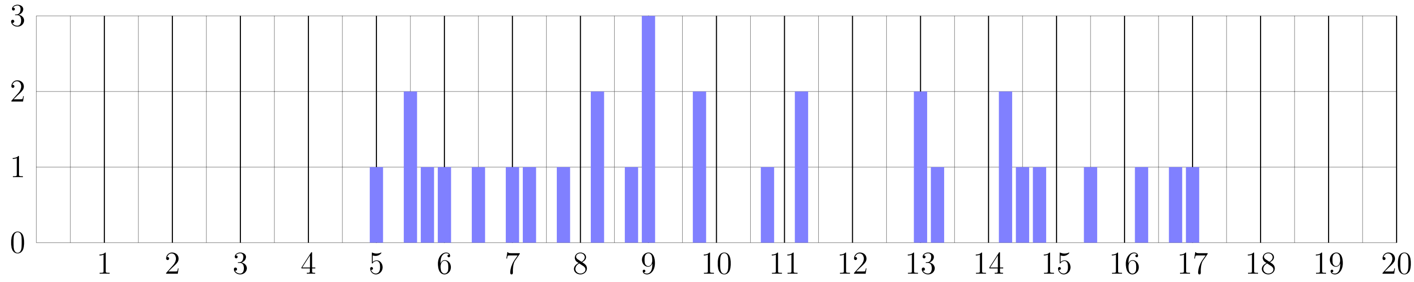
Devoir sur table n° 9 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **44 points**.
Moyenne : 10,44. **Écart-type :** 3,71.
Premier quartile : 7,5. **Médiane :** 9,75. **Troisième quartile :** 13,75.

Redite des devoirs précédents.

1. J'ai encore vu (rarement, fort heureusement) des élèves manipuler *a priori* des sommes à support infini sans se soucier de leur existence (qui n'est avérée *a priori* que si l'on somme des nombres POSITIFS). Écrire : « on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} x^n < +\infty$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n$ existe » est aberrant (sauf si $x \in [0,1[$) : pour écrire cette majoration, vous présupposez l'existence de l'objet dont vous voulez prouver l'existence. C'est une lacune extrêmement fâcheuse et qui doit disparaître d'ici les écrits À TOUT PRIX. C'est un zéro assuré à une question de convergence de série ou intégrale. Passez par la convergence absolue. La manipulation *a priori* de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathrm{P}(S_n = 0)x^n|$ ne pose aucun problème car tous les termes sont positifs (à ne surtout pas confondre avec la manipulation de $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n\right|$, qui fait tomber dans le même écueil que ci-dessus).

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

2. J'ai vu des phrases du type : « si on a A alors on a aussi B, donc : $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$. » Ce raisonnement est insuffisant et une réciproque est à établir (si elle est triviale : dites-le en passant, pour montrer que vous avez conscience de la différence entre $A \subseteq B$ et $A = B$). En effet, dire que la réalisation de A implique celle de B se traduit seulement par : $A \subseteq B$, qui implique : $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$.

Imprécisions mathématiques.

3. La σ-additivité semble méconnue de plusieurs élèves, qui s'interdisent d'écrire directement : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)$ (pour des A_n incompatibles), et préfèrent passer par le théorème de continuité monotone (oubliant qu'il se démontre justement grâce à la σ-additivité : contresens logique).
4. Sous prétexte que l'énoncé faisait apparaître une somme indexée par $[\![1, n]\!]$, beaucoup d'élèves ont proposé d'appliquer la formule des probabilités totales avec la famille $((R = k))_{k \in [\![1,n]\!]}$ sans trop réfléchir (le fait que R ne dépende nullement d'un entier n fixé n'a pas alerté sur l'absurdité de cette affirmation). Pour avoir un système complet, il fallait *a priori* indexer par $R(\Omega)$. C'est *ensuite* qu'il fallait expliquer pourquoi $\mathrm{P}(S_n = 0 \cap R = k)$ disparaît si $k > n$.
5. Il ne vous gêne pas d'écrire $G = \frac{F-1}{F}$ plutôt que $G = 1 - \frac{1}{F}$. Pas rédhibitoire ici, mais cela me laisse penser qu'en d'autres circonstances vous ne reconnaîtriez pas des fractions rationnelles qu'une décomposition en éléments simples pourrait simplifier (dans le DST n° 7 j'ai déjà formulé ce regret).
6. Les développements en série entière « simplifiés » de $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ne sont pas usuels.
7. Dans la comparaison série-intégrale, le changement de monotonie pour $\alpha < 0$ fut peu remarqué.
8. Pour montrer : $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_0 b_{n-k}$, beaucoup ont mentionné la décroissance de $(a_n)_{n \geqslant 0}$, mais rares sont ceux ayant pensé à la positivité des b_{n-k} (pour s'assurer que l'inégalité ne se renverse pas).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

9. Le conditionnement d'une probabilité ne doit JAMAIS disparaître sans raison. Cessez cela, ou vous passerez pour des truqueurs. Si l'on veut écrire : $\mathrm{P}_A(B) = \mathrm{P}(B)$, souvent cela découle d'une hypothèse d'indépendance, quitte à réécrire les évènements A et B afin de faire apparaître des variables qui sont indépendantes, si l'écriture initiale n'en fait pas apparaître (parfois vous avez cité l'indépendance alors qu'elle n'était clairement pas vérifiée : ne bluffez pas). Parfois cela découle d'un retour à la définition et d'une simplification de $A \cap B$.

   D'ailleurs, *aucun* conditionnement n'était utile dans ce devoir : tous les raisonnements que vous avez faits avec $\mathrm{P}_A(B)$ pouvaient être faits avec $\mathrm{P}(A \cap B)$, et *je recommande* cette dernière : 1° cela évite l'écueil ci-dessus, 2° certains ont parlé maladroitement d'évènements conditionnels : cela n'existe pas.

10. L'erreur suivante fut dans presque toutes les copies : « comme les X_i sont tous de même loi, on a : $\mathrm{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-k} X_{i+k} = 0\right) = \mathrm{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-k} X_i = 0\right)$. » C'est un raisonnement archi-faux : sous prétexte que les X_i ont tous même loi que X, a-t-on également : $\mathrm{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0\right) = \mathrm{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X = 0\right) = \mathrm{P}\left(nX = 0\right)$? Il suffit de prendre pour X une variable aléatoire d'image $\{-1,1\}$ pour constater l'inanité de cette égalité : l'évènement de droite est impossible, au contraire *a priori* de celui de gauche (pour n pair).

    Ici, la clé pour que cela marche, est l'INDÉPENDANCE des X_i (en plus du fait qu'elles aient même loi). Lisez dans le corrigé où elle intervient, et assimilez le schéma de démonstration pour ne plus vous faire piéger : les sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ont en effet une grande probabilité de revenir aux concours !

11. Le rôle de la continuité de G en 1, très présent dans ce devoir, fut très souvent ignoré.

12. Presque personne n'a remarqué que si : $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n$, alors l'égalité : $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0)$ n'a rien d'une évidence (pire : elle peut être fausse) et doit être justifiée. C'est un problème d'interversion puisqu'à gauche, on a : $\lim\limits_{x \to 1^-} \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n$ et à droite : $\lim\limits_{N \to +\infty} \lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{N} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n$ (sans même parler d'interversion, il ne devait pas vous échapper que la convergence d'une SÉRIE n'est pas la même chose qu'un calcul de limite de sa SOMME : ce n'est pas la même variable qui tend vers un point, ni le même objet considéré).

    Certains ont cru pouvoir utiliser le théorème d'Abel radial pour affirmer que si $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$ existe, alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{P}(S_n = 0)$ converge : vous avez inversé les hypothèses et conclusions du théorème, qui devient faux. En effet : $\lim\limits_{x \to 1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ existe et est finie, pourtant la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n$ diverge. Il existe une réciproque partielle, nécessitant l'hypothèse supplémentaire que le coefficient général soit un $\underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ et qui est appelée un *théorème taubérien* (il est dans les exercices du chapitre VIII).

    La clé pour que cela marche, ici, est la *positivité*. Voir *Méthodes* du chapitre VII si besoin (ainsi que les exemples du cours ou les exercices où j'ai justifié une telle interversion : ils sont nombreux), j'y explique comment l'utiliser afin d'intervertir limite et somme.

13. Quelques élèves semblent penser que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ équivaut à $u_n = v_n + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$. C'est faux si $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ par exemple : le terme $\underset{n \to +\infty}{o}(1)$ peut contenir le terme prépondérant.

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— PREMIÈRE PARTIE : questions 2 et 4 (observer comment on montre que des variables ont même loi) ;

— DEUXIÈME PARTIE : questions 8 et 10 ;

— QUATRIÈME PARTIE : questions 14 et 15.