**Exercices du chapitre préliminaire (Convergence des suites numériques et de fonctions) – Indications**

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.

## Lien suite-série et suites de Cauchy

**Exercice 1.** **(🗎)** Montrer que la suite des sommes partielles n'est pas une suite de Cauchy, en minorant $\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{\sigma(n)}{n^2}$. D'abord minorer trivialement $\frac{1}{n^2}$. Ensuite, utiliser le fait que les $\sigma(n)$ soient tous distincts et entiers pour minorer $\sum_{n=N}^{N+p} \sigma(n)$. Conclure par un bon choix de $p$.

> **Commentaires.** Quand le terme général d'une série contient une permutation de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on ne peut minorer $\sigma(n)$ autrement que par 1 si l'on raisonne sur les sommes partielles, et en général cela ne nous enseigne rien. Raisonner sur une « tranche de Cauchy » (c'est le nom donné aux sommes de la forme $\sum_{n=N+1}^{N+p} u_n$) est le meilleur moyen d'avoir une minoration non triviale, profitant du fait que les termes $\sigma(n)$ ne peuvent pas tous être « petits ». Après avoir résolu l'exercice, on se demandera pourquoi la même méthode, mais appliquée à la somme $\sum_{n=1}^{N} u_n$, ne permet pas de conclure.

**Exercice 2.** **(🗎)** Utiliser le lien suite-série (comme dans le cours, dans l'exemple de la constante d'Euler), ou bien démontrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée grâce à une comparaison série-intégrale. Cette dernière méthode n'est cependant pas dans l'esprit de ce chapitre préliminaire.

> **Commentaires.** L'idée du lien suite-série ne sort pas de nulle part. On l'a dit dans le cours : c'est pertinent d'y recourir dans deux situations : 1° quand la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est inconnue (ou que son existence est déjà un problème en soi), 2° quand $u_{n+1} - u_n$ est plus simple à étudier que $u_n$. Et c'est le cas ici, puisque $u_{n+1} - u_n$ nous permet d'éliminer la somme dont le comportement asymptotique nous embarrasse.
> La comparaison série-intégrale, en revanche, est facile à motiver, dans la mesure où c'est un des meilleurs outils pour encadrer une somme non calculable. Elle nous ramène en effet à des intégrales, ce qu'on sait calculer plus souvent (grâce au théorème fondamental de l'analyse, entre autres).

**Exercice 3. (Interpolation de la factorielle sur $\mathbb{R}_+^*$) (🗎)**

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$ n'est pas spécialement agréable à étudier (rien ne se simplifie). En revanche, si l'on pose : $u_n(x) = \ln(f_n(x))$, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1}(x) - u_n(x))$ est très simple à obtenir par les méthodes classiques.
2. Exprimer $f_n(x+1)$ en fonction de $f_n(x)$ et prendre $n \to +\infty$. Par récurrence, on en déduit $f(n) = n!$.

> **Commentaires.** Le lien suite-série est pertinent notamment quand le comportement asymptotique de $u_{n+1} - u_n$ est plus simple à étudier que celui de $u_n$. C'est ce qui motive cette approche dans l'exercice 2, parce que $u_{n+1} - u_n$ élimine la somme. En revanche, lorsque le terme général fait intervenir des produits, des factorielles, etc. : les simplifications n'apparaissent pas en étudiant $u_{n+1} - u_n$ mais plutôt $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ce qui nécessite d'utiliser la propriété de morphisme du logarithme (pour qu'une différence s'écrive comme un quotient). D'où l'idée de la première question, qui n'est plus si saugrenue.

**Exercice 4. (Convergence d'un produit)**

1. S'inspirer de la démonstration que si une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors son terme général converge vers 0.
2. La première inégalité découle d'une récurrence sur $N_2$, et la seconde de la convexité de l'exponentielle.
3. Montrer que la suite $\prod_{n\geqslant 0} (1 + u_n)$ est de Cauchy grâce à la question précédente et au fait que $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ soit convergente. Noter que $e^{\varepsilon} - 1 = e^{\varepsilon} - e^0$ est une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration.*

> **Commentaires.** Lorsque j'ai motivé l'utilisation des suites de Cauchy pour les suites dont l'existence de la limite est déjà un problème en soi, cela désignait en particulier les sommes de série (lorsqu'on n'a pas de monotonie des sommes partielles). Puisque les sommes et les produits sont très proches (on passe de l'un à l'autre *via* l'exponentielle ou le logarithme ; d'où l'apparition de l'exponentielle dans la résolution de l'exercice), il n'y a rien d'étonnant qu'une observation faite dans un cas reste valable pour l'autre.

**Exercice 5. (Critère de Cauchy)** Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $a$, montrer que $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge en vérifiant qu'elle est de Cauchy. Ne pas oublier de vérifier que si deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers $a$, alors $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(v_n))_{n\geqslant 0}$ ont même limite (ce qui est plutôt facile grâce à l'hypothèse de l'énoncé).

> **Commentaires.** L'idée pour traiter cet exercice est un lieu commun de l'analyse : quand on connaît un résultat sur les suites (ici : le fait que les suites de Cauchy convergent), on en déduit à peu de frais un résultat sur les fonctions *via* la caractérisation séquentielle de la limite. Ou, si cette caractérisation n'apparaît pas : toute propriété sur des fonctions quantifiées avec un $\varepsilon > 0$ universel induit une propriété séquentielle en remplaçant $\varepsilon$ par $\frac{1}{n}$ (ou par $\frac{1}{2^n}$, ou par $n$, etc., cela dépend de ce qu'on veut). Cette idée apparaît partout dans votre cours de 1re année, et reviendra par exemple au moment d'étudier les intégrales à paramètres au chapitre I, les parties fermées et les parties denses au chapitre VI, etc.
> L'intérêt du critère de Cauchy démontré dans cet exercice est le même que pour les suites de Cauchy. C'est pratique en particulier lorsque nous n'avons pas d'information sur la limite candidate $\ell$ de $f(x)$, ou lorsque son existence est un problème en soi (ce qui nous empêche d'étudier $|\ell - f(x)|$). Vous pouvez en juger lors du traitement des exercices 6 et 8.
>
> Noter qu'un bon usage du lien suite-série permet de s'affranchir des suites de Cauchy (qui sont hors programme).

**Exercice 6. (Le vrai théorème de la limite de la dérivée)**

1. Comme $f'$ admet une limite finie en $a$, elle est bornée à son voisinage. Conclure avec l'inégalité des accroissements finis.
2. Montrer que $f$ vérifie le critère de Cauchy (exercice 5).
3. Utiliser la première question.
4. Simplifier le taux d'accroissement grâce à l'égalité des accroissements finis, et reconnaître une composition de limites.

> **Commentaires.** Se convaincre que l'idée de vérifier le critère de Cauchy est naturelle, au vu de ce que j'en dis plus haut.

☢ **Exercice 7. (Nombre de rotation de Poincaré)**

1. Regarder pour $n = 0$ ce que doit vérifier $k$, et s'assurer que si $k$ convient pour $n = 0$, il convient pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prendre l'image par $f$ dans l'encadrement déduit du résultat pour $n = 0$, et utiliser la croissance de la fonction. Simplifier les extrémités de l'encadrement en notant que $f(x + \ell) = f(x) + \ell$ pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$. Diviser par $n$ la majoration de l'énoncé pour en déduire que $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ et $(u_n(y))_{n\geqslant 0}$ ont même limite (si elles existent).
2. Encadrer $f^m(0)$ par deux entiers, et prendre l'image par $f^m$. Simplifier le résultat obtenu grâce à l'identité déjà mentionnée dans la question précédente.
3. Prendre $m = n$, et en déduire un encadrement de $f^{mn}(0)$ par récurrence. Il en résulte des majorations de $|u_{mn}(0) - u_n(0)|$ et de $|u_{mn}(0) - u_m(0)|$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Obtenir l'encadrement de la limite demandé en passant à la limite dans une inégalité vérifiée par $|u_m(0) - u_1(0)|$.

**Exercice 8. (Prolongement des fonctions uniformément continues)**

1. Si $g$ et $h$ sont deux fonctions qui conviennent, montrer qu'elles sont égales sur tout élément de $A$, et en déduire par densité et passage à la limite qu'elles sont égales partout.
2. Montrer que $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy. Pour cela, démontrer que $|x_m - x_n| \leqslant \eta$ pour $n$ et $m$ assez grand, et utiliser l'uniforme continuité.
3. Vérifier que $|x_n - y_n| \leqslant \eta$ pour $n$ assez grand, et conclure grâce à l'uniforme continuité.
   **Remarque.** Cette question et la précédente sont superflues si on utilise l'exercice 5.
4. Pour $g_{|A} = f$ : prendre une suite constante à valeurs dans $A$. Pour l'uniforme continuité de $g$ : majorer $|g(x) - g(y)|$ en approchant $x$ et $y$ par des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $A$, afin de se ramener (*via* l'inégalité triangulaire) à des évaluations de $f$ en des éléments de $A$. Utiliser l'uniforme continuité de $f$ d'une part, et le fait que $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)$ (idem pour $g(y)$) d'autre part.

**Commentaires.** Vouloir poser $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ est une idée naturelle. Mais on n'a aucun moyen de connaître $g(x)$ de manière *a priori*. On est dans le cadre d'utilisation des suites de Cauchy : montrer l'existence d'une limite lorsque rien ne nous permet de la connaître et de la manipuler. Noter qu'un bon usage du lien suite-série permet de s'affranchir des suites de Cauchy (qui sont hors programme).
Cet exercice est très loin d'être anecdotique : on peut très bien remplacer l'espace de départ par un espace autrement plus compliqué, un espace de fonctions continues par morceaux par exemple, et $A$ par une partie dense de cet espace de fonctions (on définira ce qu'est une partie dense en dehors de $\mathbb{R}$, lorsque nous serons au chapitre VI, mais vous avez déjà vu de tels exemples sans le savoir : vous avez vu en 1re année, au moment de définir l'intégrale d'une fonction, qu'on peut approcher toute fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier, et d'aussi près que l'on veut ; cela peut se reformuler en disant que l'espace des fonctions en escalier sur un segment est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux). On garde la définition de l'uniforme continuité rappelée dans l'énoncé de l'exercice. Le résultat de prolongement reste valable : on a seulement besoin que l'espace d'arrivée soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour y utiliser que les suites de Cauchy convergent.
Cet énoncé nous dit alors que, pour définir un opérateur en toute fonction, il suffit de le définir en toute fonction d'une partie plus simple et petite $A$, tant qu'elle est dense (et que l'opérateur est uniformément continu). C'est exactement ce que vous avez fait pour définir l'intégrale d'une fonction en 1re année ! D'abord vous la définissez pour des fonctions en escalier, où l'affaire est très simple puisque ce sont des somme d'aires de rectangle, et ensuite vous l'étendez par densité à toute fonction continue par morceaux. Que c'est commode ! Commode parce que le travail d'explicitation n'a été fait que pour des fonctions très simples à manipuler. Cela marche parce que l'application $f : g \mapsto \int_a^b g$ est $(b-a)$-lipschitzienne donc uniformément continue sur $\mathrm{Esc}\,([a,b],\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, on a : $\forall (g,g') \in \mathrm{Esc}\,([a,b],\mathbb{R})$, $|f(g) - f(g')| \leqslant (b-a)\|g-g'\|_\infty$, par croissance de l'intégrale).

C'est exactement avec cette stratégie que le mathématicien définit la transformée de Fourier (et de plein d'autres opérateurs) d'abord avec des fonctions qui l'arrangent bien, avant de l'étendre à toute fonction par densité.

## Convergence des suites de fonctions : mise en pratique

✓ **Exercice 9. (🗎)** C'est standard. Plusieurs normes infinies peuvent s'étudier avec un tableau de variation. Dans les cas (b) et (d), l'étude de $f_n(x) - f(x)$ fait apparaître une « différence petite », ainsi que définie dans *L'art de la majoration.* Utile pour la majorer en vue d'obtenir la convergence uniforme sur les segments. Pour (c) : noter que c'est l'exponentielle décroissante qui fait tendre $f_n(x)$ vers 0 par croissances comparées. Penser aux conseils du document *Méthodes* sur la convergence uniforme des suites de fonctions. Pour (e) : remarquer que pour $nx \approx 1$, on a $f_n(x) \approx (\sin(1))^2$. Cela semble indiquer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]0,\pi[$. Rendre rigoureux cet argument par de bons choix de $x$ tels que $nx \approx 1$. Pour (f) : la fonction est de la forme « polynôme en $n$ × fonction puissance ». Il en question dans $f_n$ le document *Méthodes* suscité.

**Commentaires.** Lors du traitement de cet exercice, on s'attardera sur les points suivants, qui vont beaucoup vous aider à traiter toutes les questions de convergence uniforme : 1° reconnaître les « différences petites », et voir comment on réagit à chaque fois qu'on en croise, 2° comprendre comment choisir les évaluations de $f_n - f$ qui permettent de contredire la convergence uniforme (une interprétation graphique étant souvent instructive), 3° noter que les cas où il n'y a pas convergence uniforme sont souvent de la forme « polynôme en $n$ × fonction puissance », et j'en parle dans le document *Méthodes*.
Lorsque vous aurez vu le théorème de la double limite au chapitre VII, vous pourrez consulter cet exercice d'un œil nouveau.

✓ **Exercice 10. (🗎)** La convergence simple est classique. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ est contredite par un bon choix de $x$ dépendant de $n$. Sur des segments : écrire que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$ (c'est toujours une bonne idée quand on a une quantité de la forme $a_n^{b_n}$), et noter que la convergence uniforme revient à étudier une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration.* On sait alors comment les majorer efficacement.

**Remarque.** La convergence uniforme peut également être contredite en raisonnant comme dans l'exercice 26. Il faut alors démontrer que la limite simple n'est pas polynomiale, en notant qu'elle vérifie une propriété qu'aucune application polynomiale ne peut vérifier.

**Commentaires.** Lors du traitement de cet exercice, on s'attardera sur les points suivants, qui vont beaucoup vous aider à traiter toutes les questions de convergence uniforme : 1° reconnaître les « différences petites », et voir comment on réagit à chaque fois qu'on en croise, 2° comprendre comment choisir les évaluations de $f_n - f$ qui permettent de contredire la convergence uniforme (une interprétation graphique étant souvent instructive).

✓ **Exercice 11. (🗎)** Dans les deux cas, remarquer que la limite simple n'est pas continue sur [0,1].

**Commentaires.** Regarder la continuité de la fonction limite candidate, ou (lorsqu'il y a continuité) comparer ses limites aux extrémités avec les limites des fonctions $f_n$, permet parfois de conclure sans étude approfondie. À privilégier, pour minimiser les calculs ! C'est souvent le cas, en particulier, lorsqu'on est en présence de fonctions puissances.

**Exercice 12. (Fonction discontinue en tout réel, obtenue à l'aide de limites simples de fonctions continues)**

1. Vérifier que si $x \in \mathbb{Q}$ alors $|\cos(n!\pi x)| = 1$ pour tout $n$ assez grand, tandis que $|\cos(n!\pi x)| < 1$ sinon.

2. Immédiat à partir de la question précédente.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Utiliser la densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$ pour montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - a| < \eta$ et $|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a)| > \frac{1}{2}$.

**Exercice 13.** Les méthodes standards d'étude des suites récurrentes permettent de démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,2]$ vers $x \mapsto 2$. Remarquer que $t \mapsto \sqrt{t+2}$ est $k$-lipschitzienne avec $k$ très petit pour en déduire que $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant 2k^n$ pour tout $x$. Prendre $p \to +\infty$, et conclure (autre approche : majorer $|f_{n+1}(x) - f_n(x)|$, toujours grâce au caractère lipschitzien de $t \mapsto \sqrt{t+2}$, et utiliser une somme télescopique pour en déduire un majorant de $|f(x) - f_n(x)|$).

Cette stratégie est à comparer avec la démonstration du théorème de Banach-Picard dans le cours.

> **Commentaires.** L'étude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas singulièrement différente quand $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions, du moins dans le cas où $f$ est contractante. La démonstration du théorème du point fixe de Banach-Picard est un modèle de raisonnement qui apparaît en de nombreux endroits des mathématiques, y compris quand on n'étudie pas des fonctions de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. À connaître par cœur !

**Exercice 14.** Les méthodes standards d'étude des suites récurrentes permettent de démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ vers $x \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{2}]}$. Noter que cette fonction n'est pas continue en 0 : qu'en déduit-on vis-à-vis de la convergence uniforme ?

✓ **Exercice 15.** (🗎) C'est standard. Pour l'observation attendue : regarder la régularité de la limite $f$ de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ en 0.

## Convergence uniforme : fonctions abstraites

**Exercice 16.**

1. Montrer que $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}$ pour tout $n$ assez grand et tout $p$, et conclure.
2. S'inspirer de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ pour produire des fonctions $f_n$ vérifiant $f_n(x) \in \{0,1\}$ pour tous $n$ et $x$, et dont la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ sans être stationnaire.

> **Commentaires.** Cet exercice donne une autre illustration des suites de Cauchy, lorsqu'on sait pourtant déjà qu'une suite converge : pour avoir un contrôle sur $|\ell - u_n|$ à l'aide d'un contrôle sur $|u_{n+p} - u_n|$. On l'utilise semblablement dans l'exercice 26, ou pour avoir l'estimation $|\ell - u_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(k^n)$ dans la démonstration du théorème de Banach-Picard.

☢ **Exercice 17.** (🗎) Utiliser l'hypothèse de l'énoncé pour montrer que $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M|x - y|$ pour tous $x$, $y$ et $n$. On en déduire que si $x$ et $y$ sont proches, alors $f_n(x)$ et $f_n(y)$ aussi. Or la continuité assure qu'il en est de même pour $f(x)$ et $f(y)$. Introduire une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ qui permet de se ramener systématiquement à la situation où $f_n(x)$ et $f_n(y)$ sont proches (ainsi que $f(x)$ et $f(y)$), afin d'en déduire que $f_n(x)$ et $f(x)$ sont également proches. Les $y$ seront des points de la subdivision.

Si vous quantifiez les choses correctement, vous verrez que la continuité de $f$ ne suffit pas pour que la proximité mentionnée ci-dessus soit *uniforme*. Réfléchir à la façon de régler ce problème, grâce à une donnée de l'énoncé non citée ci-dessus.

> **Commentaires.** Lorsqu'un exercice nous dit que sous certaines hypothèses, l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » est correcte, cela part souvent du même principe : on utilise la convergence simple en un nombre FINI de points $a_i$, de sorte que $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leqslant \varepsilon$ soit petit simultanément (i.e. pour tout $i$ et pour tout $n$ au-delà d'un rang commun à tous les indices $i$). Une hypothèse de l'énoncé nous assure alors qu'entre deux $a_i$ et $a_{i+1}$, la différence reste « petite ». Voir les exercices 23 et 24. On peut trouver d'autres hypothèses (voir les exercices 27, 28 et 29), mais le principe reste le même (se ramener à la convergence simple en un nombre fini de points). Il en est question dans *Méthodes*, section *Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions abstraite.*
>
> Notons enfin le rôle du segment dans tous ces exercices. C'est lui qui permet de se ramener à un nombre fini de points. C'est une idée importante qui réapparaîtra lorsque nous manipulerons des ensembles *compacts* (et c'est ce qui fait une grande partie de leur intérêt).

**Exercice 18.**

1. Immédiat si l'on démontre que le cosinus est lipschitzien grâce à l'inégalité des accroissements finis.
2. Écrire la définition de l'uniforme continuité de $g$, et s'assurer que $|f_n(x) - f(x)|$ est inférieur au module d'uniforme continuité $\eta$ pour $n$ assez grand (et, surtout, pour tout $x$).
3. Les fonctions puissances fournissent les exemples de fonctions continues les plus problématiques dans les questions d'uniformité.

> **Commentaires.** L'étude de $|g\circ f_n(x) - g\circ f(x)|$, avec $(f_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers $f$, nous met en présence d'une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration.* Lorsque nous ne pouvons pas utiliser l'inégalité des accroissements finis, ni une formule de Taylor (ici il n'y a pas de dérivabilité *a priori*), ce sont les hypothèses d'uniforme continuité ou de caractère lipschitzien (parfois aussi la convexité) qui les remplacent au mieux.

**Exercice 19.**

1. Les hypothèses assurent que $|f_n(x) - f(x)|$ (pour tout $x$) et $|f(\spadesuit) - f(\clubsuit)|$ (pour $\spadesuit$ et $\clubsuit$ proches) sont petits. Majorer $|f_n(f_n(x)) - f(f(x))|$ en fonction de telles quantités grâce à l'inégalité triangulaire.
   Pour un contre-exemple à la convergence uniforme : prendre une fonction $f_n$ (très simple) dont la croissance est suffisamment importante. C'est ce qui assure que $f_n(f_n(\bigstar))$ et $f(f(\bigstar))$ puissent être éloignés bien que $f_n(\bigstar)$ et $f(\bigstar)$ soient proches.
2. Reprendre les majorations de la question précédente, en utilisant le fait que $f$ soit uniformément continue pour majorer $|f(\spadesuit) - f(\clubsuit)|$ plus efficacement.
3. Prendre pour $f_n$ des fonctions indicatrices convenables.

**Exercice 20.** Écrire en termes epsilonesques le fait que $f$ tende vers 0 en l'infini et que $f$ soit continue en 0. Pour $x$ « grand », majorer $|f(nx)|$ grâce à cette traduction ; pour $x$ « petit », majorer $\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ de même. Remarquer que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ : cela permet de majorer à chaque fois le facteur non considéré.

Vous aurez à réfléchir sur le rang $N$ au-delà duquel, pour $n \geqslant N$, on a $|g(x)| \leqslant \varepsilon$ (indépendamment de $x$). Il doit être choisi de sorte que, si $x$ n'est pas suffisamment petit pour qu'on puisse majorer $\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ par un facteur epsilonesque, alors $nx$ est suffisamment grand pour que $|f(nx)|$ soit epsilonesque. Ne pas perdre de vue que si $N$ dépend de $x$, alors la convergence ne peut être uniforme.

**Exercice 21.**

1. Les hypothèses assurent que $|f_n(\bigstar) - f(\bigstar)|$ est petit pour $n$ assez grand, ainsi que $|u_n - \ell|$ (et donc $|f(u_n) - f(\ell)|$ aussi par continuité). Exprimer $|f_n(u_n) - f(\ell)|$ à l'aide de telles quantités.
2. Prendre $f_n : x \mapsto x^n$ et une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ bien choisie convergeant vers le réel problématique 1.
3. L'existence de $x_n$ provient du théorème des valeurs intermédiaires. Si l'on note $f_n$ l'application $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, noter que $f_{n+1} \geqslant f_n$ pour en déduire que $f_n(x_n) = 1$ implique $f_n(x_{n+1}) \leqslant 1$ puis que $x_{n+1} \leqslant x_n$. Minorer trivialement $x_n$ pour en déduire la convergence de la suite.
   Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0, u_0]$ vers $x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$. Pour la convergence uniforme : noter que $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$. Majorer ceci indépendamment de $x$, et utiliser le fait que $u_0 < 1$ pour conclure. Appliquer enfin la première question pour avoir le résultat.
   **Remarque.** Une fois qu'on a vu la théorie des séries entières, ou *a minima* la notion de convergence normale, on peut se contenter de dire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1, et donc converge normalement sur tout segment inclus dans $]-1,1[$.

> **Commentaires.** Pour la première question : toujours bien analyser ce qui est « petit » par hypothèse, pour savoir à quoi se ramener *via* l'inégalité triangulaire.

☢ **Exercice 22.**

1. Prendre des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ constantes et étudier $(f_n(u_n))_{n\geqslant 0}$ dans ces cas-là.
2. Utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité (idée naturelle puisque nous avons une hypothèse de l'énoncé exprimée séquentiellement). Raisonner par l'absurde. Par hypothèse de l'énoncé, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ construite par votre raisonnement par l'absurde vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u_k) = f(u_k)$. L'utiliser pour construire une suite extraite $\left(f_{\varphi(n)}(u_{\varphi(n)})\right)_{n\geqslant 0}$ qui ne converge pas et contredit l'hypothèse de l'énoncé.
3. Raisonner par l'absurde. En déduire l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'une extractrice $\varphi$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f - f_{\varphi(n)}\|_\infty \geqslant \varepsilon$. Justifier l'existence de $x_n$ tel que : $|f(x_n) - f_{\varphi(n)}(x_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß pour avoir une contradiction.

★ **Exercice 23. (Théorèmes de Dini)**

1. Grâce à l'hypothèse de croissance, montrer que $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel positif $\ell$. Si $\ell > 0$, utiliser la définition d'une borne supérieure puis le théorème de Bolzano-Weierstraß pour montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $(f - f_n)(c) \geqslant \frac{\ell}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire une contradiction (vous aurez à un moment besoin d'écrire une inégalité du type : $f(x_{\varphi(k)}) \geqslant f_n(x_{\varphi(k)}) + \frac{\ell}{2}$ : notez bien les deux indices $n$ et $k$).

2. (🗎) Utiliser le fait que $f$ soit uniformément continue (pourquoi ?) pour en déduire que $|f(x) - f(y)|$ est « petit » pour $x$ et $y$ proches. Introduire une subdivision de $[a, b]$ avec des segments suffisamment petits pour utiliser ce fait. Majorer ensuite $|f_n(a_i) - f(a_i)|$ à l'aide de la convergence simple (où les $a_i$ sont les points de la subdivision), puis ramener $|f_n(x) - f(x)|$ à des quantités de la forme $|f_n(a_i) - f(a_i)|$ ou $|f(x) - f(y)|$ (avec $x$ et $y$ proches) *via* l'inégalité triangulaire. La croissance de $f_n$ interviendra pour majorer $|f_n(a_i) - f_n(x)|$.

**Commentaires.** Lorsqu'un exercice nous dit que sous certaines hypothèses, l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » est correcte, cela part souvent du même principe : on utilise la convergence simple en un nombre FINI de points $a_i$, de sorte que $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leqslant \varepsilon$ soit petit simultanément (i.e. pour tout $i$ et pour tout $n$ au-delà d'un rang commun à tous les indices $i$). Une hypothèse de l'énoncé nous assure alors qu'entre deux $a_i$ et $a_{i+1}$, la différence reste « petite ». Voir les exercices 17 et 24. On peut trouver d'autres hypothèses (voir les exercices 27, 28 et 29), mais le principe reste le même (se ramener à la convergence simple en un nombre fini de points). Il en est question dans *Méthodes*, section *Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions abstraite.*

Notons enfin le rôle du segment dans tous ces exercices. C'est lui qui permet de se ramener à un nombre fini de points. C'est une idée importante qui réapparaîtra lorsque nous manipulerons des ensembles *compacts* (et c'est ce qui fait une grande partie de leur intérêt).

La première question de cet exercice est cependant une exception notable à ce principe de finitude, même si le théorème de Bolzano-Weierstraß joue souvent le même rôle. Noter sa commodité pour « forcer » des suites à converger quand on en a besoin.

**Exercice 24.**

1. (🗎) Raisonnement analogue à celui de l'exercice 17. Noter que par un passage à la limite adéquat, $f$ est aussi lipschitzienne.
2. Soit $[\alpha, \beta] \subseteq ]a, b[$. Utiliser le théorème des pentes croissantes pour montrer qu'on peut se ramener au cas précédent. D'abord vérifier qu'aux extrémités de l'intervalle, $\left(\frac{f_n(\alpha') - f_n(\alpha)}{\alpha' - \alpha}\right)_{n \geqslant 0}$ et $\left(\frac{f_n(\beta') - f_n(\beta)}{\beta' - \beta}\right)_{n \geqslant 0}$ convergent pour $\alpha'$ et $\beta'$ bien choisis (afin d'obtenir la constante $k$).

**Commentaires.** Lorsqu'un exercice nous dit que sous certaines hypothèses, l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » est correcte, cela part souvent du même principe : on utilise la convergence simple en un nombre FINI de points $a_i$, de sorte que $|f(a_i) - f_n(a_i)| \leqslant \varepsilon$ soit petit simultanément (i.e. pour tout $i$ et pour tout $n$ au-delà d'un rang commun à tous les indices $i$). Une hypothèse de l'énoncé nous assure alors qu'entre deux $a_i$ et $a_{i+1}$, la différence reste « petite ». Voir les exercices 17 et 23. On peut trouver d'autres hypothèses (voir les exercices 27, 28 et 29), mais le principe reste le même (se ramener à la convergence simple en un nombre fini de points). Il en est question dans *Méthodes*, section *Montrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions abstraite.*

Notons enfin le rôle du segment dans tous ces exercices. C'est lui qui permet de se ramener à un nombre fini de points. C'est une idée importante qui réapparaîtra lorsque nous manipulerons des ensembles *compacts* (et c'est ce qui fait une grande partie de leur intérêt).

## Propriétés préservées par passage à la limite

**Exercice 25.** Il est raisonnable de conjecturer que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ convergent respectivement vers le maximum et le minimum de $f$. Attention cependant car les extremums peuvent être atteints en plusieurs points simultanément : cela veut dire que si $x_n$ est un point quelconque tel que $f(x_n) = u_n$, espérer que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge est illusoire (imaginez qu'il oscille entre le plus petit et le plus grand point où le maximum est atteint). C'est ce qui complique le raisonnement.

Néanmoins on peut raisonner sur une suite extraite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$ (pourquoi ?). Vérifier que si $\ell$ est sa limite, alors $f(\ell) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ (passer à la limite dans l'inégalité $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geqslant f_{\varphi(n)}(x)$, en notant bien qu'il n'est pas tout à fait trivial que le majorant tend vers $f(\ell)$ : voir l'exercice 21). Cela montre que $f$ atteint son maximum en $\ell$. Montrer ensuite que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers $f(\ell)$ grâce au fait que ce soit une suite bornée (pourquoi ?) avec une unique valeur d'adhérence (pourquoi ?). De même pour $(v_n)_{n \geqslant 0}$.

**Commentaires.** L'usage du théorème de Bolzano-Weierstaß dans cet exercice est typique, et explique pourquoi ce théorème est si sympathique : il permet de « forcer » la convergence d'une suite, quand il nous arrangerait bien qu'elle soit convergente. Cela a cependant un prix : on passe par une suite extraite.

Souvent, ce n'est pas bien grave, parce qu'on a seulement besoin *d'une* suite vérifiant une certaine propriété et qui converge, peu importe laquelle. Ici c'est plus gênant parce qu'on veut vraiment que ce soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ qui converge : pour ce faire, il est très utile de savoir démontrer qu'une suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence (les valeurs d'adhérence étant les limites des sous-suites extraites convergentes), est toujours convergente. Cela utilise un raisonnement par l'absurde et (encore !) le théorème de Bolzano-Weierstraß.

★ **Exercice 26.** Montrer que $\|P_m - P_n\|_\infty \leqslant 1$ pour tous $n$ et $m$ assez grands. En déduire que $P_m - P_n$ est un polynôme constant pour tous $n$ et $m$ assez grand, et que cela définit une suite constante $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ convergente. Il suffit alors de passer à la limite convenablement dans l'égalité $P_m = P_n + \alpha_n$.

> **Commentaires.** Cet exercice donne une autre illustration des suites de Cauchy, lorsqu'on sait pourtant déjà qu'une suite converge : pour avoir un contrôle sur $|\ell - u_n|$ à l'aide d'un contrôle sur $|u_{n+p} - u_n|$. C'est ainsi que l'on peut avoir l'estimation $|\ell - u_n| = \underset{n\to+\infty}{O}(k^n)$ dans la démonstration du théorème de Banach-Picard, ou que l'on montre qu'une suite de *fonctions* de Cauchy converge. Ici : on tire plus d'informations d'une majoration de $\|P_{n+p} - P_n\|_\infty$ que de $\|f - P_n\|_\infty$, du fait qu'une application polynomiale ne soit que rarement bornée sur $\mathbb{R}$.
>
> Cet exercice permet de comprendre pourquoi l'hypothèse du théorème de Weierstraß (segment) est absolument essentielle.

**Exercice 27.** (🗎) Se souvenir qu'un polynôme de degré au plus $p$ est caractérisé par $p+1$ de diverses manières : par $p+1$ coefficients, ou par ses valeurs en $p+1$ évaluations, ou par la valeur de ses $p+1$ dérivées successives en un point, etc. Parmi toutes ces données qui caractérisent, se demander lesquelles se comportent le mieux par passage à la limite, et comment les $P_n$ s'expriment à l'aide de ces données. C'est ainsi qu'on arrivera à démontrer que $f$ est polynomiale par passage à la limite.

> **Commentaires.** Il faut connaître toutes les façons de caractériser un polynôme de degré borné par un nombre fini de données, dont la pertinence dépend du problème en présence.
>
> Ce résultat est à lire en parallèle de toutes les démonstrations que vous croiserez du théorème de Weierstraß, où les polynômes construits sont de degré de plus en plus élevé. C'est une nécessité, et c'est raccord avec les quelques identités que vous connaissez : $\frac{1}{1-x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, etc.

**Exercice 28.** (🗎) Même principe que dans l'exercice précédent.

> **Commentaires.** Il faut connaître toutes les façons de caractériser un polynôme de degré borné par un nombre fini de données, dont la pertinence dépend du problème en présence.
>
> On illustre là encore en quoi l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » nécessite souvent de se ramener à un nombre FINI de points. C'est plus facile pour les polynômes que les applications quelconques, suivant la remarque ci-dessus.
>
> Ce résultat est à lire en parallèle de toutes les démonstrations que vous croiserez du théorème de Weierstraß, où les polynômes construits sont de degré de plus en plus élevé. C'est une nécessité, et c'est raccord avec les quelques identités que vous connaissez : $\frac{1}{1-x} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, etc.

☢ **Exercice 29.** (🗎) **(Une généralisation de l'exercice précédent)** C'est le même principe que dans l'exercice précédent : montrer qu'il suffit d'un nombre fini de données pour caractériser une fonction dans $E$. C'est la partie difficile de l'exercice.

Considérer une base $(g_1, \dots, g_d)$ de $E$. Montrer par récurrence l'existence de réels $x_1, \dots, x_d$ tels que $\det\Big(\big(g_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}\Big) \neq 0$ (dans l'hérédité, vous aurez à développer par rapport à une colonne ce déterminant, avec d'abord un $x_{d+1}$ quelconque, afin d'écrire ce déterminant comme une combinaison linéaire des $g_i(x_{d+1})$ ; utiliser le fait qu'ils soient supposés libres pour montrer que le déterminant doit être non nul). Exprimer les fonctions $f_n$ dans la base $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ ainsi : $f_n = \sum\limits_{i=1}^{d} a_{n,i} g_i$. Si l'on montre que chaque suite de coordonnées $(a_{n,i})_{n\geqslant 0}$ converge, c'est gagné. Pour cela, évaluer en les $x_1, \dots, x_d$, et inverser le système (c'est là que le résultat sur le déterminant intervient) pour exprimer les $a_{n,i}$ en fonction des $f_n$. Conclure.

> **Commentaires.** On illustre là encore en quoi l'implication « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence uniforme » nécessite souvent de se ramener à un nombre FINI de points (c'est raisonnable d'espérer une telle chose grâce à l'hypothèse dimensionnelle, qui est là pour permettre de la finitude). L'immense difficulté, ici, est de comprendre comment fabriquer les points auxquels il suffit de se ramener. En cela, savoir démontrer l'existence de réels $x_1, \dots, x_p$ tels que $\det\Big(\big(g_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\Big) \neq 0$ est très utile.
>
> Pour l'idée d'inverser le système pour obtenir la convergence des $(a_{n,i})_{n\geqslant 0}$ : il n'y a rien de très sorcier si l'on met en parallèle ce que l'on SAIT (la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$) et ce qu'on VEUT (la convergence de $(a_{n,i})_{n\geqslant 0}$ pour tout $i$). On se demande alors comment relier ce qu'on veut à ce qu'on sait, et cela revient à inverser le système.

**Exercice 30.** Même approche que la démonstration qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

> **Commentaires.** Toujours bien analyser ce qui est « petit » par hypothèse, pour savoir à quoi se ramener *via* l'inégalité triangulaire.

## Classement des exercices par thèmes

| | |
|---|---|
| **CVU d'une suite abstraite** | 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 27, 28, 29 |
| **CVU d'une suite définie par récurrence** | 13, 14 |
| **CVU d'une suite explicite** | 9, 10, 15 |
| **CVS + (H) implique CVU** | 17, 23, 24, 27, 28, 29 |
| **« Différences petites »** | 9, 4, 6, 10, 15, 17, 18, 19, 24 |
| **Lien suite-série** | 2, 3, 13 |
| **Quasi-démonstration du cours** | 2, 4, 13, 30 |
| **Rôle du segment ou du compact** | 17, 23, 24, 25, 27, 28 |
| **Suites de Cauchy** | 1, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 26 |
| **Théorème de Bolzano-Weierstraß** | 22, 23, 25 |
| **Théorème de Heine** | 17, 23 |
| **Uniforme continuité** | 8, 17, 18, 19, 23 |
| **Utilisation de la CVU** | 11, 14, 16, 21, 25 |