Exercices du chapitre XI (Équations différentielles linéaires)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

La lettre K désigne systématiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Lorsqu'on écrit une matrice de $\mathrm{M}_n(K)$, l'élément n est un entier naturel non nul (sauf mention explicite du contraire).

Résolution pratique d'équations différentielles

✓ **Exercice 1.** Déterminer les applications $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant (E) : $\begin{cases} y' &= y - 2z, \\ z' &= 2y + 5z. \end{cases}$

✓ **Exercice 2.** Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 0.$$

On posera : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = x^2 y(x)$.

✓ **Exercice 3.** Déterminer les applications $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y''(x) - \left(6x + \frac{1}{x}\right) y'(x) + 8x^2 y(x) = x^4.$$

On utilisera le changement de variable : $t = x^2$.

★ **Exercice 4. (Équations différentielles d'Euler)** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On étudie les solutions de l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0. \qquad (E_1)$$

1. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que y est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si l'application $g = y \circ \exp$ est solution de l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$u'' + (a - 1)u' + bu = 0. \qquad (E_2)$$

2. Prenons le cas où $a = 1$ et $b = -4$. Résoudre (E_2), et en déduire les solutions de (E_1).

La méthode se généralise à toutes les équations différentielles de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{(i)}(x) = 0$.

★ **Exercice 5.**

1. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(-x) - 4f(x) = \sin(x)$.
2. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) + f(x) = e^x$.

✓ **Exercice 6.** Déterminer les applications $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que : $\begin{cases} x' &= -x + y + z, \\ y' &= x - y + z, \\ z' &= x + y - z. \end{cases}$

✓ **Exercice 7.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose : $A^2 = -\mathrm{I}_n$. Expliciter les solutions de l'équation différentielle : $Y' = AY$.
2. Même question, en supposant cette fois-ci que A est une matrice de projecteur.

✓ **Exercice 8.** Déterminer les applications $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) &= 2t \cdot x(t) + y(t) + z(t), \\ y'(t) &= x(t) + 2t \cdot y(t) + z(t), \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + 2t \cdot z(t). \end{cases}$$

Exercice 9. Déterminer un système fondamental de solutions de :

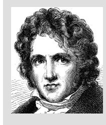
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 4xy''(x) - 2y'(x) + 9x^2 y(x) = 0.$$

✓ **Exercice 10.** Déterminer un système fondamental de solutions de :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad (x^2 + x)y''(x) + (x - 1)y'(x) - y(x) = 0.$$

✓ **Exercice 11.** Donner un système fondamental de solutions de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xy''(x) + (1-2x)y'(x) + (x-1)y(x) = 0.$$



1784-1846

★ **Exercice 12. (Équation différentielle de Bessel)** Soit (E) l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière en 0. En déduire, en particulier, l'existence et unicité d'une solution J sur $\mathbb{R}$ telle que : $J(0) = 1$, et qu'elle est développable en série entière.
2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(x \sin(t)\right) \mathrm{d}t$.
3. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que (J, f) est un système fondamental de solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si f n'est pas bornée.

✓ **Exercice 13. (Méthode de variation des constantes)** Résoudre les équations différentielles :

$$\text{(a)} \quad \forall t \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,\ y''(t) + y(t) = \tan(t), \quad \text{(b)} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}.$$

✓ **Exercice 14.** Déterminer les applications x, y et z de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 3x(t) + 3y(t) - 2z(t) + e^t, \\ y'(t) & = & x(t) + y(t) + 2z(t), \\ z'(t) & = & x(t) + 3y(t) + e^t. \end{array} \right.$$

Exercice 15. Déterminer les applications x et y de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & tx(t) + y(t) + 2t^2 - 1, \\ y'(t) & = & -x(t) + ty(t) + 3t. \end{array} \right.$$

Exercice 16. Soit $P \in K[X]$. Déterminer les solutions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'' + y = P$.

★ **Exercice 17.** Soit $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n$ une série absolument convergente de nombres réels. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que : $\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$.

Exercice 18. (Un contre-exemple au théorème de Cauchy linéaire ?) Montrer que l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle (E) : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2y''(x) - 6xy'(x) + 12y(x) = 0$, est de dimension 4.

Équations différentielles non linéaires et équations fonctionnelles

★ **Exercice 19.** Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1 - \displaystyle\int_0^x (2x - t) \cdot f(t) \mathrm{d}t$.

Exercice 20. Déterminer les applications $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues telles que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x f^2 = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f\right)^2$.

Exercice 21. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t) \mathrm{d}t$.

Exercice 22. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que : $f''f - f'^2 = 1$.

Exercice 23. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et telles que : $y'' + |y| = 0$, avec les conditions initiales : $y(0) = 0$, et : $y'(0) = 1$.

Exercice 24. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que : $\begin{vmatrix} y' & y'' & y \\ y'' & y & y' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix} = 0$.

Études qualitatives

✓ **Exercice 25.** Soient $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que p est impaire et q paire, et on considère l'équation différentielle $(E) : y'' + py' + qy = 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution y_1 de (E) telle que : $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, et qu'elle est paire.
2. Montrer qu'il existe une unique solution y_2 de (E) telle que : $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, et qu'elle est impaire.
3. Que dire de la famille (y_1, y_2) ?

★ **Exercice 26. (Solutions périodiques à l'ordre** 1**)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue et 2π-périodique. On étudie l'équation différentielle $(E) : \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + \alpha y(t) = \varphi(t)$.

1. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors (E) admet une unique solution 2π-périodique.
2. Montrer que si $\alpha = 0$, alors soit aucune, soit toute solution de (E) est 2π-périodique.

★ **Exercice 27. (Solutions périodiques à l'ordre** 2**)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique. Montrer que l'équation différentielle $(E) : y'' + y = f$, admet au moins une solution 2π-périodique si et seulement si l'on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$, et que dans ce cas toutes les solutions de (E) sont 2π-périodiques.

Exercice 28. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non inversible. Montrer que les courbes intégrales des solutions de $Y' = AY$ sont contenues dans un hyperplan affine.

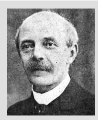
(On appelle *courbe intégrale d'une équation différentielle* l'image directe d'une solution de cette équation).

Exercice 29. Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non nulle. Décrire l'allure des trajectoires des solutions de l'équation différentielle : $Y' = AY$, selon le nombre de valeurs propres réelles de A.

✓ **Exercice 30.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si les solutions de l'équation différentielle : $Y' = AY$, sont de norme constante (pour la norme euclidienne usuelle de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Exercice 31. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle : $Y' = AY$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est diagonalisable et : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq i\mathbb{R}$.
2. En déduire que toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.


1847-1920

Exercice 32. (Théorème de Floquet) Soient $T > 0$ et $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue de T-périodique.

1. Montrer que l'équation différentielle $(E) : Y' = AY$, admet une solution non nulle Y telle que : $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}$, $Y(t+T) = \lambda Y(t)$.
2. Soit $(Y_1, \dots, Y_n)$ un système fondamental de solutions de (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ la matrice représentative de $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$ dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t+T) = M(t)C$.

Exercice 33. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note (E_n) l'équation différentielle : $y' - ny = -nf$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe une unique solution bornée de (E_n). On la note y_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application y_n est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $(y_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers f. Quand a-t-on convergence uniforme ?

Exercice 34. (Où est l'équation différentielle ?) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, et : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f'(x) + \alpha f(x)) = 0$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. On suppose à présent f de classe C^∞. Soit d l'endomorphisme de dérivation de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose l'existence de $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul dont tous les zéros sont de partie réelle strictement négative et tel que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P(d)(f)(x) = 0$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 35. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que : $f + f'' \geqslant 0$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Exercice 36. (Équation matricielle résolue grâce à une équation différentielle) Soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

1. Soit $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique application $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Y' = AY + YB$, telle que : $Y(0) = C$.
2. On suppose que les valeurs propres de A et B sont toutes de partie réelle strictement négative. Montrer que pour toute matrice $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $AX + XB = C$, puis exprimer X en fonction de A, B et C.

L'équation différentielle $y'' + qy = 0$

★ **Exercice 37.** Soit $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, et soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ une solution *non nulle* de l'équation différentielle linéaire : $y'' + qy = 0$.

1. Montrer que y n'admet qu'un nombre fini de zéros sur $[a,b]$.
2. Si l'on remplace le segment $[a,b]$ par un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, que dire de l'ensemble des zéros d'une solution $y : I \to \mathbb{R}$ non nulle de $y'' + qy = 0$?

★ **Exercice 38.** Soient $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et y une solution bornée de $(E) : y'' + qy = 0$.

1. Étudier le comportement de y' en $+\infty$.
2. Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

★ **Exercice 39.** Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation différentielle : $y'' + qy = 0$, est bornée.

Exercice 40. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, non identiquement nulle et positive sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute solution de l'équation différentielle : $y'' + qy = 0$, s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41. Soit $q : I \to \mathbb{R}$ une application continue et négative, et soit $y : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle linéaire : $y'' + qy = 0$.

1. Montrer que si y s'annule au moins deux fois sur I, alors : $y = 0$.
2. On suppose dans cette question : $I = [a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si y s'annule et est bornée, alors : $y = 0$.
3. On suppose dans cette question : $I = \mathbb{R}$. Montrer que si y est bornée, alors y est nulle.