« **Cours dirigé** » – Espaces duaux

1 Généraliser l'orthogonalité : espaces duaux

On cherche à imiter les raisonnements géométriques permis par les produits scalaires (usage de l'orthogonalité) dans des K-espaces vectoriels où K n'est plus $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'affaire se complique parce qu'il n'y a plus de notion de positivité ni de relation d'ordre, ce qui intervient pourtant dans la définition d'un produit scalaire mais aussi ailleurs (inégalités de Cauchy-Schwarz, de Minkowski et de Bessel, calcul de distance à un sous-espace vectoriel...). Nous pouvons malgré tout développer une discipline analogue à celles des espaces préhilbertiens *via* la notion d'espace dual.

Pour permettre une telle analogie, nous nous basons sur l'observation suivante. Le théorème de représentation de Riesz nous dit qu'en dimension FINIE – qui sera le cadre quasiment exclusif de cette discussion –, on a un isomorphisme entre E et $\mathrm{L}(E,\mathbb{R})$ donné par :

$$\Phi : \begin{cases} E & \to & \mathrm{L}(E,\mathbb{R}) \\ \vec{a} & \mapsto & (\varphi_{\vec{a}} : \vec{x} \mapsto \langle \vec{a}, \vec{x}\rangle) \end{cases} .$$

Autrement dit : lorsque E est euclidien, toute forme linéaire est représentée par un produit scalaire (et réciproquement, tous les produits scalaires par un vecteur fixé sont des formes linéaires). Dans ce cadre-là, il est donc exactement équivalent de raisonner avec des produits scalaires ou avec des formes linéaires, et donc tout énoncé **(E1)** impliquant des **produits scalaires** peut se reformuler de manière équivalente en un énoncé **(E2)** impliquant des **formes linéaires** ; or les formes linéaires sur un espace vectoriel sont toujours définies (et leur ensemble est, d'ailleurs, toujours un espace vectoriel isomorphe à E pour des raisons dimensionnelles, même si l'isomorphisme ci-dessus n'a plus de sens), si bien qu'il est raisonnable d'espérer que l'énoncé **(E2)** garde un sens et reste vrai dans tout K-espace vectoriel E de dimension finie.

Donnons quelques exemples. Si $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien et si $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, on dit que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si : $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0$, c'est-à-dire si : $\varphi_{\vec{x}}(\vec{y}) = 0$ (ou de manière équivalente : $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = 0$). L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{x}$ est $\vec{x}^\perp = \ker(\varphi_{\vec{x}})$. Il pourrait aussi se décrire par symétrie ainsi :

$$\textbf{(E1)} \qquad \vec{x}^\perp = \{\vec{y} \in E \mid \langle \vec{y},\vec{x}\rangle = 0\} = \{\vec{y} \in E \mid \varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = 0\} \overset{(\Phi \text{ iso.})}{=} \{\varphi \in \mathrm{L}(E,\mathbb{R}) \mid \varphi(\vec{x}) = 0\} \qquad \textbf{(E2)}.$$

Plus généralement, si A est une partie de E, on peut écrire :

$$A^\perp = \{\varphi \in \mathrm{L}(E,\mathbb{R}) \mid \forall \vec{a} \in A,\ \varphi(\vec{a}) = 0\}.$$

Cette double formulation de l'orthogonalité à $\vec{x}$ va un peu nous embêter dans notre généralisation ci-dessous, mais elle est hélas nécessaire.

Ayant reformulé les notions de géométrie ci-dessus en termes de formes linéaires, voici comment les étendre à un espace vectoriel quelconque. Dans tout ce qui suit, K est un corps quelconque. Comme l'espace vectoriel des formes linéaires sur E interviendra régulièrement, il sera plus sobrement appelé *espace dual* de E et noté E^*.

Définition 1 (Orthogonal d'une partie de E)**.** *Soient E un K-espace vectoriel et A une partie de E. L'*orthogonal *de A est défini par :*

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall \vec{a} \in A,\ \varphi(\vec{a}) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E^*.

Soit $(\varphi,\vec{x}) \in E^* \times E$. On dit que φ et $\vec{x}$ sont orthogonaux *si φ est dans $\{\vec{x}\}^\perp$, c'est-à-dire si : $\varphi(\vec{x}) = 0$.*

1. Montrer que $A^\perp$ est effectivement un sous-espace vectoriel de E^*, et qu'il est le plus grand sous-espace vectoriel de E^* (au sens de l'inclusion) dont tous les éléments sont de restriction nulle sur A.
2. Montrer que si E est euclidien et si A est une partie de E, alors l'image de $A^\perp$ (au sens classique) par l'isomorphisme $\Phi : E \to E^*$ du théorème de Riesz est égale à l'orthogonal de A au sens de cette définition.

On ne parle plus d'orthogonalité entre deux vecteurs, mais entre une forme linéaire et un vecteur : attention !

Cette définition soulève déjà plusieurs points épineux : $A \subseteq E$ et $A^\perp \subseteq E^*$ ne vivent pas dans les mêmes espaces : on ne peut donc pas les comparer, et des identités telles que : $F \oplus F^\perp = E$, ou : $(F^\perp)^\perp = F$, n'auront *a priori* aucun sens dans ce cadre, puisque $(F^\perp)^\perp$ est une partie de $(E^*)^* = \mathrm{L}(\mathrm{L}(E, K), K)$ (que nous noterons E^{**} à présent, par commodité : on l'appelle *espace bidual*).

Autre formulation du même problème : il n'y a pas symétrie des deux objets φ et $\vec{x}$ en présence. Dire que φ et $\vec{x}$ sont orthogonaux n'est *a priori* pas équivalent à l'affirmation que $\vec{x}$ et φ sont orthogonaux : cela ne veut *a priori* rien dire, car on ne peut pas évaluer le vecteur $\vec{x} \in E$ en φ.

Cette affirmation aurait cependant un sens si l'on pouvait canoniquement associer à $\vec{x} \in E$ une forme linéaire sur... l'espace des formes linéaires. En effet, $\{\varphi\}^\perp$ est par définition la partie de E^{**} suivante :

$$\{\varphi\}^\perp = \{\psi \in E^{**} \mid \psi(\varphi) = 0\}\,.$$

Est-ce que l'un de ces éléments de E^{**} est naturellement associé à ψ, de sorte que, si l'on note $\psi_{\vec{x}}$ l'élément de E^{**} associé à $\vec{x}$, l'orthogonalité de $\vec{x}$ et φ puisse s'écrire : $\psi_{\vec{x}}(\varphi) = 0$, et être équivalente à l'orthogonalité de φ et $\vec{x}$? La réponse est positive, et découle du théorème suivant :

Théorème 2 (Théorème de Pontriaguine [*])**.** *Soit E un K-espace vectoriel de dimension* FINIE*. L'application :*

$$ev : \begin{cases} E & \to \quad E^{**} = \mathrm{L}(\mathrm{L}(E, K), K) \\ \vec{x} & \mapsto \quad (ev_{\vec{x}} : \varphi \mapsto \varphi(\vec{x})) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, croissant au sens de l'inclusion (plus précisément : on a $A \subseteq B \subseteq E$ si et seulement si $ev(A) \subseteq ev(B) \subseteq E^{**}$).

Démonstration. On montre que ev est une application linéaire et injective (★) et on conclut qu'elle est bijective par égalité des dimensions, puisque : $\dim(E^{**}) = \dim(\mathrm{L}(E^*, K)) = \dim(E^*) = \dim(E)$.

Montrons que ev est une application croissante au sens de l'inclusion : soient A et B deux parties de E telles que : $A \subseteq B$. Le fait que $ev_E(A)$ soit inclus dans $ev_E(B)$ est alors vrai pour toute application (même sans structure). Pour la réciproque : supposons que $ev(A)$ est inclus dans $ev(B)$ et montrons que A est inclus dans B. Soit $\vec{x} \in A$. On a : $ev_{\vec{x}} \in ev(A) \subseteq ev(B)$ et il existe $\vec{y} \in B$ tel que : $ev_{\vec{x}} = ev_{\vec{y}}$. Or ev est injective, donc : $\vec{x} = \vec{y} \in B$. Ceci montre bien l'inclusion $A \subseteq B$ attendue. □

3. Montrer (★). *Si $\vec{x} \in E$ est non nul, on construira un hyperplan H ne contenant pas $\vec{x}$ et on considérera une forme linéaire dont le noyau est H.*

---

[*]. En vérité, le théorème de Pontriaguine donne un isomorphisme entre un groupe G et son bidual $\widehat{\widehat{G}}$ (groupe des caractères du groupe des caractères de G) sous de bonnes hypothèses topologiques (automatiquement vérifiées pour un groupe commutatif fini). Il est la clé pour formuler l'inversion de Fourier dans les groupes. J'ai nommé ainsi le théorème ci-dessus par analogie, et parce que je ne résiste pas au plaisir de vous faire découvrir ce nom.

Remarque. Si E est de dimension quelconque, alors ev est toujours injective mais elle n'est plus un isomorphisme.

Cela permet de donner un sens à l'orthogonalité de $\vec{x} \in E$ et de $\varphi \in E^*$: on dit que $\vec{x}$ et φ sont orthogonaux si $ev(\vec{x}) \in E^{**}$ et φ le sont, ce qui a bien un sens par la définition précédente. Puisque $ev(\vec{x})(\varphi) = \varphi(\vec{x})$, cela donne la définition suivante (vous ferez le lien avec la formulation de l'orthogonalité entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ donnée en introduction, et que je n'ai pas réexploitée) :

Définition 3 (Orthogonal d'une partie de E^*)**.** *Soient E un K-espace vectoriel et B une partie de E^*. L'*orthogonal *de B est défini par :*

$$B^\circ = \{\vec{x} \in E \mid \forall \varphi \in B,\ \varphi(\vec{x}) = 0\} = \bigcap_{\varphi \in B} \ker(\varphi).$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Soit $(\varphi, \vec{x}) \in E^* \times E$. On dit que $\vec{x}$ et φ sont orthogonaux *si $\vec{x}$ est dans $\{\varphi\}^\circ$, c'est-à-dire si : $\varphi(\vec{x}) = 0$.*

Notation. Pour renforcer l'analogie avec les espaces euclidiens, on écrit parfois $\langle \varphi, \vec{x} \rangle$ au lieu de $\varphi(\vec{x})$ (vous croiserez abondamment cette notation si vous faites de la physique quantique un jour).

On rencontre parfois la notation $B^\perp$ pour cet orthogonal, mais je recommande la différenciation pour éviter la confusion avec la partie $B^\perp$ de E^{**}.

4. Vérifier que $\varphi \in E^*$ et $\vec{x} \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{x}$ et φ sont orthogonaux.
5. Justifier que B° est effectivement un sous-espace vectoriel de E, et qu'il est le plus grand sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) où la restriction des éléments de B est identiquement nulle.
6. Pour toute partie A de E, écrire de même $A^\perp$ comme une intersection de noyaux.
7. On suppose E de dimension finie. Soit B une partie de E^*. Montrer que l'image par ev de B° est $B^\perp$.

La dernière question assure que E et E^* suffisent à nos préoccupations : quand on considère $(A^\perp)^\perp$, on revient dans E à isomorphisme près (puisque $(A^\perp)^\perp \subseteq E^{**}$ est isomorphe à $(A^\perp)^\circ \subseteq E$ *via* ev ; on verra d'ailleurs plus loin que $(A^\perp)^\circ = A$, de sorte que $(A^\perp)^\perp$ soit isomorphe à A) et il n'y a donc pas besoin de travailler avec E^{**}, E^{***}, E^{****}, etc., au fur et à mesure de nos calculs.

On a partiellement résolu le problème d'asymétrie entre φ et $\vec{x}$. En fait, partout où l'on sera embêté par la différence apparente de point de vue (selon qu'on raisonne dans E ou son dual), l'isomorphisme du théorème de Pontriaguine assurera qu'on peut échanger les points de vue : tout énoncé (**E**) donnera un nouvel énoncé ($\mathbf{E}^*$) en échangeant les rôles des vecteurs et des formes linéaires (c'est le fait que finalement, vecteurs et formes linéaires jouent des rôles... duaux, les uns par rapport aux autres, qui justifie qu'on appelle E^* l'espace *dual* de E ; si vous faites de la géométrie projective un jour, vous y observerez une dualité analogue entre les points et les droites, puisque les droites peuvent être définis par des couples de points et les points comme des couples de droites *via* leurs intersections).

Exemple :

Proposition 4. *Soient E un K-espace vectoriel, A, A_1 et A_2 des parties de E et B, B_1, B_2 des parties de E^*.*

(a) Si $A_1 \subseteq A_2$, alors : $A_2^\perp \subseteq A_1^\perp$.

(b) Si $B_1 \subseteq B_2$, alors : $B_2^\circ \subseteq B_1^\circ$.

(c) *On a :* $A = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$.

(d) *On a :* $B = \mathrm{Vect}(B)^{\circ}$.

(e) *On a :* $\left\{\vec{0}\right\}^{\perp} = E^*$ *et* $\{0_{E^*}\}^{\circ} = E$.

(f) *On a :* $E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$ *et* $(E^*)^{\circ} = \left\{\vec{0}\right\}$.

L'avant-dernier item dit très concrètement que pour montrer l'orthogonalité à un sous-espace vectoriel (représenté par $\mathrm{Vect}(A)$ ou $\mathrm{Vect}(B)$), il faut et il suffit de montrer l'orthogonalité à une partie génératrice (représentée par A ou B).

Démonstration.

(a) Exercice ($\bigstar_1$).

(b) Il pourrait se démontrer aisément comme le point précédent. Illustrons cependant le paragraphe ci-dessus concernant la dualité entre E et E^*, sous l'hypothèse supplémentaire que E est de dimension finie : si B_1 est inclus dans B_2, alors $B_2^{\perp}$ est inclus dans $B_1^{\perp}$ d'après ce qui fut démontré ci-dessus. Or l'isomorphisme $ev^{-1} : E^{**} \to E$ est croissant au sens de l'inclusion, donc $ev^{-1}(B_2^{\perp}) = B_2^{\circ}$ est inclus dans $ev^{-1}(B_1^{\perp}) = B_1^{\circ}$: d'où le résultat.

(c) Exercice ($\bigstar_2$).

(d) Exercice ($\bigstar_3$).

(e) Exercice ($\bigstar_4$).

(f) Exercice ($\bigstar_5$). □

8. Montrer ($\bigstar_1$). Vous comparerez cette démonstration à celle que vous avez probablement faite en MPSI dans un cadre préhilbertien.
9. Montrer ($\bigstar_2$) à ($\bigstar_5$). Vous aurez un succès d'estime si vous utilisez la dualité de Pontriaguine pour diviser par deux les vérifications.

2 Généraliser les familles orthonormées : bases duales et antéduales

Si $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ est une famille de vecteurs d'un K-espace vectoriel E, il semble compliqué de parler de famille orthogonale ou orthonormée : on a en effet défini l'orthogonalité d'une *forme linéaire* et d'un *vecteur*, donc on ne peut pas donner un sens à la phrase : « $\vec{x}_i$ et $\vec{x}_j$ sont orthogonaux » ou « $\vec{x}_i$ est unitaire » ... Mais restons butés : si l'on tient absolument à généraliser la notion, il faudrait introduire une famille de formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ telle que $\varphi_i(\vec{x}_j) = 0$ pour tous i et j distincts. Pour avoir l'analogue d'une famille ortho*normée*, on exigerait de plus : $\varphi_i(\vec{x}_i) = 1$. Cette tentative conduit aux définitions suivantes :

Définition 5. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle n.*

(a) *Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. On appelle* base duale de $\mathcal{B}$ *l'unique famille de E^*, notée $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $e_i^*(\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$.*

(b) *Soit $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. On appelle* base antéduale de $\mathcal{B}^*$ *l'unique famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi_i(\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$.*

Démonstration. Nous devons justifier l'existence et unicité de ces familles, ainsi que le fait qu'elles forment des bases.

(a) Il suffit de remarquer qu'en posant pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ l'application $e_i^* : \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \mapsto x_i$, la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ convient : la linéarité est évidente puisque ce sont essentiellement des projections, elle est génératrice puisque tout $\varphi \in E^*$ s'écrit :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\vec{e}_i) e_i^* \qquad (\bigstar_1)$$

et la liberté se démontre en s'inspirant de la liberté des familles orthonormées $(\bigstar_2)$.
L'unicité est évidente, du fait que deux formes linéaires coïncidant sur une famille génératrice (ici $\mathcal{B}$) sont égales : la condition $e_i^*(\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$ caractérise donc e_i^* de manière unique.

(b) On utilise la dualité de Pontriaguine, encore une fois, pour transformer un énoncé avec des vecteurs en un énoncé avec des formes linéaires : comme $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*, le point précédent assure l'existence d'une unique famille $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$ de E^{**} telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi_j^*(\varphi_i) = \delta_{i,j}$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la famille de E constituée des antécédents par ev de $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$; on rappelle que par définition, cela veut dire qu'on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i^* = ev_{\vec{e}_i}$, et donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \delta_{i,j} = \varphi_j^*(\varphi_i) = ev_{\vec{e}_j}(\varphi_i) = \varphi_i(\vec{e}_j),$$

d'où : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\varphi_i(\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ vérifie bien ce qu'on veut ; c'est une base en tant qu'image réciproque d'une base par un isomorphisme.
L'unicité de la famille est laissée en exercice : elle découle de la dualité de Pontriaguine $(\bigstar_3)$. □

10. Montrer $(\bigstar_1)$ (*d'abord décomposer $\varphi(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in E$ dans la base $\mathcal{B}$*).
11. Montrer $(\bigstar_2)$ et $(\bigstar_3)$.

Remarque. On pouvait aussi conclure avec un argument dimensionnel : être libre, être générateur et être une base est équivalent pour une famille de cardinal égal à la dimension.

Remarque. Même si ce qui a motivé ces définitions est la généralisation du concept de famille orthonormée, notez que ce n'est aucunement le vocabulaire employé.

Remarque. On note que les formes linéaires de la base duale sont des projections (cf. l'explicitation dans la démonstration). C'est déjà ce que sont les produits scalaires par des vecteurs d'une base orthonormée : le parallèle est pertinent.

Cela transparaît déjà dans la démonstration, mais de la même manière qu'un très grand intérêt des bases orthonormées réside dans le fait qu'elles explicitent toutes les coordonnées des vecteurs (et donc les coefficients des matrices des endomorphismes), les bases duales permettent de décrire les coordonnées de tout vecteur, peu importe l'espace vectoriel :

Proposition 6. *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.*

(a) Pour tout $\vec{x} \in E$, on a : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(\vec{x}) \vec{e}_i$.

(b) Pour tout $\varphi \in E^*$, on a : $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\vec{e}_i) e_i^*$.

(c) Pour tout $(\varphi, \vec{x}) \in E^* \times E$, on a : $\varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\vec{e}_i) e_i^*(\vec{x})$.

Bien noter l'analogie avec les identités : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle \vec{e}_i$, et : $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle \langle \vec{e}_i, \vec{y} \rangle$ (rappelez-vous que j'ai dit que $\varphi(\vec{x})$ était souvent noté $\langle \varphi, \vec{x} \rangle$ pour accentuer les parallèles avec le cadre euclidien).

Démonstration. La démonstration précédente démontre aussi les deux premières identités en passant, plus ou moins explicitement. La troisième identité est trivialement conséquence de n'importe laquelle des deux précédentes. □

Exemple 1. Soit $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminons sa base duale $(\varphi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Par la proposition précédente, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(P) X^k.$$

Mais par la formule de Taylor on a aussi : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, on trouve que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la forme linéaire φ_k est l'application :

$$\varphi_k : P \mapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

Remarque. La base duale est parfois utilisée pour écrire certaines identités sans avoir à introduire explicitement les coordonnées d'un vecteur dans une base. Par exemple, avec la base duale de la base « canonique » de $\mathrm{M}_n(K)$, on peut écrire :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(K), \quad \det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} E^*_{i,\sigma(i)}(M), \quad \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} E^*_{i,i}(M).$$

La proposition suivante est l'une des plus importantes sur les espaces duaux.

Proposition 7. *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de E^*.*

(a) On a : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.

(b) On a : $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$.

On en déduit les égalités $(F^\perp)^\circ = F$ et $(G^\circ)^\perp = G$.

Démonstration.

(a) Une démonstration classique de cette égalité, *dans le cas euclidien*, est l'utilisation du théorème de la base orthonormée incomplète. C'est-à-dire : on complète une base orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ de F en une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E. On vérifie alors que si $\vec{x} \in E$, alors :

$$\vec{x} \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1, k]\!],\ \vec{x} \perp \vec{e}_i \iff \vec{x} \in \mathrm{Vect}(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$$

(décomposer $\vec{x}$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$). On en déduit : $F^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$, puis : $\dim(F^\perp) = n - k = n - \dim(F)$. Le lecteur complètera les détails de cette démonstration ($\bigstar_1$), puis s'en inspirera pour montrer l'identité de la proposition ($\bigstar_2$). Il faut simplement remplacer l'usage de bases orthonormées par l'usage de bases duales l'une de l'autre.

(b) Utiliser la dualité de Pontriaguine ($\bigstar_3$).

Pour en déduire l'égalité : $(F^\perp)^\circ = F$, notons que l'on a déjà l'inclusion $F \subseteq \left(F^\perp\right)^\circ$ (traduire ce que cela voudrait dire, pour constater que c'est trivial ($\bigstar_4$)) puis, par ce qui précède, les égalités dimensionnelles :

$$\begin{cases} \dim\left(F^\perp\right) + \dim\left((F^\perp)^\circ\right) &= \dim(E) \\ \dim\left(F^\perp\right) + \dim\left(F\right) &= \dim(E), \end{cases}$$

d'où : $\dim(F) = \dim\left((F^\perp)^\circ\right)$, ce qui permet de conclure : $(F^\perp)^\circ = F$. La deuxième égalité est laissée en exercice au lecteur ($\bigstar_5$). □

12. Démontrer ($\bigstar_1$), ($\bigstar_2$), ($\bigstar_3$), ($\bigstar_4$) et ($\bigstar_5$).

Exercice 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, A_1, A_2 deux parties de E et B_1, B_2 deux parties de E^*. À l'aide de la proposition précédente, montrer :

$$(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp,\ (A_1 \cap A_2)^\perp,\ (B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ,\ (B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ.$$

Les égalités $\left(F^\perp\right)^\circ = F$ et $(G^\circ)^\perp = G$ sont très utiles reformulées dans un cas particulier : si F est un sous-espace vectoriel de E, pour montrer que $F = E$, il suffit de montrer que $F^\perp = \{\vec{0}\}$. C'est intéressant en particulier lorsque, par définition de F, l'inclusion $E \subseteq F$ nécessiterait de montrer un prédicat du type : « $\forall \vec{x} \in E,\ \exists \heartsuit \in \clubsuit, \dots$ » et que la construction de $\heartsuit$ est difficile voire impossible. C'est le cas notamment pour certaines images d'applications (qui, par définition, font intervenir un quantificateur existentiel : existence d'un antécédent).

On évite cette construction en démontrant : $F^\perp = \{\vec{0}\}$: vérifier qu'une forme linéaire nulle sur F est identiquement nulle est souvent plus facile (et il n'y a aucune quantification existentielle dans ce qu'il faut démontrer). De même avec $(G^\circ)^\perp = G$. Illustration ci-dessous puis, plus tard, dans l'exemple 7 :

Exemple 2. Soient $x_0, \dots, x_n$ des éléments distincts de K. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, notons φ_i l'endomorphisme de $K_n[X]$ défini par $P \mapsto P(x_i)$. C'est une forme linéaire sur $K_n[X]$. On note que la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ engendre $K_n[X]^*$ puisqu'un polynôme de $K_n[X]$ ayant $n+1$ racines est le polynôme nul :

$$\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}^\circ = \{P \in K_n[X] \mid \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = 0\} = \left\{0_{K_n[X]}\right\},$$

de sorte que : $\mathrm{Vect}\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\} = (\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}^\circ)^\perp = \left\{0_{K_n[X]}\right\}^\perp = K_n[X]^*$. Soit $(L_0, \dots, L_n)$ la base antéduale de $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$. Par la proposition 6, on a :

$$\forall P \in K_n[X],\ P = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P) L_i = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i.$$

Que reconnaît-on de très connu ?

13. Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $K_n[X]^*$ en passant plutôt par l'indépendance linéaire.

Notons que cet exemple n'explicite pas les vecteurs de la base antéduale (même si vous savez très bien ce qu'on devrait obtenir). La proposition suivante donne un moyen d'y parvenir, *via* une reformulation matricielle :

Proposition 8. *(À faire)*

Exemple 3. (À faire)

Exercice 2. (À faire)

Notons une conséquence intéressante de la proposition 7, ne serait-ce que sur le plan conceptuel :

Proposition 9. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle n.*

(a) Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des formes linéaires sur E. Alors : $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} \ker(\varphi_i)\right) = n - \mathrm{rang}\left((\varphi_1, \dots, \varphi_k)\right)$.

En particulier :

— *on a :* $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k}\ker(\varphi_i)\right) \geqslant n-k$ *;*

— *on a :* $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k}\ker(\varphi_i)\right) = n-k \Longleftrightarrow (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ *est libre.*

(b) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Il existe une famille libre $(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-p})$ de E^* telle que :

$$F = \bigcap_{i=1}^{n-p}\ker(\varphi_i) = \{\vec{x}\in E \mid \forall i\in [\![1,n-p]\!],\ \varphi_i(\vec{x})=0\}\,.$$

On retrouve des résultats connus : dans le cas $p=n-1$, on retrouve qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On affine aussi l'énoncé de MPSI sur l'intersection de k hyperplans : chaque intersection décrémente la dimension d'une unité, sauf si c'est une intersection avec un hyperplan contenant l'intersection des précédents (ce qui équivaut exactement à une condition de dépendance linéaire entre les formes linéaires associées à ces hyperplans : la démonstration de la proposition va le mettre en évidence). Évident dans $\mathbb{R}^3$: l'intersection de deux plans est une droite, sauf s'ils sont confondus, et l'intersection avec un troisième plan donne $\{\vec{0}\}$ sauf s'il contient la droite obtenue à l'étape précédente.

Démonstration.

(a) Le rang de $(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$ est la dimension de $G=\mathrm{Vect}\left((\varphi_1,\ldots,\varphi_k)\right)$. Or, par définition de G° :

$$G^\circ = \bigcap_{i=1}^{k}\ker(\varphi_i).$$

On conclut en écrivant : $\dim(G^\circ)=\dim(E)-\dim(G)$.

(b) Comme $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n-p$ par la proposition 7, il admet une base de cardinal $n-p$. Soit $(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-p})$ une telle base. On revient à F en écrivant :

$$F=\left(F^\perp\right)^\circ = \mathrm{Vect}\left(\{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-p}\}\right)^\circ = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-p}\}^\circ = \bigcap_{i=1}^{n-p}\ker(\varphi_i),$$

d'où le résultat. □

On a donc deux façons de décrire un sous-espace vectoriel de dimension finie p : soit à l'aide d'une base de cardinal p, soit par la donnée de $n-p$ équations linéaires. Selon le point de vue qui nous est le plus confortable, on peut aller de l'un à l'autre.

Exercice 3. Retrouver le fait que si deux formes linéaires ont même noyau, elles sont proportionnelles.

3 Généraliser l'adjonction : applications transposées

L'endomorphisme adjoint nous rendit de fiers services, en particulier parce qu'il stabilise les orthogonaux des sous-espaces stables : résultat puissant pour les réductions par récurrence sur la dimension. Quel serait l'analogue de l'endomorphisme adjoint dans un espace vectoriel quelconque ?

Nouvelle difficulté, toujours liée à la même raison (l'asymétrie entre formes linéaires et vecteurs) : l'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme f d'un espace euclidien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est défini par la relation $\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle$, valable pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E. On veut reformuler cela en termes de formes linéaires, afin de généraliser cette définition à des espaces vectoriels quelconques. Pour cela, il faudrait remplacer soit $\vec{x}$, soit $\vec{y}$ par la forme linéaire correspondante $\varphi_{\vec{x}}$ ou $\varphi_{\vec{y}}$ (on reprend les notations de l'isomorphisme du théorème de représentation de Riesz), faire apparaître ladite forme linéaire dans chaque membre de cette égalité, et utiliser la surjectivité de $\Phi : E \to E^*$ pour la remplacer par une forme linéaire φ quelconque (de sorte que l'égalité ait un sens dans un espace vectoriel quelconque). Comme il apparaît « $f(\vec{x})$ » avec $\vec{x} \in E$ dans l'expression ci-dessus, il semble préférable de préserver $\vec{x}$ comme vecteur (on ne peut pas évaluer f en la forme linéaire $\varphi_{\vec{x}}$). Mais si je remplace $\vec{y}$ par la forme linéaire $\varphi_{\vec{y}}$, je semble déplacer le problème : $f^*(\varphi_{\vec{y}})$ n'a pas de sens. Cette discussion explique pourquoi, pour généraliser la notion d'adjoint à un espace non euclidien, je risque d'être embêté si je veux produire un endomorphisme de E : ce serait plutôt un endomorphisme de E^*, afin de donner un sens à $f^*(\varphi_{\vec{y}})$.

Pour ne pas nous emmêler les pinceaux, nous allons noter différemment l'adjoint classique f^*, et sa généralisation à un espace quelconque $f^\top$ qui doit être, pour les raisons susmentionnées, un endomorphisme de E^*. Ceci étant dit :

$$\textbf{(E1)} \quad \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle \iff \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \varphi_{\vec{y}}(f(\vec{x})) = \varphi_{f^*(\vec{y})}(\vec{x}).$$

On en déduit que si l'on POSE : $\forall \vec{y} \in E,\ f^\top(\varphi_{\vec{y}}) = \varphi_{f^*(\vec{y})}$, alors :

$$\begin{aligned}\textbf{(E1)} \quad \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y})\rangle &\iff \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \quad \varphi_{\vec{y}}(f(\vec{x})) = f^\top(\varphi_{\vec{y}})(\vec{x}) \\ &\iff \forall \varphi \in E^*,\ \forall \vec{x} \in E, \quad \varphi(f(\vec{x})) = f^\top(\varphi)(\vec{x}) \quad (\Phi \text{ iso.}) \\ &\iff \forall \varphi \in E^*, \quad \varphi \circ f = f^\top(\varphi). \qquad \textbf{(E2)}\end{aligned}$$

Ceci motive la définition suivante :

Définition 10. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle* application transposée de f *l'application :*

$$f^\top : \begin{cases} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ f \end{cases}.$$

C'est une application linéaire.

La linéarité est immédiate.

Exemple 4. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons $\mathcal{B}^* = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ sa base duale. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a donc par l'exemple 1 :

$$\varphi_0(P) = P(0), \quad \varphi_2(P) = P'(0), \quad \varphi_2(P) = \frac{P''(0)}{2}.$$

Vérifions sur cet exemple que l'application transposée est bien nommée. On prend pour f l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (X+1)P' - 3P \end{cases}.$$

Nous allons écrire la matrice représentative de $f^\top$ dans la base $\mathcal{B}^*$. On a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f^\top(\varphi_0)(P) = \varphi_0\left((X+1)P' - 3P\right) = P'(0) - 3P(0),$$

donc : $f^\top(\varphi_0) = \varphi_1 - 3\varphi_0$. On trouve de même :

$$f^\top(\varphi_1) = -2\varphi_1 + 2\varphi_2, \quad f^\top(\varphi_2) = -\varphi_2. \qquad (\bigstar)$$

Donc : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}^*}(f^\top) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. À comparer avec :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Montrer (★).

Ce qu'on a observé sur un exemple se généralise :

Proposition 11. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions n et p non nulles, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F respectivement, et enfin $\mathcal{B}_E^*$, $\mathcal{B}_F^*$ leurs bases duales respectives. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a :*

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F^*,\mathcal{B}_E^*}(f^\top) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)^\top.$$

En particulier, si f est un endomorphisme de E :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E^*}(f^\top) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_E}(f)^\top.$$

Démonstration. On doit exprimer les éléments de $f^\top(\mathcal{B}_F^*)$ dans $\mathcal{B}_E^*$. Posons donc : $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $\mathcal{B}_E^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ et $\mathcal{B}_F^* = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ (on prendra garde à ne pas confondre les $\vec{f}_i$ avec f). Avec ces notations, on veut exprimer $f^\top(\psi_j)$ en fonction des φ_i et les $f(\vec{e}_j)$ en fonction des $\vec{f}_i$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$. On a, par la proposition 6 appliquée à $\psi_j \circ f \in E^*$:

$$f^\top(\psi_j) = \psi_j \circ f = \sum_{i=1}^{n} \psi_j(f(\vec{e}_i))\varphi_i,$$

donc le coefficient (i, j) de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F^*,\mathcal{B}_E^*}(f^\top)$ est $\psi_j(f(\vec{e}_i))$. Or, toujours par cette proposition :

$$f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(f(\vec{e}_j))\vec{f}_i,$$

donc le coefficient (i, j) de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est $\psi_i(f(\vec{e}_j))$: c'est le coefficient (j, i) de $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_F^*,\mathcal{B}_E^*}(f^\top)$, d'où le résultat. □

On a bien généralisé la notion d'adjoint, avec la dualité des bases qui remplace le rôle crucial des bases orthonormées.

Toutes les propriétés de base de l'adjoint sont recouvrées – on pensera à s'interroger sur l'espace vectoriel ambiant de chaque sous-espace vectoriel ci-dessous – à une petite subtilité près du fait que E^{**} ne soit pas égal à E, mais isomorphe :

Proposition 12. *Soient E, F et G des K-espaces vectoriels. Alors :*

(a) L'application $f \mapsto f^\top$ est une application linéaire de $\mathrm{L}(E, F)$ dans $\mathrm{L}(F^*, E^*)$.

(b) On a : $\mathrm{Id}_E^\top = \mathrm{Id}_{E^*}$.

(c) Supposons E et F de dimension finie. Pour tout $f \in \mathrm{L}(E, F)$, on a : $(f^\top)^\top = ev_F \circ f \circ ev_E^{-1}$, où $ev_E : E \to E^{**}$ et $ev_F : F \to F^{**}$ sont les isomorphismes du théorème de Pontriaguine.

(d) Pour tout $(f, g) \in \mathrm{L}(F, G) \times \mathrm{L}(E, F)$, on a : $(f \circ g)^\top = g^\top \circ f^\top$.

(e) Pour tout $f \in \mathrm{L}(E, F)$, si f est inversible alors $f^\top$ aussi et on a : $(f^\top)^{-1} = (f^{-1})^\top$.

(f) Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$. On a : $\ker(f^\top) = \mathrm{im}(f)^\perp$. Si E et F sont de dimension finie, on a de plus : $\mathrm{im}(f^\top) = \ker(f)^\perp$.

(g) Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Soit H un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $H^\perp$ est stable par $f^\top$.

(h) Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Soit H un sous-espace vectoriel de E stable par $f^\top$. Alors H° est stable par f.

Les réciproques des items (g) et (h) sont vraies si E est de dimension finie.

Démonstration.

(a) Immédiat par définition de l'application transposée.

(b) Trivial.

(c) Soient $f \in \mathrm{L}(E,F)$ et $(\vec{x},\varphi) \in E \times F^*$. On a :

$$(f^\top)^\top(ev_E(\vec{x}))(\varphi) = ev_E(\vec{x})\left(f^\top(\varphi)\right) = ev_E(\vec{x})\,(\varphi \circ f) = \varphi\,(f(\vec{x})) = ev_F(f(\vec{x}))(\varphi).$$

Ceci vaut pour tout $\varphi \in F^*$, donc : $(f^\top)^\top(ev_E(\vec{x})) = ev_F(f(\vec{x}))$. Ceci vaut pour tout $\vec{x} \in E$, d'où le résultat.

(d) Exercice ($\bigstar_1$).

(e) C'est une conséquence facile des items (b) et (d) ($\bigstar_2$).

(f) On montre avec la proposition 7 que si la première égalité est vraie, alors la seconde aussi (rédiger les détails, sachant qu'il faudra raisonner avec $(f^\top)^\top$ à un moment : il faudra savoir comparer $\ker\left(\left(f^\top\right)^\top\right)^\circ$ et $\ker(f)^\perp$, ce qui est un travail patient d'écriture ($\bigstar_3$)). Justifions donc l'égalité $\ker(f^\top) = \mathrm{im}(f)^\perp$. Soit $\varphi \in F^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi \in \ker(f^\top) \iff \varphi \circ f = 0_{\mathrm{L}(E,K)} \iff \forall \vec{x} \in E,\ \varphi(f(\vec{x})) = 0 \iff \forall \vec{y} \in \mathrm{im}(f),\ \varphi(\vec{y}) = 0 \\ \iff \varphi \in \mathrm{im}(f)^\perp,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(g) Soit $\varphi \in H^\perp$. Alors φ s'annule sur H. Or pour tout $\vec{x} \in H$ on a $f(\vec{x}) \in H$ et donc : $\forall \vec{x} \in H$, $\varphi \circ f(\vec{x}) = 0$. C'est-à-dire : $\forall \vec{x} \in H$, $f^\top(\varphi)(\vec{x}) = 0$. Ceci prouve que la forme linéaire $f^\top(\varphi)$ s'annule sur H, et donc : $f^\top(\varphi) \in H^\perp$. Ceci prouve la stabilité de $H^\perp$ par $f^\top$.

Supposons E de dimension finie et montrons la réciproque. Supposons $H^\perp$ stable par $f^\top$. Alors $\left(H^\perp\right)^\perp \subseteq E^{**}$ est stable par $(f^\top)^\top$, donc en prenant l'image par ev_E on a :

$$ev_E^{-1} \circ (f^\top)^\top\left(\left(H^\perp\right)^\perp\right) \subseteq ev_E^{-1}\left(\left(H^\perp\right)^\perp\right).$$

Mais comme vous avez dû le démontrer dans les questions qui suivent la définition de l'orthogonal d'une partie de E^* (définition 3), on a : $ev_E^{-1}\left(\left(H^\perp\right)^\perp\right) = \left(H^\perp\right)^\circ = H$ (là encore intervient l'hypothèse de dimension finie). Donc aussi : $\left(H^\perp\right)^\perp = ev_E\,(H)$. L'inclusion ci-dessus devient donc plus simplement :

$$ev_E^{-1} \circ (f^\top)^\top\,(ev_E\,(H)) \subseteq H.$$

Ceci montre que H est stable par $ev_E^{-1} \circ (f^\top)^\top \circ ev_E = f$, d'où le résultat (remarquer une illustration du principe de conjugaison : si H est stable par $\varphi \in \mathrm{L}(E)$ et si $g \in \mathrm{L}(E,F)$ est inversible, alors $g(H)$ est stable par $g \circ \varphi \circ g^{-1}$: c'est un air connu qui peut éventuellement rendre plus digeste la manipulation ci-dessus).

(h) Utiliser la dualité de Pontriaguine ($\bigstar_4$). □

15. Montrer ($\bigstar_1$) et ($\bigstar_2$).
16. Montrer ($\bigstar_3$), soit en appliquant la première égalité à $f^\top$, soit en montrant : $\mathrm{im}(f^\top)^\circ = \ker(f)$. Pourquoi ne proposé-je pas de directement montrer $\mathrm{im}(f^\top) = \ker(f)^\perp$ par double inclusion ?
17. Montrer ($\bigstar_4$) soit comme indiqué, soit en imitant le raisonnement de l'item précédent.

Exercice 4. Soit f un isomorphisme de E dans F. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors on sait que $f(\mathcal{B})$ est une base de F. Est-il vrai que $(f^\top)^{-1}(\mathcal{B}^*)$ est la base duale de $f(\mathcal{B})$?

En traduisant matriciellement la proposition précédente, on retrouve un certain nombre de propriétés déjà connues des matrices transposées, la plupart étant même triviales (mais il est satisfaisant de pouvoir en proposer des démonstrations du point de vue des applications linéaires). Notamment, l'invariance du rang peut se démontrer sans le recours à l'algorithme du pivot de Gauß.

L'avantage de l'application transposée est qu'on l'a définie indépendamment de toute structure euclidienne. Notamment, la propriété importante de stabilité par l'adjoint des orthogonaux peut ici être imitée dans des K-espaces vectoriels quelconques.

Corollaire 13. *Soit n un entier naturel non nul. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$. L'application :*

$$\begin{cases} \{\textit{sous-espaces stables par } X \mapsto MX\} & \to \left\{\textit{sous-espaces stables par } X \mapsto M^\top X\right\} \\ F & \mapsto \left\{X \in \mathrm{M}_{n,1}(K) \mid \forall Y \in F,\ X^\top Y = 0\right\} \end{cases}$$

est une bijection décroissante (au sens de l'inclusion).

Notons que lorsque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la bijection proposée est simplement $F \mapsto F^\perp$, où l'orthogonalité est ici au sens euclidien habituel. On peut dans ce cas la déduire de l'adjoint.

Démonstration. (À faire) □

Exemple 5. (À faire)

On en déduit une démonstration économe du critère de trigonalisation :

Corollaire 14 (Critère de trigonalisation)**.** *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E. On suppose que χ_f est scindé sur K. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure.*

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'hypothèse de récurrence étant :

> P_n : « Pour tout K-espace vectoriel E de dimension n et tout endomorphisme f de E tel que χ_f soit scindé sur K, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure. »

Le cas $n = 1$ est évident. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose P_n. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n+1$ et f un endomorphisme de E tel que χ_f soit scindé. Comme le déterminant est invariant par transposition, la proposition 11 assure que $\chi_{f^\top} = \chi_f$ qui est scindé, donc il admet une racine dans K. On en déduit que $f^\top \in \mathrm{L}(E^*)$ admet un vecteur propre φ, et $D = \mathrm{Vect}(\varphi)$ est stable par $f^\top$. Par la proposition 12, item (h), le sous-espace vectoriel $H = D^\circ$ est stable par f, et on sait que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f sur H (que l'on note f_H) divise χ_f : il est donc scindé sur K également. Or : $\dim(H) = \dim(E) - \dim(D) = n$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à H et $f_H \in \mathrm{L}(H)$: il existe une base $\mathcal{B}_H$ de H telle que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_H}(f_H)$ soit triangulaire supérieure. On complète arbitrairement cette base en une base $\mathcal{B}$ de E, et :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathcal{B}_H}(f_H) & * \\ 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(K)} & * \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure : d'où le résultat. □

Exercice 5. (Co-trigonalisation) S'inspirer de cette démonstration pour montrer que si f et g sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui commutent, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ soient triangulaires supérieures.

4 Applications de la dualité

Exemple 6. (À faire)

Exemple 7. (À faire)

Exemple 8. (À faire)