Exercices du chapitre XIII (Calcul différentiel) – Indications

Continuité, différentiabilité, classe C^k

✓ **Exercice 1.** Étudier la continuité en (0,0) des fonctions suivantes : **(Indications à venir)**

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2(\sin(y))^2}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases},$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{(1+x^2+y^2)\operatorname{sh}(y)}{y} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x^y & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Commentaires.

★ **Exercice 2.** (📄) S'il n'y avait qu'une seule variable x en jeu, que pourriez-vous dire de la continuité de f en l'origine ? Conjecturer qu'il en est de même avec deux variables. Démontrer votre conjecture *via* le théorème des gendarmes pour le cas continu (l'expression de f incite à majorer par des quantités dépendant de normes de (x,y)), et par l'introduction de deux suites convergeant vers (0,0) mais dont les images par f ont une limite différente, pour le cas discontinu. Voir *Méthodes*, *Comment calculer une limite : cas problématiques sur* $\mathbb{R}^p$, si besoin.

Commentaires.

★ **Exercice 3.** Écrire $f(x)-f(y)$ sous la forme $f(x)-f(y)=(x-y)\bigstar$ grâce à une formule de Taylor, de sorte à éliminer le quotient par $x-y$ dans l'expression de $g(x,y)$ pour $x\neq y$. La formule de Taylor doit être bien choisie, de sorte que la continuité de $(x,y)\mapsto\bigstar$ soit effectivement vérifiable. Le reste n'est alors que routine.

Commentaires.

✓ **Exercice 4.** (📄) Voir le document *Méthodes*, *Montrer la classe* C^1 *d'une fonction de plusieurs variables*. À noter que l'inégalité des accroissements finis majore inefficacement $|\cos(u)-1|$. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, ou la relation $\cos(u)-1=-2\left(\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2$, permet d'en déduire une bien meilleure majoration quand u est près de 0.

Commentaires.

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction définie par $g:(x_1,\dots,x_n)\mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t,x_1t+x_2t^2+\cdots+x_nt^n)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles. **(Indications à venir)**

Commentaires.

Exercice 6. Soient $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application continue et $f:(x,y)\mapsto\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^y\varphi(u,v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle en tout point. **(Indications à venir)**

Commentaires.

✓ **Exercice 7.** Reconnaître une composition d'applications usuellement différentiables.

Commentaires.

★ **Exercice 8. (Différentielle de l'inverse)** La première partie de la question est du cours. Pour la différentiabilité de f, il y a plusieurs approches. Elles ont toutes en commun de se ramener à une étude en la matrice identité.

Première approche. D'abord se ramener à un calcul des dérivées partielles en la matrice identité (on note $E_{i,j}$ les matrices de la base « canonique » de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$). Remarquer que $\mathrm{I}_n+tE_{i,j}$ a un inverse extrêmement simple, ce qui rend relativement direct le calcul de $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\mathrm{I}_n+tE_{i,j})^{-1}-\mathrm{I}_n^{-1}\right)$. En déduire $\mathrm{d}f(\mathrm{I}_n)H$, puis $\mathrm{d}f(M)H$ en exprimant $f(M+H)$ en fonction de $f(\mathrm{I}_n+\bigstar)$.

Noter que cette approche nécessite de savoir justifier *a priori* que f est différentiable (pourquoi ?). Reconnaître en f une fonction qui, composante par composante, s'exprime à l'aide de fonctions usuellement de classe C^1.

Deuxième approche. Se ramener à un développement en série que vous connaissez bien et s'inspirer de l'exercice 10 ; sachant que, dans le cas présent, la série est suffisamment simple pour que vous puissiez obtenir le $\underset{H\to 0}{o}(\|H\|)$ par un calcul direct de la somme indexée par les entiers $k\geqslant 2$.

Troisième approche. Même idée que dans la seconde approche, mais en tronquant la somme à laquelle vous voulez vous ramener après $k=1$ (parce qu'au fond, les termes suivants ne nous intéressent pas). C'est-à-dire : utiliser le calcul de $(\mathrm{I}_n+A)(\mathrm{I}_n-A)$ pour en déduire : $f(\mathrm{I}_n+A)\approx \mathrm{I}_n-A$, en montrant que le terme correctif est négligeable devant $\|A\|$. Se ramener au cas précédent pour le calcul de $f(M+H)$ en factorisant convenablement.

Dans chaque approche, vous devez savoir estimer la norme d'un produit de matrices. Bien choisir la norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à cet effet.

Commentaires.

☢ **Exercice 9.**

1. Calculer la différentielle composante par composante en remarquant des compositions de fonctions usuellement différentiables. Grâce aux propriétés de la trace, vous pouvez simplifier la composante de chaque différentielle obtenue.
2. Grâce au calcul précédent, vous pouvez lier le noyau de $\mathrm{d}f(M)$ à l'espace vectoriel $\mathbb{R}[M]$ (se souvenir que la trace décrit le produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$!), dont on sait que sa dimension est liée au degré du polynôme minimal. Conclure.
3. Si M vérifie $\pi_M=\chi_M$, alors $\mathrm{d}f(M)$ est de rang maximal n par la question précédente ; utiliser la caractérisation du rang par les mineurs pour montrer que pour toute matrice N au voisinage de M, la différentielle $\mathrm{d}f(N)$ reste de même rang (s'inspirer si besoin de l'exercice 56 du chapitre VI). Conclure.

Commentaires.

Exercice 10.

1. Il faut montrer qu'on a une égalité de la forme : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kH^k=a_0+\varphi(H)+\underset{H\to 0}{o}(\|H\|)$ avec φ linéaire. Un terme linéaire en H provient naturellement de la somme de série entière : montrer que tout le reste est dominé par $\|H\|^2$. Introduire une norme adaptée à la majoration de puissances de matrices. Se souvenir du lemme d'Abel ou de la définition du rayon de convergence pour majorer les a_k. Des majorations vous mèneront alors à une quantité de la forme $\bigstar\times\frac{\|H\|^2}{\spadesuit}$, où $\bigstar$ ne dépend pas de H et $\spadesuit$ tend vers une limite finie non nulle quand H tend vers zéro. Conclure.
2. Utiliser la question précédente.

Commentaires.

Exercice 11. (Théorème de différentiation terme à terme)

1. Il suffit d'imiter pas à pas la démonstration faite dans le cas réel. On a besoin de généraliser le théorème d'intégration terme à terme sur les segments : pas gênant, puisque la démonstration de ce théorème n'utilisait que la croissance de l'intégrale. Bien choisir la norme sur $\mathrm{L}(E,F)$ (il y a équivalence des normes) pour majorer $\|\mathrm{d}f(\bigstar)-g(\bigstar)\|$ à l'aide de $\|\mathrm{d}f_k-g\|_\infty$. Attention : l'intégration nécessite *a priori* que le segment sur lequel on intègre ne sorte pas de U : vous aurez à vous placer sur des compacts adaptés.
2. Utiliser la question précédente et le développement en série de l'exponentielle. On montre la convergence uniforme de la série des dérivées de la même manière que dans la démonstration de la continuité de l'exponentielle matricielle au chapitre VII. Pour la classe C^1 des sommes partielles : reconnaître des sommes de compositions de fonctions usuellement de classe C^1.

Commentaires.

★ **Exercice 12. (Fonctions holomorphes et conditions de Cauchy-Riemann)** On rappelle que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-

espace vectoriel. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application différentiable sur $\mathbb{C}$. On définit deux applications sur $\mathbb{R}^2$ par $P : (x, y) \mapsto \mathrm{Re}(f(x + iy))$ et $Q : (x, y) \mapsto \mathrm{Im}(f(x + iy))$. **(Indications à venir)**

1. Justifier que P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $g(1)$ et $g(i)$ pour que g soit $\mathbb{C}$-linéaire.
3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a : $\partial_1 P(z_0) = \partial_2 Q(z_0)$, et : $\partial_2 P(z_0) = -\partial_1 Q(z_0)$, si et seulement si f est dérivable au sens complexe en z_0 (c'est-à-dire : $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe et est finie).
4. Montrer que les applications $|\cdot|^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ne sont holomorphes en aucun point de $\mathbb{C}$.

Commentaires.

Exercice 13. (Un sandwich) **(Indications à venir)**

1. Encadrer $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \mathrm{d}m(\vec{a}) \cdot \vec{h}$ grâce à l'hypothèse de l'énoncé (noter que $f(\vec{a})$ peut s'écrire autrement, ce qui évite d'être embarrassé en voulant soustraire des inégalités) pour montrer que c'est négligeable devant $\|\vec{h}\|$.
2. Le faire pour $n = 2$.
   Obtenir le cas général soit par récurrence, soit en adaptant ce qui précède.
   En déduire que si $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ sont des applications différentiables sur U, et si $\vec{a}$ est un minimum local de $f = \min(f_1, \dots, f_n)$, alors f est différentiable en $\vec{a}$.

Commentaires.

Exercice 14. (Différentiabilité de la distance à un convexe fermé) On suppose : $E = \mathbb{R}^n$. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$. **(Indications à venir)**

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application 1-lipschitzienne. On suppose qu'il existe un segment $[\vec{a}, \vec{b}] \subseteq U$ tel que : $\|f(\vec{b}) - f(\vec{a})\| = \|\vec{b} - \vec{a}\|$. Montrer que f est différentiable en tout point de $[\vec{a}, \vec{b}] \setminus \{\vec{a}, \vec{b}\}$. *On utilisera l'exercice 13.*
2. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto \mathrm{d}(\vec{x}, C)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Commentaires.

Exercice 15. Étudier les dérivées partielles de chaque composante du gradient dans une base orthonormée. Vous identifierez peut-être mieux la différentielle du gradient en écrivant sa matrice jacobienne.

Commentaires.

Exercice 16. (La vraie définition de la classe C^2) Soit $f : U \to F$ une application différentiable. On suppose que $\mathrm{d}f$ est différentiable sur U et que sa différentielle, notée plus sobrement $\mathrm{d}^2 f : U \to \mathrm{L}(\mathrm{L}(E, F), F)$, est continue sur U. Montrer que f est de classe C^2 sur U. **(Indications à venir)**

Commentaires.

Exercice 17. **(Indications à venir)** **(Contre-exemples au théorème de Schwarz)**

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$, puis montrer : $\partial_{1,2} f(0,0) \neq \partial_{2,1} f(0,0)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en $(0,0)$, et comparer $\partial_{1,2} f(0,0)$ et $\partial_{2,1} f(0,0)$.

Commentaires.

Exercice 18. (Différentielle de l'exponentielle matricielle)

1. Utiliser l'indication. Noter qu'on compose une fonction vectorielle dérivable avec une application bilinéaire. Reconnaître la même équation différentielle que celle vérifiée par $t \mapsto \exp(t\mathrm{Ad}_X)(H)$. Conclure en comparant les valeurs en $t = 0$.

2. Obtenir $g'(t)$ en dérivant partiellement deux fois f, puis en utilisant le théorème de Schwarz. Utiliser le résultat de la question précédente pour en déduire que g' est une exponentielle d'endomorphisme (évaluée en une matrice).
3. Noter qu'on sait déjà que exp est différentiable (pourquoi ?). Partant de l'expression de g' obtenue à la question précédente, obtenir g par une intégration terme à terme dûment justifiée. Conclure en prenant une valeur adéquate de t.

Commentaires.

La différentielle conditionne la fonction (la Grande Idée)

Exercice 19. D'abord calculer $f(\vec{0})$ grâce à l'hypothèse et la régularité de f en $\vec{0}$. Ensuite, écrire $f(\vec{h}) = f(\vec{0}) + \mathrm{d}f(\vec{0})\vec{h} + \underset{\vec{h}\to\vec{0}}{o}\left(\|\vec{h}\|\right)$ et s'inspirer de la démonstration du premier lemme du cours pour éliminer le terme $\underset{\vec{h}\to\vec{0}}{o}\left(\|\vec{h}\|\right)$ et montrer que f est égale à sa différentielle en $\vec{0}$.

Commentaires.

★ **Exercice 20. (Théorème des accroissements finis)** Appliquer le théorème des accroissements finis à une application de la variable réelle, en composant f avec un chemin pertinent.

Commentaires.

☢ **Exercice 21. (Indications à venir)** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^2 telle que : $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(\vec{a}) \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Montrer qu'il existe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $f(\vec{x}) = \vec{x}_0 + r(\vec{x})$.

Commentaires.

☢ **Exercice 22. (Indications à venir)** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 telle que : $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $J_f(\vec{a}) \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathrm{A}(\mathbb{R}^n)$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = \vec{x}_0 + A(\vec{x})$.

Commentaires.

✓ **Exercice 23.**

1. Vérifier que $\left|\frac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right| \leqslant 1$ si et seulement si $(x-y)^2 \geqslant 0$, qui est toujours vrai. Le cas d'égalité est pour $x = y$, ce qui permet de constater pour la suite que $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ ne sont pas dérivables en $x = y$ et $y = x$ respectivement (car l'arc sinus n'est pas dérivable en 1 et -1).
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Remarquer que $\nabla(f \pm g)$ se simplifient sur les deux composantes connexes du domaine de classe C^1 de f et de g (qui sont des ouverts). En déduire que $f - g$ ou $f + g$ est constante sur chacune d'entre elles. Trouver la valeur de ces deux fonctions par évaluation en des points bien choisis.

Commentaires.

✓ **Exercice 24. (Indications à venir)** Soient A, B et C trois points distincts du plan euclidien. On pose : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Simplifier : $\arccos\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) + \arccos\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) + \arccos\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$.

Commentaires.

Exercice 25. (Une généralisation du théorème de Rolle) S'inspirer de la démonstration vue en 1re année, en montrant qu'il existe un minimum et un maximum de f sur $\mathrm{B}_f(\vec{0},1)$, puis en distinguant selon que ces deux extremums soient sur S ou $\mathrm{B}(\vec{0},1)$.

Commentaires.

★ **Exercice 26.** On sait écrire $f(\vec{x}) - f(\vec{y})$ à l'aide de la différentielle, quitte à introduire un chemin convenable. Prendre ensuite le produit scalaire par $\vec{x}-\vec{y}$ dans cette expression (vous aurez besoin de sa linéarité à droite) et exploiter l'hypothèse.

Pour montrer que $f(E)$ est fermé : si $(f(\vec{x}_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers un vecteur $\vec{y}\in E$, on aimerait affirmer que $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers un vecteur $\vec{x}$ et utiliser la continuité de f (pourquoi est-elle vérifiée ?) pour conclure que $\vec{y}=f(\vec{x})\in f(E)$. Problème : rien n'est moins sûr (par exemple : si $\vec{y}$ est un élément de E ayant au moins deux antécédents par f, chose tout à fait imaginable, alors en prenant pour x_n une suite qui vaut alternativement ces deux antécédents, on a $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$ convergente mais $(x_n)_{n\geqslant 0}$ divergente). Que fait-on habituellement, lorsqu'on aimerait qu'une suite converge et que ce n'est *a priori* pas le cas ? Vérifier que c'est possible ici de recourir à cette idée, en majorant d'abord $\|\vec{x}_n\|$ grâce à l'hypothèse de l'énoncé et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le reste est facile.

Commentaires.

Exercice 27. (Factorisation par les zéros) Une formule du cours vous permet d'écrire $f(\vec{x})-f(\vec{0})$ à l'aide d'une expression qui, convenablement réécrite, fait apparaître une somme ressemblant à celle de l'énoncé (introduire un chemin convenable tel que $\gamma(0)=\vec{0}$, $\gamma(1)=\vec{x}$ et tel que les x_i proviennent de la dérivation de γ). Montrer la classe C^∞ de g_i découle alors de théorèmes du chapitre I.

Commentaires.

Exercice 28. (Dérivations) Grâce à l'exercice 27, écrire $L(f)$ comme combinaison linéaire de $L(\varphi_i)$ où $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ sont n fonctions ne dépendant pas de f. Choisir un vecteur $\vec{v}$ dépendant des valeurs des $L(\varphi_i)$ pour reconnaître $L(f)=\mathrm{d}f(\vec{0})\cdot\vec{v}$ et conclure.

Commentaires.

Exercice 29. (Il n'y a qu'une seule loi de groupe sur $\mathbb{R}$ de classe C^1)

1. Dériver l'égalité $(x*y)*z=x*(y*z)$ par rapport à une variable adéquate (la réécrire à l'aide de f). Poser une valeur de z convenable. Pour la seconde partie de la question : utiliser l'inverse de y. Qu'enseigne l'égalité $y*e=e$ sur la valeur de $\delta_2 f(e,y)$ et $\delta_2(e,e)$? Conclure.
2. Dériver la relation $\varphi(x*y)=\varphi(x)+\varphi(y)$. Noter que la propriété de morphisme de φ impose sa valeur en e.
3. La classe C^1 est immédiate grâce à l'hypothèse sur f. Le signe de $\partial_2 f(t,e)$ étant connu pour tout $t>0$, on en déduit la monotonie de φ puis la bijectivité de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   Montrer l'identité $\varphi(x*y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ en vérifiant qu'une certaine fonction de la variable réelle est de dérivée nulle. C'est une approche relativement commune.
   Conclure que I est un intervalle ouvert non vide et stable par addition, et que ce doit être $\mathbb{R}$.

Commentaires.

Équations aux dérivées partielles

★ **Exercice 30. (Fonctions homogènes)**

1. C'est un calcul facile.
2. Dériver la relation $f(t\vec{x})=t^\alpha f(\vec{x})$.
3. Noter que si l'égalité de la question précédente est vraie, alors une certaine fonction de la variable t est de dérivée nulle donc constante. En prenant une valeur convenable de t, obtenir le résultat.

Commentaires.

★ **Exercice 31.** Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de $F:(r,\theta)\mapsto f(\varphi(r,\theta))$ (ou inversement : le membre de gauche de l'équation vous permettra de décider ce qui est le plus opportun), où φ est la fonction de changement de coordonnées polaires. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur F pour que f soit solution de l'équation aux dérivées partielles. Vous tomberez sur une équation triviale à intégrer selon une variable. En déduire F puis f : cela nécessite d'inverser φ. Avez-vous bien choisi le domaine de définition de φ pour qu'elle soit bijective ? Y réfléchir. Lire si besoin *Méthodes*, *Règle de la chaîne.*

Commentaires.

Exercice 32. **(Indications à venir)** Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$. Déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in U, \quad x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2.$$

On posera : $(u,v) = (x+y, xy)$.

Commentaires.

Exercice 33. **(Indications à venir)** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x) = 0.$$

On introduira une application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant : $\forall (x,y) \in R^2$, $f(x,y) = g(x,y)e^{-y}$, et on posera : $(u,v) = (x+y, x-y)$.

Commentaires.

★ **Exercice 34.** **(Indications à venir)** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

On posera : $(u,v) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$.

Commentaires.

★ **Exercice 35.** **(Équation d'onde)** C'est classique : lire *Méthodes*, *Règle de la chaîne*, si besoin.

Commentaires.

Exercice 36. Chercher à tâtons une fonction φ telle que $F = f \circ \varphi$ vérifie une équation aux dérivées partielles de la forme $\partial_{1,2}F = 0$. Chercher φ aussi simple que possible (changement de variable de la forme $u = x+y$ et $v = \alpha x + \beta y$ avec α et β réels). Une fois α et β déterminés, résoudre $\partial_{1,2}F = 0$ est classique. On en déduit F, puis f.

Commentaires.

Le laplacien d'une fonction réelle de plusieurs variables

✓ **Exercice 37.** **(Laplacien en coordonnées polaires)** Calculer les dérivées partielles secondes de $F = f \circ \Phi$ grâce à la règle de la chaîne. Il n'y a pas de subtilité particulière.

Commentaires.

✓ **Exercice 38.** **(Laplacien en coordonnées sphériques)** Calculer les dérivées partielles secondes de $f = F \circ \varphi^{-1}$ grâce à la règle de la chaîne. Il n'y a pas de subtilité particulière.

Commentaires.

Exercice 39. **(Indications à venir)** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Soient φ une isométrie de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer : $(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi)$, où Δ est définie sur $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par $f \mapsto \operatorname{tr}(H_f)$.

Commentaires.

Exercice 40. **(Indications à venir)** **(Fonctions harmoniques)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et *harmonique*, c'est-à-dire telle que : $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$, $\Delta f(\vec{a}) = \operatorname{tr}(H_f(\vec{a})) = 0$. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par $g : (x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

1. Vérifier que g est aussi harmonique.
2. Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$, et : $\dfrac{\partial h}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$.
   On raisonnera par analyse-synthèse en cherchant une expression intégrale de h en fonction des dérivées de g.

Commentaires.

Exercice 41. (Indications à venir) (Une fonction holomorphe est harmonique) On reprend les définitions des exercices 12 et 40. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^2 et holomorphe. Montrer : $\Delta f = 0$.

Commentaires.

★ **Exercice 42. (Principe du maximum)**

1. Raisonner par l'absurde. Introduire un maximum de f sur $\overline{\mathrm{B}}$ (il en existe). Se ramener au cas où il est dans B. Grâce au cours, on sait que ce maximum s'interprète grâce à une propriété de la matrice hessienne. Quel est le lien entre la matrice hessienne et Δf ? Conclure.
2. Se ramener au cas précédent en introduisant $f_\varepsilon(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \varepsilon\bigstar$, où $\bigstar$ est une fonction très simple de la variable $\vec{x}$ qui va assurer : $\Delta f_\varepsilon > 0$. Faire ensuite tendre ε vers 0. Considérer $-f$ pour avoir l'autre inégalité.

Commentaires.

Problèmes d'extremums, optimisation sous contrainte

★ **Exercice 43. (Indications à venir) (Fonctions coercives)**

1. Soient C une partie fermée et non bornée de E, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que l'on a : $\lim\limits_{\|\vec{x}\|\to+\infty} f_{|C}(\vec{x}) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur C et atteint son minimum.
2. Soient $(E', \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et E un sous-espace vectoriel de E' de dimension finie. Pour tout $\vec{x} \in E'$, montrer qu'il existe $\vec{y} \in E$ tel que : $\mathrm{d}(\vec{x}, E) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.
3. On suppose que pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E', distincts et de même norme, et pour tout $t \in [0,1]$, on a l'inégalité : $\|t\vec{x} + (1-t)\vec{y}\| < t\|\vec{x}\| + (1-t)\|\vec{y}\|$ (on dit alors que la boule fermée unité de $(E', \|\cdot\|)$ est *strictement convexe*). Montrer l'unicité du vecteur $\vec{y}$ de la question précédente.

Commentaires.

★ **Exercice 44. (Indications à venir) (Descente de gradient)** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On suppose l'existence de $\alpha > 0$ tel que : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \geqslant \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{y} - \vec{x}\rangle + \dfrac{\alpha}{2}\|\vec{y} - \vec{x}\|^2$.

1. Montrer que f admet un unique minimum global sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\nabla f(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(\vec{x} + t\nabla f(\vec{x}))$ admet un unique minimum global.

Soit $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence ainsi : on fixe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $\vec{x}_{k+1}$ est le minimum de f restreint à $\vec{x}_k + \mathrm{Vect}(\nabla f(\vec{x}_k))$.

3. Comparer $\nabla f(\vec{x}_k)$ et $\nabla f(\vec{x}_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Étudier la convergence de la suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Commentaires.

✓ **Exercice 45. (Indications à venir)** Déterminer les points critiques et extremums éventuels des applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$:

(a) $f : (x,y) \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$, (b) $g : (x,y) \mapsto x^2 - \cos(y)$
(c) $h : (x,y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \cos(x+y)$, (d) $k : (x,y) \mapsto (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$

Commentaires.

✓ **Exercice 46. (Indications à venir)** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < y < 1\}$. Déterminer les points critiques et extremums éventuels des applications suivantes :

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2} \end{cases}$, (b) $g : \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{xy}{(x+y)(x+1)(y+1)} \end{cases}$,

(c) $h : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (y-x)^3+6xy \end{cases}$, (d) $k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^y+ye^x \end{cases}$.

Commentaires.

Exercice 47. Calculer les dérivées de f et étudier leur lieu d'annulation. Vous aurez besoin de décrire explicitement les points (x,y) du plan vérifiant $x^2+y^2=1$. Calculer $f(0{,}0)$, et en déduire que $f(x,y) \geqslant f(0{,}0)$ pour tout (x,y). Pour les autres points critiques : calculer la dérivée de $g : r \mapsto re^{-r}$, et en déduire le maximum de g sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer f en fonction de g et conclure.

Commentaires.

Exercice 48. **(Indications à venir)** Déterminer les extremums sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ de l'application $f : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{i=1}^n (1+x_i)$.

Commentaires.

✓ **Exercice 49.** **(Indications à venir)** Soient A, B, C trois points du plan, de coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Trouver le point M du plan réalisant le minimum de : $MA^2+MB^2+MC^2$.

Commentaires.

✓ **Exercice 50.** D'abord exprimer simplement l'aire du triangle OMM' à l'aide des coordonnées de M et M' (utiliser le produit vectoriel comme en Physique pour trouver une expression de l'aire qui ne dépende pas d'un angle). Se ramener à une fonction de deux variables en écrivant les ordonnées en fonction des abscisses (utiliser le fait que M et M' soient sur des cercles). On est alors ramené à une recherche d'extremums, sur un compact (lequel ? que représentent les variables ?). La méthode est alors classique.

Commentaires.

✓ **Exercice 51. (Inégalité arithmético-géométrique)** **(Indications à venir)** Soit $s>0$. Étudier le maximum de $f : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ restreint à $\Gamma = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = s \right\}$ et en déduire : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Commentaires.

Exercice 52. (Inégalité de Hadamard)

1. Utiliser le théorème des bornes atteintes, en justifiant que les hypothèses sont vérifiées.
2. Écrire X sous la forme $g^{-1}(\{0\})$ avec g une application différentiable sur $(\mathbb{R}^n)^n$ et conclure en appliquant un théorème du cours : l'aspect unitaire vient de la définition X et l'aspect orthogonal de ce qu'enseigne ce théorème sur $\mathrm{d}f$ ou ∇f. Le fait d'avoir plusieurs conditions dans la définition de X (quantification « $\forall i \in [\![1,n]\!]$ ») va vous embêter pour reconnaître l'énoncé au programme. On peut cependant s'y ramener : en toute généralité, n conditions du type $f_i(\vec{x})=0$ sont équivalentes à *une seule* égalité $\bigstar = 0$, en utilisant ingénieusement le fait qu'une somme de réels positifs soit nulle si et seulement si chaque terme est nul. Comment ?

   Ensuite, le théorème du cours suggéré ci-dessus implique, par n-linéarité de f, une égalité liant f (et non $\mathrm{d}f$) et $\mathrm{d}g$ (qu'on sait calculer). Évaluer cette égalité en des vecteurs convenables pour en déduire que $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$ pour i et j distincts.
3. Noter que l'on connaît la valeur de f en une base orthonormée : cela donne la valeur du maximum de f grâce à la question précédente. En écrivant l'inégalité $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \leqslant \max(f)$ pour $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ orthonormée, et en se

ramenant à ce cas-là quitte à renormaliser, obtenir une majoration valable pour $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ quelconque. Le cas d'égalité s'obtient soit à une condition triviale sur les $\vec{x}_i$, soit en appliquant encore la question précédente à une famille renormalisée pour bien appartenir à X.

Commentaires.

✓ **Exercice 53. (Indications à venir)**

1. Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 4xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.
2. Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.
3. Déterminer les extremums globaux de $f : (x, y) \mapsto x^3 + 8y^2$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 5$.

Commentaires.

Exercice 54. (Indications à venir) Déterminer les extremums de la restriction de la fonction $f : (x; y; z) \mapsto \frac{x^3}{3} + y + z$ au sous-espace vectoriel décrit par les équations $x + y + z = x - y + z = 0$.

Commentaires.

Exercice 55. (Indications à venir) Déterminer les extremums de $(x, y) \mapsto |\sin(x + iy)|^2$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne usuelle).

Commentaires.

Exercice 56. Remarquer qu'on cherche le minimum de la fonction $(x, y, z) \mapsto 2(xy + xz + yz)$ sur $(\mathbb{R}_+)^3$ sous la contrainte $xyz = 8$. Utiliser le théorème des extremums liés. En déduire que le minimum est atteint en un point tel que $x = y = z$. Conclure.

Commentaires.

Exercice 57. (Indications à venir) Déterminer le volume maximal d'un cylindre inscrit dans une sphère de rayon 1.

Commentaires.

Exercice 58. (Indications à venir) Déterminer le plus court chemin pour aller du pôle Nord au pôle Sud.

Commentaires.

Exercice 59. (Caractérisation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$)

1. Cela revient à calculer la différentielle du déterminant (ou son gradient). Voir le cours.
2. Cela revient à chercher le minimum d'une fonction f sous une contrainte $g(M) = 0$ (d'abord, il faut justifier que la borne inférieure qui apparaît dans l'énoncé est un minimum : reconnaître la distance à un fermé, dont on a montré au chapitre VI qu'elle est toujours atteinte en dimension finie). Utiliser un théorème du cours pour exprimer ∇f en fonction de ∇g. En déduire qu'on est ramené à résoudre : $2A^\top A = \lambda \mathrm{I}_n$. Utiliser le déterminant d'une part, et des propriétés bien connues de la matrice $A^\top A$ d'autre part, pour conclure que A est orthogonale. Conclure.

Commentaires.

Convexité

★ **Exercice 60. (Fonctions convexes)**

1. La convexité de $\|\cdot\|$ est triviale. Reconnaître une composition de fonctions convexes (il faut une hypothèse en plus pour que cela donne une fonction convexe, qui certes est ici vérifiée : attention à ne pas aller trop vite !).
   Autre approche : développer $\|t\vec{x} + (1-t)\vec{y}\|^2 - t\|\vec{x}\|^2 - (1-t)\|\vec{y}\|^2$ et constater que le résultat obtenu est négatif (et même strictement négatif la plupart du temps : la norme au carré est strictement convexe).

2. Écrire $\vec{x}+t\vec{h}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{x}$ et $\vec{x}+\vec{h}$ pour la seconde majoration. La première inégalité nécessite d'être reformulée pour ressembler à l'inégalité de convexité de la définition : isoler de manière appropriée l'un des termes en f pour cela. S'inspirer alors de ce qui a été fait pour l'autre inégalité, afin d'avoir le résultat.

   Autre approche : reconnaître une fonction de la variable réelle convexe sur $[-1,1]$ et lui appliquer le théorème des pentes croissantes (dont nous avons là une généralisation).

3. Il faut utiliser intelligemment la question précédente : n'oubliez pas que la continuité d'une fonction ne se résume pas à vérifier sa continuité selon toutes les directions.

   Soit $\vec{x}$ un point où vous voulez montrer la continuité. Prendre $\vec{y}$ dans un voisinage suffisamment petit de $\vec{x}$ pour que $\vec{y}\in U$ et pour que $\vec{y}$ puisse s'écrire $\vec{y}=\vec{x}+t\vec{h}$ avec $t\in[0,1]$ et $\vec{h}$ unitaire (vous pouvez tout expliciter ici : on en aura besoin). On veut majorer $|f(\vec{y})-f(\vec{x})|=|f(\vec{x}+t\vec{h})-f(\vec{x})|$. Pour cela, utiliser une inégalité de convexité permettant de majorer $f(\vec{x}+t\vec{h})$ par une quantité dépendant uniquement de t et de $f(\vec{x}\pm\vec{e}_i)$ où $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E (il faut donc pouvoir utiliser l'inégalité de convexité avec une somme de n termes : vous savez que c'est possible pour les fonctions de la variable réelle et c'est exactement la même chose ici). Bien choisir la norme sur E de sorte que la normalisation faite pour utiliser l'inégalité de convexité soit totalement indolore (rappelons que $\vec{h}$ est unitaire). En déduire une majoration du type : $|f(\vec{y})-f(\vec{x})|\leqslant M\|\vec{y}-\vec{x}\|$, où M dépend des $f(\vec{x}\pm\vec{e}_i)$. Conclure.

4. Indications pour la première équivalence. Sens direct : introduire une fonction convenable de la variable réelle g qui soit convexe et telle que l'inégalité : $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)\geqslant g(0)+tg'(0)$ (le graphe de g est au-dessus de la tangente en 0) implique l'inégalité voulue pour f. Sens réciproque : appliquer l'inégalité $f(\vec{y})-f(\vec{x})\geqslant \mathrm{d}f(\vec{x})(\vec{y}-\vec{x})$ avec des vecteurs adéquats tels que la différentielle soit nulle, et fournisse une minoration de $tf(\vec{x})+(1-t)f(\vec{y})-f(t\vec{x}+(1-t)\vec{y})$ par 0 (le fait qu'il apparaisse là trois quantités dépendant de f implique naturellement que vous ne pourrez pas appliquer l'inégalité précédente qu'à un seul couple de vecteurs : il faudra l'appliquer à deux couples de vecteurs, et sommer les inégalités).

   Indications pour la seconde équivalence (elle est fausse dans les feuilles d'exercices que je vous ai distribuées, et rectifiée dans la version en ligne). Sens direct : réécrire à l'aide du gradient l'inégalité précédente. Regarder ce que donne l'inégalité quand on échange les rôles de $\vec{x}$ et de $\vec{y}$. L'utiliser pour comparer $\langle\nabla f(\vec{x}),\vec{y}-\vec{x}\rangle$ et $\langle\nabla f(\vec{y}),\vec{y}-\vec{x}\rangle$. Sens réciproque : écrire de manière équivalente cette inégalité avec $\mathrm{d}f$. On note qu'on veut contrôler l'accroissement de f (vu qu'on veut minorer $f(\vec{y})-f(\vec{x})$) à l'aide d'une hypothèse sur la différentielle : une inégalité très classique le permet. Cependant, l'inégalité à laquelle je fais allusion permet de *majorer* l'accroissement et non de le minorer. Comment y remédier ? (Songez à ce que vous fîtes en 1re année pour quelques démonstrations du cours permettant, grâce à une information sur f', de *minorer* $f(y)-f(x)$, notamment en vue d'établir sa monotonie.) Un exercice de ce chapitre le permet.

   S'inspirer si besoin des démonstrations analogues faites en 1re année, qui vous aideront sans doute à voir le sens géométrique de ces inégalités et des indications.

Commentaires.

★ **Exercice 61. (Convexité et classe C^2)**

1. Sens direct : utiliser l'exercice 60, puis la formule de Taylor-Young convenablement, pour passer d'une inégalité vérifiée par $f(\vec{x}+t\vec{h})-f(\vec{x})-t\mathrm{d}f(\vec{x})\vec{h}$ à une inégalité vérifiée par $\left\langle H_f(\vec{x})\vec{h},\vec{h}\right\rangle$. Utiliser une technique déjà apparue dans le cours pour éliminer le terme d'erreur du développement limité. Sens réciproque : utiliser un théorème de Taylor. Celui précédent ne convient pas, car la convexité est une propriété globale alors que le théorème de Taylor-Young donne un comportement local : comment y remédier ?

2. Calculer la différentielle de $X\mapsto X^\top AX$ en reconnaissant une composition d'une application bilinéaire et d'une application linéaire. Conclure grâce à un des critères de convexité de l'exercice 60.

   On peut, en fait, caractériser la stricte convexité de la même manière (il faut et il suffit alors que A soit définie positive).

3. Si vous aviez une fonction de la variable réelle $x\mapsto \frac{ax^2}{2}+bx$, comment auriez-vous pu montrer aisément l'existence d'un minimum, par un argument qualitatif ? (Je ne parle donc pas de calcul de dérivée ni de recours à un résultat de cours sur les extremums des fonctions polynomiales du second degré.) S'inspirer de cet argument pour montrer l'existence d'un minimum. Vous y parviendrez plus facilement si vous constatez que $X\mapsto\sqrt{X^\top AX}$ est une norme.

   Pour l'unicité : montrer que cette application est strictement convexe, et grâce à un résultat de l'exercice 60 montrer que $f(\vec{x})>f(\vec{x}_0)$ pour tout $\vec{x}$ distinct du minimum $\vec{x}_0$ exhibé précédemment.

Commentaires.

Exercice 62. (Exemple de fonction convexe) Utiliser l'égalité $\lambda_{\max}(A)=\sup\limits_{\|X\|=1}X^\top AX$ (faire le lien avec l'exercice

31 ou 32 du chapitre XII) pour montrer que l'épigraphe de $\lambda_{\max}$ est l'intersection d'épigraphes de fonctions convexes et est donc convexe.

Commentaires.

Exercice 63. (Indications à venir) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (voir l'exercice 60 pour une définition de la stricte convexité). On suppose : $\lim\limits_{\|\vec{x}\|\to+\infty} \dfrac{f(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = +\infty$. Montrer que $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une bijection.

Commentaires.