Exercices du chapitre XIII (Calcul différentiel)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Sauf mention explicite du contraire, E et F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie, munis de normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ (ou simplement $\|\cdot\|$ s'il n'y a pas de risque de confusion), et U désigne un ouvert de E.
Lorsqu'on mentionne $\mathbb{R}^n$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

Continuité, différentiabilité, classe C^k

✓ **Exercice 1.** Étudier la continuité en (0,0) des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^2(\sin(y))^2}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases},$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{(1+x^2+y^2)\mathrm{sh}(y)}{y} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}, \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x^y & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

★ **Exercice 2.** Soient $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+$. On définit : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \begin{cases} \dfrac{x^py^q}{(x^2+y^2)^r} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases} \end{cases}$

Étudier la continuité de f en (0,0).

★ **Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R}\to E$ une application de classe C^1. Montrer que $g : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x,x)=f'(x)$ et : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\neq y \Longrightarrow g(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, est continue sur $\mathbb{R}^2$.

✓ **Exercice 4.** Montrer que : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{\cos(2xy)-1}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction définie par $g : (x_1,\dots,x_n)\mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t, x_1t+x_2t^2+\cdots+x_nt^n)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 6. Soient $\varphi : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application continue et $f : (x,y)\mapsto \displaystyle\int_0^x\left(\int_0^y \varphi(u,v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donner sa différentielle en tout point.

✓ **Exercice 7.** Soit $p\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Montrer que l'application $M\mapsto M^p$ est différentiable sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et décrire sa différentielle.

★ **Exercice 8. (Différentielle de l'inverse)** Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et montrer que l'application $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\to\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M\mapsto M^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Décrire sa différentielle.

☢ **Exercice 9.** Pour toute matrice $M\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on pose : $f(M)=\big(\mathrm{tr}(M),\mathrm{tr}(M^2),\dots,\mathrm{tr}(M^n)\big)$.

1. Montrer que f est différentiable et calculer $\mathrm{d}f(M)\cdot H$ pour tout $(M,H)\in(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$.
2. Soit $M\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de $\mathrm{d}f(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
3. Montrer que $\{M\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \pi_M=\chi_M\}$ est une partie ouverte de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Montrer que l'application $M\mapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_kM^k$ est bien définie et différentiable dans un voisinage de la matrice $0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$, et donner sa différentielle en chaque point de ce voisinage.
2. Montrer que l'exponentielle matricielle est différentiable en $0_{\mathrm{M}_p(\mathbb{R})}$ et expliciter sa différentielle.

Exercice 11. (Théorème de différentiation terme à terme)

1. Soit $(f_k : U \to F)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de classe C^1 sur U, convergeant simplement sur U vers une fonction f. On suppose que la suite $(\mathrm{d}f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers une fonction $g : U \to \mathrm{L}(E,F)$. Montrer que f est de classe C^1 sur U et que : $\mathrm{d}f = g$.
2. Montrer que l'exponentielle matricielle est de classe C^1 sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$.

★ **Exercice 12. (Fonctions holomorphes et conditions de Cauchy-Riemann)** On rappelle que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application différentiable sur $\mathbb{C}$. On définit deux applications sur $\mathbb{R}^2$ par $P : (x,y) \mapsto \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $Q : (x,y) \mapsto \mathrm{Im}(f(x+iy))$.

1. Justifier que P et Q sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $g(1)$ et $g(i)$ pour que g soit $\mathbb{C}$-linéaire.
3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que l'on a : $\partial_1 P(z_0) = \partial_2 Q(z_0)$, et : $\partial_2 P(z_0) = -\partial_1 Q(z_0)$, si et seulement si f est dérivable au sens complexe en z_0 (c'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe et est finie).

Si f est dérivable au sens complexe en z_0, on dit aussi que f est *holomorphe* en z_0.

4. Montrer que les applications $|\cdot|^2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ne sont holomorphes en aucun point de $\mathbb{C}$.

Exercice 13. (Un sandwich)

1. Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $\vec{a} \in U$. On suppose l'existence de deux applications $m : U \to \mathbb{R}$ et $M : U \to \mathbb{R}$ différentiables en $\vec{a}$ telles que : $m(\vec{a}) = M(\vec{a})$, et $m(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}) \leqslant M(\vec{x})$ pour tout $\vec{x}$ au voisinage de $\vec{a}$. Montrer que f est différentiable en $\vec{a}$, et que : $\mathrm{d}f(\vec{a}) = \mathrm{d}m(\vec{a}) = \mathrm{d}M(\vec{a})$.
2. En déduire que si $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$ sont des applications différentiables sur U, et si $\vec{a}$ est un minimum local de $f = \min(f_1, \ldots, f_n)$, alors f est différentiable en $\vec{a}$.

Exercice 14. (Différentiabilité de la distance à un convexe fermé) On suppose : $E = \mathbb{R}^n$. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application 1-lipschitzienne. On suppose qu'il existe un segment $[\vec{a}, \vec{b}] \subseteq U$ tel que : $\|f(\vec{b}) - f(\vec{a})\| = \|\vec{b} - \vec{a}\|$. Montrer que f est différentiable en tout point de $[\vec{a}, \vec{b}] \setminus \{\vec{a}, \vec{b}\}$. *On utilisera l'exercice 13.*
2. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto \mathrm{d}(\vec{x}, C)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Exercice 15. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur U. Montrer que le gradient de f est différentiable sur U et calculer sa différentielle.

Exercice 16. (La vraie définition de la classe C^2) Soit $f : U \to F$ une application différentiable. On suppose que $\mathrm{d}f$ est différentiable sur U et que sa différentielle, notée plus sobrement $\mathrm{d}^2 f : U \to \mathrm{L}(E, \mathrm{L}(E,F))$, est continue sur U. Montrer que f est de classe C^2 sur U.

Exercice 17. (Contre-exemples au théorème de Schwarz)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$, puis montrer : $\partial_{1,2} f(0,0) \neq \partial_{2,1} f(0,0)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en $(0,0)$, et comparer $\partial_{1,2} f(0,0)$ et $\partial_{2,1} f(0,0)$.

Le deuxième contre-exemple est dû à Peano.

Exercice 18. (Différentielle de l'exponentielle matricielle) On admet que l'exponentielle matricielle est de classe C^2 sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ (voir l'exercice 11 pour une démonstration de la classe C^1). Pour tout $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note Ad_X l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto XM - MX$.

1. Montrer : $\forall (X,H) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\exp(X) H \exp(-X) = \exp(\mathrm{Ad}_X)(H)$.
   Chercher une équation différentielle vérifiée par la fonction $t \mapsto \exp(tX) H \exp(-tX)$.
2. On fixe $(X,H) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(t,u) \mapsto \exp(-tX)\exp(t(X+uH))$. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \partial_2 f(t,0)$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par g.
3. En déduire : $\displaystyle \mathrm{d}\exp(X)(H) = \exp(X) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(-\mathrm{Ad}_X\right)^k (H)$.

La différentielle conditionne la fonction (la Grande Idée)

Exercice 19. Soit $f : E \to F$ une application différentiable en $\vec{0}$ telle que : $\forall \vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t\vec{x}) = tf(\vec{x})$. Montrer que f est linéaire.

★ **Exercice 20. (Théorème des accroissements finis)** Soit $(\vec{a}, \vec{b}) \in U^2$ tel que : $[\vec{a}, \vec{b}] \subseteq U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur U. Montrer qu'il existe $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]$ tel que : $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \mathrm{d}f(\vec{c})(\vec{b} - \vec{a})$.

☢ **Exercice 21.** On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^2 telle que : $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{d}f(\vec{a}) \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Montrer qu'il existe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $f(\vec{x}) = \vec{x}_0 + r(\vec{x})$.

☢ **Exercice 22.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 telle que : $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $J_f(\vec{a}) \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathrm{A}(\mathbb{R}^n)$ tels que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{x}) = \vec{x}_0 + A(\vec{x})$.

✓ **Exercice 23.** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}\right) \text{ et } g(x, y) = \arctan(x) - \arctan(y).$$

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
3. Simplifier f à l'aide de g.

✓ **Exercice 24.** Soient A, B et C trois points distincts du plan euclidien. On pose : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Simplifier : $\arccos\left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) + \arccos\left(\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) + \arccos\left(\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$.

Exercice 25. (Une généralisation du théorème de Rolle) Soit S la sphère unité de E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application différentiable telle que $f_{|S}$ soit constante. Montrer qu'il existe $\vec{x} \in \mathrm{B}(\vec{0}, 1)$ tel que : $\mathrm{d}f(\vec{x}) = 0$.

★ **Exercice 26.** Supposons $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien. Soient $\alpha > 0$ et $f : E \to E$ une application différentiable sur E telle que pour tout $(\vec{x}, \vec{h}) \in E^2$ on ait : $\left\langle \mathrm{d}f(\vec{x}) \cdot \vec{h}, \vec{h} \right\rangle \geqslant \alpha \|h\|^2$. Montrer : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\langle f(\vec{x}) - f(\vec{y}), \vec{x} - \vec{y} \rangle \geqslant \alpha \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$, puis que $f(E)$ est fermé.

★ **Exercice 27. (Factorisation par les zéros)** Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne usuelle. Soit $f : B \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞ telle que : $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_i : B \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telles que : $\forall \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B$, $f(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i g_i(\vec{x})$.

Exercice 28. (Dérivations) Soit $\mathcal{F}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, définies et de classe C^∞ sur un voisinage de $\vec{0}$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $L : \mathcal{F}^\infty \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que : $L(1) = 0$, et : $\forall (f, g) \in (\mathcal{F}^\infty)^2$, $L(fg) = f(0)L(g) + L(f)g(0)$. Montrer qu'il existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall f \in \mathcal{F}^\infty$, $L(f) = \mathrm{d}f(\vec{0}) \cdot \vec{v}$.

Exercice 29. (Il n'y a qu'une seule loi de groupe sur $\mathbb{R}$ de classe C^1) Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$, dont on note $e \in \mathbb{R}$ l'élément neutre. On suppose que l'application $f : (x, y) \mapsto x * y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2 f(x * y, e) = \partial_2 f(x, y) \cdot \partial_2 f(y, e)$. En déduire : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\partial_2 f(y, e) > 0$.
2. Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = a \displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_2 f(t, e)}$.
3. Réciproquement, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, l'application $\varphi : x \mapsto a \displaystyle\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_2 f(t, e)}$ définit une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'inverse est aussi de classe C^1, et de plus : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Équations aux dérivées partielles

★ **Exercice 30. (Fonctions homogènes)** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On dit que f est *homogène de degré* α si, pour tout $\vec{x} \in U$ et tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $t\vec{x} \in U$, on a : $f(t\vec{x}) = t^\alpha f(\vec{x})$.

1. Ici $n = 2$. Montrer que les applications définies par $f(x, y) = y \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0$) et $g(x, y) = 2x^{3/2}\sqrt{y}$ (pour tous $x, y > 0$) sont homogènes.
2. Soit f homogène de degré α. Montrer que pour tout $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \partial_i f(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$.
3. Établir la réciproque de la question précédente.

★ **Exercice 31.** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

On passera aux coordonnées polaires.

Exercice 32. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$. Déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in U, \quad x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2.$$

On posera : $(u,v) = (x+y, xy)$.

Exercice 33. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x) = 0.$$

On introduira une application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant : $\forall (x,y) \in R^2$, $f(x,y) = g(x,y)e^{-y}$, et on posera : $(u,v) = (x+y, x-y)$.

★ **Exercice 34.** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

On posera : $(u,v) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$.

★ **Exercice 35. (Équation d'onde)** Déterminer les fonctions $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que : $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$. On posera : $(u,v) = (x-ct, x+ct)$.

Exercice 36. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_{1,1} f - 4\partial_{2,1} f + 3\partial_{2,2} f = 0.$$

Le laplacien d'une fonction réelle de plusieurs variables

✓ **Exercice 37. (Laplacien en coordonnées polaires)** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On pose : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, et : $F = f \circ \Phi$. Exprimer ΔF en fonction de Δf, où Δ est définie sur $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par $f \mapsto \mathrm{tr}(H_f)$.

✓ **Exercice 38. (Laplacien en coordonnées sphériques)** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On pose : $\forall (r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3$, $\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, et : $F = f \circ \Phi$. Montrer :

$$(\Delta f) \circ \Phi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan(\varphi)}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2(\cos(\varphi))^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2},$$

où Δ est définie sur $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ par $f \mapsto \mathrm{tr}(H_f)$.

Exercice 39. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Soient φ une isométrie de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Montrer : $(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi)$, où Δ est définie sur $\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ par $f \mapsto \mathrm{tr}(H_f)$.

Exercice 40. (Fonctions harmoniques) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 et *harmonique*, c'est-à-dire telle que : $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$, $\Delta f(\vec{a}) = \mathrm{tr}(H_f(\vec{a})) = 0$. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par $g : (x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

1. Vérifier que g est aussi harmonique.
2. Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$, et : $\dfrac{\partial h}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$.
   On raisonnera par analyse-synthèse en cherchant une expression intégrale de h en fonction des dérivées de g.

Exercice 41. (Une fonction holomorphe est harmonique) On reprend les définitions des exercices 12 et 40. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^2 et holomorphe. Montrer : $\Delta f = 0$.

★ **Exercice 42. (Principe du maximum)** Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On note B la boule unité ouverte de E, et : $\forall \vec{a} \in E$, $\Delta f = \mathrm{tr}(H_f(\vec{a}))$.

1. Montrer que si : $\forall \vec{x} \in \mathrm{B}$, $\Delta f(\vec{x}) > 0$, alors pour tout $\vec{x} \in \mathrm{B}$ on a l'inégalité : $f(\vec{x}) < \max\limits_{\|\vec{y}\|=1} f(\vec{y})$.
2. Montrer que si f est harmonique sur B, c'est-à-dire : $\forall \vec{x} \in \mathrm{B}$, $\Delta f(\vec{x}) = 0$, alors pour tout $\vec{x} \in \mathrm{B}$ on a l'encadrement : $\min\limits_{\|\vec{y}\|=1} f(\vec{y}) \leqslant f(\vec{x}) \leqslant \max\limits_{\|\vec{y}\|=1} f(\vec{y})$.

Problèmes d'extremums, optimisation sous contrainte

★ **Exercice 43. (Fonctions coercives)**

1. Soient C une partie fermée et non bornée de E, et $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que l'on a : $\lim\limits_{\|\vec{x}\| \to +\infty} f_{|C}(\vec{x}) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur C et atteint son minimum.
2. Soient $(E', \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et E un sous-espace vectoriel de E' de dimension finie. Pour tout $\vec{x} \in E'$, montrer qu'il existe $\vec{y} \in E$ tel que : $\mathrm{d}(\vec{x}, E) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.
3. On suppose que pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E', distincts et de même norme, et pour tout $t \in [0,1]$, on a l'inégalité : $\|t\vec{x} + (1-t)\vec{y}\| < t\|\vec{x}\| + (1-t)\|\vec{y}\|$ (on dit alors que la boule fermée unité de $(E', \|\cdot\|)$ est *strictement convexe*). Montrer l'unicité du vecteur $\vec{y}$ de la question précédente.

★ **Exercice 44. (Descente de gradient)** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On suppose l'existence de $\alpha > 0$ tel que : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \geqslant \langle \nabla f(\vec{x}), \vec{y} - \vec{x} \rangle + \dfrac{\alpha}{2}\|\vec{y} - \vec{x}\|^2$.

1. Montrer que f admet un unique minimum global sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\nabla f(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(\vec{x} + t\nabla f(\vec{x}))$ admet un unique minimum global.

Soit $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite définie par récurrence ainsi : on fixe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $\vec{x}_{k+1}$ est le minimum de f restreint à $\vec{x}_k + \mathrm{Vect}(\nabla f(\vec{x}_k))$.

3. Comparer $\nabla f(\vec{x}_k)$ et $\nabla f(\vec{x}_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Étudier la convergence de la suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

✓ **Exercice 45.** Déterminer les points critiques et extremums éventuels des applications suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$:

(a) $f : (x,y) \mapsto 2x^3 - 6xy + 3y^2$, (b) $g : (x,y) \mapsto x^2 - \cos(y)$,
(c) $h : (x,y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \cos(x+y)$, (d) $k : (x,y) \mapsto (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$.

✓ **Exercice 46.** Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < y < 1\right\}$. Déterminer les points critiques et extremums éventuels des applications suivantes :

(a) $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2} \end{array}\right.$, (b) $g : \left\{\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{xy}{(x+y)(x+1)(y+1)} \end{array}\right.$,

(c) $h : \left\{\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (y-x)^3 + 6xy \end{array}\right.$, (d) $k : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^y + ye^x \end{array}\right.$.

Exercice 47. Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $f : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 48. Déterminer les extremums sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$ de l'application $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right) \prod\limits_{i=1}^n (1+x_i)$.

✓ **Exercice 49.** Soient A, B, C trois points du plan, de coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Trouver le point M du plan réalisant le minimum de : $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

✓ **Exercice 50.** Deux cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ du plan, de rayons R, R', sont tangents extérieurement en O. Trouver l'aire maximale du triangle OMM' pour $M \in \mathscr{C}$ et $M' \in \mathscr{C}'$.

✓ **Exercice 51. (Inégalité arithmético-géométrique)** Soit $s > 0$. Étudier le maximum de $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod\limits_{i=1}^n x_i$ restreint à $\Gamma = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid \sum\limits_{i=1}^n x_i = s\right\}$ et en déduire : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^n x_i} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i$.

Exercice 52. (Inégalité de Hadamard) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qu'on munit de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$. On note f l'application $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}((\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n))$.

1. Montrer que le maximum de f sur $X = \{(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \mid \forall i \in [\![1,n]\!], \|\vec{x}_i\| = 1\}$ est atteint et est strictement positif.
2. Montrer que si le maximum de f sur X est atteint en $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, alors $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
3. En déduire : $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $|\det_{\mathcal{B}}((\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n))| \leqslant \prod\limits_{i=1}^n \|\vec{x}_i\|$, et donner le cas d'égalité.

✓ **Exercice 53.**

1. Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 4xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.
2. Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.
3. Déterminer les extremums globaux de $f : (x, y) \mapsto x^3 + 8y^2$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 5$.

Exercice 54. Déterminer les extremums de la restriction de la fonction $f : (x; y; z) \mapsto \frac{x^3}{3} + y + z$ au sous-espace vectoriel décrit par les équations $x + y + z = x - y + z = 0$.

Exercice 55. Déterminer les extremums de $(x, y) \mapsto |\sin(x+iy)|^2$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ (pour la norme euclidienne usuelle).

Exercice 56. On considère une boîte rectangulaire dont le volume est de 8 mètres cube. Quelles dimensions doit-on lui donner pour minimiser sa surface ?

Exercice 57. Déterminer le volume maximal d'un cylindre inscrit dans une sphère de rayon 1.

Exercice 58. Déterminer le plus court chemin pour aller du pôle Nord au pôle Sud.

Exercice 59. (Caractérisation de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$)

1. Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ en A.
2. Montrer : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\| = \inf\limits_{A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \|A\|\right\}$.

Convexité

★ **Exercice 60. (Fonctions convexes)** Soit U un ouvert non vide convexe de E. On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est *convexe* si : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in U^2$, $\forall t \in [0,1]$, $f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \leqslant tf(\vec{x}) + (1-t)f(\vec{y})$. On dit que f est *strictement convexe* si l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < t < 1$.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Montrer que $\|\cdot\|^2$ est convexe sur E.
2. On suppose que f est convexe. Soient $x \in U$, $\vec{h} \in E$ et $t \in [0,1]$ tels que $\vec{x} - \vec{h} \in U$ et $\vec{x} + \vec{h} \in U$. Montrer : $(1+t)f(\vec{x}) - tf(\vec{x} - \vec{h}) \leqslant f(\vec{x} + t\vec{h}) \leqslant (1-t)f(\vec{x}) + tf(\vec{x} + \vec{h})$.
3. Montrer que si f est convexe, alors f est continue.
4. Si f est de classe C^1, montrer que f est convexe si et seulement si : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in U^2$, $f(\vec{y}) - f(\vec{x}) \geqslant \mathrm{d}f(\vec{x})(\vec{y} - \vec{x})$, si et seulement si : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in U^2$, $\langle \nabla f(\vec{y}) - \nabla f(\vec{x}), \vec{y} - \vec{x} \rangle \geqslant 0$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

★ **Exercice 61. (Convexité et classe C^2)** Soient U un ouvert non vide convexe de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si sa matrice hessienne est symétrique positive en tout point (voir l'exercice 60 pour une définition de la convexité).
2. Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $X \mapsto X^\top AX$ est convexe sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est symétrique positive.
3. Soient $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $X \mapsto \frac{1}{2}X^\top AX + B^\top X$ atteint un minimum sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et qu'il est unique.

Exercice 62. (Exemple de fonction convexe) Pour toute matrice $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_{\max}(A)$ sa plus grande valeur propre. Montrer que l'application $A \mapsto \lambda_{\max}(A)$ est convexe sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ (voir l'exercice 60 pour une définition de la convexité).

Exercice 63. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ (voir l'exercice 60 pour une définition de la stricte convexité). On suppose : $\lim\limits_{\|\vec{x}\| \to +\infty} \dfrac{f(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = +\infty$. Montrer que $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une bijection.