C}$ et raisonner par récurrence en utilisant la question précédente.

Commentaires.

Exercice 35. Poser $g = f + f''$ et résoudre cette équation différentielle. On sait trouver une solution particulière grâce à la méthode de variation des constantes. Simplifier alors $f(x) + f(x + \pi)$ grâce à la linéarité d'une certain opération mathématique et à une formule de trigonométrie. Conclure grâce à l'hypothèse sur g.

Commentaires.

Exercice 36. (Équation matricielle résolue grâce à une équation différentielle)

1. L'unicité découle du théorème de Cauchy linéaire. Noter que l'équation n'est pas sous la forme habituellement rencontrée, mais que ce n'est pas grave puisque nous avons démontré ce théorème dans le cas plus général des équations différentielles sous la forme : $y' = a(y) + b$ avec $a : I \to \mathrm{L}(E)$. Convenablement définir a pour pouvoir appliquer ce théorème.
   On sait ensuite expliciter la solution demandée en s'inspirant de la forme des solutions dans le cas habituel, qu'il faut modifier pour qu'après dérivation de la fonction proposée, on obtienne une multiplication par A à gauche, une multiplication par B à droite, et une somme (le fait que la dérivation de Y donne une somme de deux quantités devrait mettre la puce à l'oreille sur la forme à adopter).
2. Noter que grâce à un argument d'algèbre linéaire classique, l'existence et l'unicité sont deux questions équivalentes (reformuler la question posée avec un endomorphisme adéquat). Pour l'existence : introduire la fonction Y de la question précédente et intégrer de $t = 0$ jusqu'à... ? Pour savoir jusqu'où intégrer, noter que le membre de gauche de votre égalité aura un terme « en trop » si vous intégrez jusqu'à un t_0 quelconque. Pour savoir quelle opération faire pour éliminer ce terme en trop : bien observer les hypothèses de l'énoncé et se souvenir d'un résultat du cours sur les solutions de $Y' = AY$ lorsque l'on rencontre ces hypothèses. L'adapter à cette situation et s'en servir.

Commentaires.

L'équation différentielle $y'' + qy = 0$

★ **Exercice 37.** (🗎)

1. Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß pour en déduire une suite convergente de zéros de y. Grâce à un théorème d'analyse réelle de 1re année, déduire de la suite précédente une suite convergente de zéros de y', ayant la même limite. Conclure grâce au théorème de Cauchy linéaire.
2. Écrire un intervalle comme une réunion dénombrable de segments pour se ramener au cas précédent.

Commentaires.

★ **Exercice 38.** (🗎)

1. Utiliser les hypothèses pour montrer que y'' est intégrable et que y' admet donc une limite finie en $+\infty$. Si cette limite est non nulle, que dire du comportement de y en $+\infty$?
2. Si (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions avec y_1 et y_2 bornées : montrer que le wronskien de y_1 et y_2 est constant égal à 0. En déduire une contradiction.

Commentaires.

★ **Exercice 39.** Multiplier par y' l'équation différentielle, l'intégrer, et effectuer une intégration par parties pour obtenir une majoration de y en fonction d'une intégrale dépendant de y. Utiliser le lemme de Grönwall convenablement pour conclure.

Commentaires.

Exercice 40. Si y est solution et ne s'annule pas, elle est de signe constant, par exemple : $y > 0$ (quitte à considérer $-y$ au lieu de y). En déduire le signe de y'' : qu'est-ce que cela implique comme propriété de y ? Utiliser cette propriété pour en déduire que soit y est constante (ce qui n'est pas possible car... ?), soit il existe t_1 et t_2 distincts tels que $y(t_1) < y(t_2)$. Comparer le graphe de y à la droite liant $(t_1, y(t_1))$ et $(t_2, y(t_2))$ pour obtenir une contradiction.

Commentaires.

Exercice 41. Dans tout l'exercice, il est utile de noter que grâce aux hypothèses de l'énoncé, si y est solution alors y^2 est convexe : cela permet déjà de géométriquement comprendre tous les résultats qui suivent (faire des dessins est pertinent pour réfléchir à la situation).

1. Noter que y^2 est positive et convexe. En utilisant convenablement le théorème des pentes croissantes, montrer que $y(t_1) = y(t_2) = 0$ (avec $t_1 < t_2$) implique $y_{[t_1,t_2]} = 0$: en déduire que y est identiquement nulle en invoquant un problème de Cauchy adéquat.
2. Montrer que si y n'est pas identiquement nulle, et si t_0 est un zéro de y, alors y tend vers l'infini en $+\infty$ sur $I \setminus \{t_0\}$ (sur un dessin c'est évident : si $t \in I \setminus \{t_0\}$, le graphe de y^2 finit par être au-dessus de la droite liant t_0 et t ; quel résultat sur les fonctions convexes formalise cette idée ?).
3. Adapter le raisonnement de la question précédente, en utilisant le théorème des pentes croissantes en des points où la fonction y^2 ne prend pas la même valeur (possible car une fonction constante vérifiant l'équation différentielle doit être... ?).

Commentaires.