Exercices du chapitre préliminaire (Convergence des suites numériques et de fonctions)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Lien suite-série et suites de Cauchy

Exercice 1. Soit $\sigma : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une bijection. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $\gamma_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \gamma_\alpha + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$.

Exercice 3. (Interpolation de la factorielle sur $\mathbb{R}_+^*$) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \dfrac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}$.

1. Par un usage adéquat du lien suite-série, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 0}$ converge vers un réel strictement positif, que l'on notera $f(x)$.
2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x+1) = x f(x)$. En déduire la valeur de $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On pourra faire le lien avec l'exercice 40 du chapitre I.

Exercice 4. (Convergence d'un produit) Soit $(p_n)_{n \geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\prod_{n \geqslant 0} p_n$ la suite $\left(\prod_{n=0}^{N} p_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$, et on dit que le produit $\prod_{n \geqslant 0} p_n$ *converge* si la suite $\left(\prod_{n=0}^{N} p_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge (ce n'est pas la seule définition d'un produit convergent qu'on puisse croiser).

1. Montrer que si le produit $\prod_{n \geqslant 0} p_n$ converge vers une limite non nulle, alors la suite $(p_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 1.

La question précédente motive qu'on préfère étudier un produit $\prod_{n \geqslant 0} p_n$ sous la forme : $\prod_{n \geqslant 0} (1+u_n)$, avec $u_n = p_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($(u_n)_{n \geqslant 0}$ doit donc converger vers 0 si l'on espère que le produit converge vers une limite non nulle).

2. Montrer : $\forall (N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$, $\left| \prod_{n=N_1}^{N_1+N_2} (1+u_n) - 1 \right| \leqslant \prod_{n=N_1}^{N_1+N_2} (1+|u_n|) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{n=N_1}^{N_1+N_2} |u_n|\right) - 1$.
3. En déduire que si la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge absolument, alors le produit $\prod_{n \geqslant 0} (1+u_n)$ converge.

Exercice 5. (Critère de Cauchy) Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une application définie sur un intervalle I. Soit $a \in \mathbb{R}$ une extrémité de I. On suppose :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ \left(|x-a| < \eta \text{ et } |y-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\right).$$

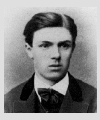
Montrer que la limite de f en a existe et est finie.

Exercice 6. (Le vrai théorème de la limite de la dérivée) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $f :]a,b] \to \mathbb{C}$ une application dérivable sur $]a,b]$, telle que $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell$ existe et soit finie. L'objectif est de démontrer que :

- l'application f se prolonge en une application continue $\tilde{f}$ sur $[a,b]$;
- l'application $\tilde{f}$ est dérivable en a, et on a : $\tilde{f}'(a) = \ell$ (en particulier $\tilde{f}'$ est continue en a).

Si f est définie et continue en a, alors le théorème découle facilement de l'(in)égalité des accroissements finis. La subtilité, ici, vient du fait que f n'est pas définie en a.

1. Montrer qu'il existe $h > 0$ et $M > 0$ tels que : $\forall (x,y) \in]a, a+h[$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$.
2. En déduire que : $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et est finie.
3. Soit $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{C}$ l'application définie par : $\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, et : $\forall x \in]a,b]$, $\tilde{f}(x) = f(x)$. Montrer que $\tilde{f}$ est continue en a.
4. Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{x-a}$, et conclure.


1860-1934

☢ **Exercice 7. (Nombre de rotation de Poincaré)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et croissante telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $f(x+1) = f(x)+1$. L'objectif de l'exercice est de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n(x))_{n\geqslant 0} = \left(\dfrac{f^n(x)}{n}\right)_{n\geqslant 0}$ admet une limite finie ℓ indépendante de x.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^n(x) - f^n(y)| \leqslant k$. Qu'en déduire ?
2. Montrer : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $f^n(0) + f^m(0) - 1 \leqslant f^{n+m}(0) \leqslant f^n(0) + f^m(0) + 1$.
3. En déduire que la suite $(u_n(0))_{n\geqslant 0}$ converge et vérifier que sa limite ℓ appartient à $[f(0)-1, f(0)+1]$. Conclure.

Exercice 8. (Prolongement des fonctions uniformément continues) Soient A une partie dense de $\mathbb{R}$, et $f : A \to \mathbb{C}$ une application uniformément continue sur A. C'est-à-dire, comme dans le cas d'un intervalle :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in A^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

On veut montrer qu'il existe une unique application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et telle que : $g_{|A} = f$.

1. Montrer l'unicité.
2. Pour l'existence : soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de A qui converge vers x (il en existe par densité). Montrer que $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge.
3. Montrer que si on prend deux suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ de A qui convergent vers x, alors les limites de $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ et $(f(y_n))_{n\geqslant 0}$ (qui existent d'après la question précédente) sont égales. On pose alors $g(x)$ cette seule limite candidate, et cela définit une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
4. Montrer que la restriction de g à A est f, et que g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On pourra reprendre cet exercice en remplaçant l'uniforme continuité par la propriété que f est k-lipschitzienne, et démontrer que g l'est aussi.

Convergence des suites de fonctions : mise en pratique

✓ **Exercice 9.** Pour chacune des suites de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ suivantes, étudier la convergence simple et uniforme (si la convergence uniforme n'est pas vérifiée sur tout l'intervalle de définition, l'étudier sur des segments) :

(a) $f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx}{1+n^3x^2} \end{cases}$, (b) $f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-\frac{x}{n}} \end{cases}$, (c) $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{nx^2e^{-nx}}{1-e^{-x^2}} \end{cases}$

(d) $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right) \end{cases}$, (e) $f_n : \begin{cases}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(\sin(nx))^2}{n\sin(x)} \end{cases}$ (f) $f_n : \begin{cases} [0,2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & nx(1-x)^n \end{cases}$.

✓ **Exercice 10.** Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$, puis sur des segments, de la suite de fonctions suivante : $\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \end{cases}\right)_{n\geqslant 1}$.

✓ **Exercice 11.** Sans calculer de norme infinie, contredire la convergence uniforme des suites $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de termes généraux :

(a) $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^n}{1+x^{2n}} \end{cases}$, (b) $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^n-1}{x^n+1} \end{cases}$.

Exercice 12. (Fonction discontinue en tout réel, obtenue à l'aide de limites simples de fonctions continues) Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_{m,n}(x) = (\cos(n!\pi x))^{2m}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ au-delà d'un certain rang $N(x)$, la suite $(f_{m,n}(x))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une quantité $g_n(x)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(g_n(x))_{n\geqslant N(x)}$ converge vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 13. On définit une suite de fonctions $(f_n : [0,2] \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ par récurrence, en posant : $\forall x \in [0,2]$, $f_0(x) = x$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,2]$, $f_{n+1}(x) = \sqrt{f_n(x)+2}$. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,2]$ de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 14. Soit $f : \left[0,\frac{1}{2}\right] \to \left[0,\frac{1}{2}\right]$ l'application définie par : $\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x(1-x)$. On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence en posant : $f_0 = f$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

✓ **Exercice 15.** Pour tout $n \geqslant 1$, on définit : $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{cases}$. Étudier la convergence sur $\mathbb{R}$ des suites $(f_n)_{n \geqslant 1}$ et $(f'_n)_{n \geqslant 1}$. Que remarque-t-on ?

Convergence uniforme : fonctions abstraites

Exercice 16. Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle I.

1. Montrer que si $f_n(x) \in \{0,1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, alors la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est stationnaire.
2. Et si la convergence n'est pas uniforme, mais simple ?

☢ **Exercice 17.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $(f_n : [a, b] \to \mathbb{C})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. On suppose qu'elle converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue, et que : $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f'_n\|_\infty \leqslant M$. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 18.

1. Soit $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions. On suppose que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(\cos \circ f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Généraliser, en remplaçant cos par une application g uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
3. Trouver un contre-exemple lorsque g est seulement supposée continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Soit $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions. On suppose qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $(f_n \circ f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f \circ f$, mais que la convergence n'est pas nécessairement uniforme.
2. Montrer que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors la convergence est uniforme.
3. Trouver un exemple de suite $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \geqslant 0}$ convergeant simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, mais telle que $(f_n \circ f_n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f \circ f$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose : $f(0) = 0$, et : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Montrer que la suite de fonctions $\left(g_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(nx) f\left(\frac{x}{n}\right) \end{cases} \right)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

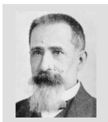
Exercice 21.

1. Soient $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur un intervalle I vers une fonction f, et $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite à valeurs réelles convergeant vers un réel ℓ appartenant à I. Montrer que la suite $(f_n(u_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers $f(\ell)$.
2. Montrer que le résultat peut être faux si la convergence est seulement simple.
3. Application. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note x_n l'unique solution *strictement positive* de l'équation $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k = 1$ d'inconnue x. Après avoir montré que $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est bien définie, et convergente, montrer que sa limite ℓ vérifie : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ell^k = 1$. En déduire la valeur de ℓ.

☢ **Exercice 22.** Soit $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions telle que, pour toute suite convergente $(u_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs dans $[0,1]$, la suite $(f_n(u_n))_{n \geqslant 0}$ converge.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.
2. Montrer que f est une application continue.
3. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

On a établi une sorte de réciproque de l'exercice précédent.


1845-1918

★ **Exercice 23. (Théorèmes de Dini)** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $(f_n : [a, b] \to \mathbb{R})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f également continue sur $[a, b]$.

1. Uniquement dans cette question, on fait l'hypothèse supplémentaire que la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$.
2. Uniquement dans cette question, on fait l'hypothèse supplémentaire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante sur $[a, b]$. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 24. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, qui converge simplement sur $[a,b]$.

1. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n soit k-lipschitzienne. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$.
2. On suppose à présent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est convexe sur $]a,b[$. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]a,b[$.

Notez bien que certains de ces résultats théoriques (surtout les théorèmes de Dini), si vous savez les démontrer rapidement, peuvent aussi vous servir en pratique. Prenez le temps de consulter les exercices pratiques dont les suites de fonctions vérifient les hypothèses ci-dessus.

Propriétés préservées par passage à la limite

Exercice 25. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \max\limits_{[a,b]} f_n$, et : $v_n = \min\limits_{[a,b]} f_n$. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$.

Les résultats des trois exercices suivants sont à méditer en parallèle du théorème de Weierstraß, que nous verrons et démontrerons dans le chapitre I.

★ **Exercice 26.** Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une application polynomiale.

Exercice 27. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. On suppose que la suite $(\deg(P_n))_{n\geqslant 0}$ est bornée par un entier p. Montrer que f est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à p.

Exercice 28. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications polynomiales qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. On suppose que la suite $(\deg(P_n))_{n\geqslant 0}$ est bornée par un entier p. Montrer que f est une application polynomiale de degré inférieur ou égal à p, et que la convergence de $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est uniforme.

☢ **Exercice 29. (Une généralisation de l'exercice précédent)** Soit E un sous-espace vectoriel réel de $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de dimension finie, et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans E qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f. Montrer que f appartient à E et que la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est uniforme.

Exercice 30. Soit $(f_n : I \to \mathbb{C})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions uniformément continues sur un intervalle I non réduit à un point. On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction f. Montrer que f est uniformément continue sur I.