Devoir sur table n° 9
(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Ce sujet est une adaptation de l'épreuve de Mathématiques II du Concours Commun Mines-Ponts, année 2020, filière MP. J'ai enlevé la première partie (cinq questions très classiques, bien en deçà de la difficulté globale du sujet), une question demandant de montrer que l'interversion somme-limite est possible en cas de divergence d'une série entière à coefficients positifs sur le bord, et enlevé la valeur sur laquelle on est supposé tomber dans la question 7 (c'est une question déjà traitée en travaux dirigés et vous n'avez donc pas besoin d'un surcroît d'aide).

Je n'ai pas eu le temps de développer ce commentaire. Le corrigé n'est pas de moi en dehors de quelques questions : je le dois à Édouard Lucas, professeur en MP au lycée Michelet (Versailles).

Ce qu'on retiendra en bref. Démontrer l'indépendance de variables aléatoires, démontrer que des variables aléatoires ont même loi. Produits de Cauchy. Interversion d'une double limite lorsque la limite est infinie. Somme de fonctions indicatrices. Développements en série entière de $x \mapsto \sqrt{1-x}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}^{-1}$. Équivalents de sommes partielles et de restes de séries de Riemann.

Questions faciles ou classiques à retravailler

- Première partie : question 1, questions 3 et 4, question 6 ;
- Deuxième partie : questions 7 à 10 ;
- Troisième partie : question 11 ;
- Quatrième partie : question 14.

2 Rapport officiel de l'épreuve

2.1 Généralités et présentation du sujet

Ce sujet traite de marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$, c'est-à-dire d'une suite de variables aléatoires $(S_n)_n$ où $S_0 = \vec{0}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ avec $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. Au temps k, on fait un pas dans la direction X_k. Ainsi, plusieurs questions se posent naturellement : Revient-on en $\vec{0}$? Au bout de combien de temps en moyenne, revient-on en $\vec{0}$ pour la première fois ? Après n pas, combien avons-nous visité en moyenne de positions différentes ? Ce sujet propose donc d'étudier ces questions. Pour cela, outre les probabilités, les séries entières sont utilisées.

2.2 Commentaires généraux

Le jury tient à souligner l'impolitesse dont ont fait preuve un certain nombre de candidats qui ont rendu une copie illisible, ou trop raturée, ou aux questions traitées dans le désordre, ou à l'encre trop pâle, ou encore comportant trop d'abréviations. Le correcteur attend de la part du candidat l'écriture en toutes lettres des notions utilisées, étant toléré le fait d'expliciter une abréviation pour l'employer par la suite dans le devoir.

Un certain nombre de questions donnaient la formule à démontrer, ce qui peut guider les candidats dans leur réflexion. Mais, il faut alors avoir en tête que les points ne seront pas accordés pour avoir trouvé la formule mais pour la rigueur de la démarche. Malheureusement, certains candidats ne jouent pas la « carte de l'honnêteté » et partant dans une mauvaise direction, ils truquent au fur et à mesure leurs calculs pour aboutir au résultat demandé. De plus, les candidats affirment, sans preuve, un résultat alors que les difficultés (et donc les points) se trouvent justement dans la preuve de ce résultat, parfois même ce résultat est faux. Rappelons que « *des affirmations extraordinaires nécessitent des preuves extraordinaires* » (Carl Sagan).

Le jury déplore le manque de rigueur avec lequel sont traitées l'analyse et les probabilités. Beaucoup d'erreurs ont été commises dans les questions de convergence de séries. La notion d'indépendance a donné lieu à bien des errements. Outre sa confusion encore fréquente avec celle d'incompatibilité, elle est souvent vue comme un mot clé à insérer à intervalles réguliers dans les raisonnements. Or des variables aléatoires ont souvent été affirmées indépendantes alors qu'en réalité elles ne le sont pas, simplement parce que cela permettait aux calculs d'aboutir. Une bonne compréhension de cette notion est indispensable pour maîtriser le fil des raisonnements de chaque question de probabilités. Le jury conseille donc aux élèves d'être attentifs aux exigences de rigueur de leurs professeurs.

2.3 Analyse détaillée des questions

La question 1 a été révélatrice de toutes les incompréhensions sur les séries et les séries entières. Certains ont utilisé le critère de D'Alembert pour obtenir un rayon de convergence. Cette stratégie était vouée à l'échec. En effet, sans aucune expression de $\mathrm{P}(S_n = 0)$ ou de $\mathrm{P}(R = n)$, comment savoir si ces quantités s'annulent et comment étudier la limite éventuelle du quotient ? Cela n'a pas empêché des candidats de prétendre y arriver. De plus, certains, pour essayer de montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n$ converge, majorent :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0)x^n\right|.$$

Cela n'a aucun sens, car précisément on ne sait pas si cette série converge.

Pour montrer que F est définie en 1, certains utilisent $F(1)$ comme un objet (volant) identifié. Certains se sont fourvoyés en affirmant que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = 0) = 1$. Beaucoup pensent qu'une série entière converge uniformément ou normalement sur son disque ouvert de convergence. Le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ou de la fonction exponentielle fournissent pourtant des contre-exemples. Certains affirment que « puisque G est définie en 1, elle y est continue » : doit-on en conclure que la partie entière, définie en 1, est continue en 1 ?

La question 2 était la première question réellement difficile du sujet (une copie sur dix a donc donné une réponse satisfaisante à la première partie de cette question). Parmi les réponses fausses, certains ont transformé l'évènement $(R = n)$ en l'évènement $(S_n = \vec{0})$ alors que ce sont des évènements différents, de même $(S_n - S_k = 0)$ est remplacé par $(S_{n-k} = 0)$ (confusion entre égalité d'évènements et évènements de même probabilité). D'autres ont écrit une formule de probabilité conditionnelle (avec le risque de faire une division par zéro) :

$$\mathrm{P}_{(R=k)}(S_n - S_k = \vec{0}), \quad \text{ou :} \quad \mathrm{P}(S_n - S_k = \vec{0} | R = k).$$

Étant gênés par $(R = k)$, ils l'ont ensuite fait disparaître mystérieusement sans explication. Certains candidats invoquent un mystérieux évènement conditionnel $(A|B)$ (l'évènement « A sachant B ») ce qui n'a aucun sens. Pour traiter la question correctement, il fallait justifier que les évènements $(R = k)$ et $(S_n - Sk = \vec{0})$ étaient indépendants en invoquant les variables aléatoires en jeu et le résultat communément désigné sous le nom de lemme des coalitions.

Pour la seconde partie, un certain nombre de candidats ont affirmé que les évènements $(R = k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ forment un système complet d'évènements. Or c'est faux, car $R(\Omega) = (\mathbb{N}\backslash\{0\}) \cup \{+\infty\}$. Encore une fois, affirmer quelque chose parce que cela permet d'arriver au résultat demandé ne permet pas d'avoir de points si l'affirmation en question est fausse.

Beaucoup ont reconnu un produit de Cauchy à la question 3, mais tous ne l'ont pas bien justifié. De plus, il y avait une difficulté (surmontable) avec les indices, certains se sont donc trompés mais ont miraculeusement trouvé la formule demandée au prix de modifications des expressions au gré des lignes, le jury n'a évidemment pas été dupe. Pour discuter de la limite, les candidats utilisent la relation algébrique qui relie F et G pour en déduire la même relation algébrique entre les limites de F et de G en 1 sans savoir si ces limites existent (sans compter le risque de tomber sur une forme indéterminée). C'est comme si ces candidats écrivaient :

$$\text{« } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1, \text{ donc : } \lim_{x\to+\infty} \cos(x)^2 + \lim_{x\to+\infty} \sin(x)^2 = 1. \text{ »}$$

Il suffisait pourtant d'exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$ puis de passer à la limite grâce à la continuité de G en 1 (peu souvent mentionnée), ainsi que les opérations sur les limites usuelles (quasiment jamais mentionnées). Pour certains candidats, il n'y a étrangement que deux possibilités : $G(1) = 0$ ou $G(1) = 1$, ce qui a laissé le jury dubitatif.

[Certains] n'ont pas vu la difficulté de la question 4 et considèrent comme évident que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(S_n = 0)$ diverge si et seulement si : $\lim\limits_{x\to 1-} F(x) = +\infty$, comme si ces deux objets avaient la même nature alors que l'un est la limite d'une suite et l'autre est celle d'une fonction.

La première partie de la question 5 était une question difficile, seul un candidat sur vingt a donné une réponse satisfaisante. Beaucoup ont voulu montrer que les évènements $(Y_i = 1)$ et $(R > i)$ sont égaux, alors que ce résultat est faux. En effet, on peut visiter à la i^{e} étape une nouvelle position tout en étant déjà retourné à $\vec{0}$, par exemple si $d = 1$ avec $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, alors l'évènement $(Y_3 = 1)$ est réalisé contrairement à $(R > 3)$. La deuxième partie n'a pas eu beaucoup plus de succès, beaucoup écrivent l'égalité demandée avec d'obscures explications, alors que pour la prouver, il aurait été plus sage de justifier que $N_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ puis d'utiliser la linéarité de l'espérance, puis que : $\mathrm{E}(Y_i) = \mathrm{P}(Y_i = 1)$. Finalement, là où il faut trois étapes, les candidats la présentent en une seule.

Lors de la question 6, les candidats ont quasiment tous vu que pour conclure, il suffisait d'appliquer le théorème de Cesàro. Ils affirment donc, sans preuve pour la plupart, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(R > n) = \mathrm{P}(R = +\infty)$. Alors qu'il y a évidemment un résultat de cours qui permet de déterminer la limite de $(\mathrm{P}(A_n))_n$ pour $(A_n)_n$ une suite décroissante d'évènements.

La démarche suivie par les candidats à la question 7 était généralement la bonne. Cependant, les explications n'étaient pas toujours convaincantes. L'indépendance mutuelle des variables aléatoires

$(X_n)_n$ n'a pas été souvent invoquée alors qu'elle est indispensable pour le calcul de $\mathrm{P}(S_{2n} = 0)$.

La question 8 a été peu souvent abordée. Pourtant, en utilisant la question précédente, on pouvait exprimer F comme une somme. On reconnaissait le développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1-4pqx^2}$. Attention à ne pas oublier de vérifier que $|4pqx^2| < 1$! En utilisant le résultat de la question 3, on obtenait l'expression de $G(x)$ pour $x \in]-1,1[$. Les candidats oublient trop souvent de mentionner la continuité de G et de $x \mapsto \sqrt{1-4pqx^2}$ en 1, pour en déduire la valeur de $\mathrm{P}(R = +\infty)$.

La question 9 n'a pas eu le succès espéré. Une méthode consistait à établir des encadrements en procédant par étapes :

— donner un encadrement propre de $f(t)$ pour $t \in [k, k+1]$ avec $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, par décroissance de $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et non sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$, ce que le jury a pu lire) ;

— par croissance de l'intégrale, obtenir un encadrement de $f(k)$;

— sommer ces inégalités pour $k \in [\![2, n]\!]$, pour obtenir un encadrement de l'intégrale avec des sommes partielles (ou l'inverse) ;

— calculer l'intégrale et montrer que la majoration et la minoration de la somme partielle (ou du reste) sont bien équivalents, la position de α par rapport à 1 jouait, bien entendu, un rôle.

Certains écrivent directement l'encadrement final, comme s'il allait de soi. Malheureusement, ces encadrements étaient parfois faux dus aux problèmes d'indices et de bords : $\displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ n'a du sens que si on l'a vérifié, car f n'est pas définie en 0. Parfois, la minoration proposée était plus grande que la majoration. Les deux membres étaient affirmés être équivalents sans justification (alors que cela dépend de α). Il serait bien de préciser où vivent les variables utilisées par les candidats : cette inégalité annoncée est-elle vraie pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ ou $k \geqslant 2$? Ce n'est pas au jury de le deviner.

Citons d'autres méthodes utilisées qui ont été acceptées si elles étaient traitées avec rigueur :

— la sommation des relations de comparaison appliquée à $n^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{n+1} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$;

— la comparaison de la série de Riemann à une série télescopique ;

— une part infime des candidats a utilisé le théorème de comparaison série-intégrale qui fournit la convergence de la série de terme général $f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ pour obtenir rapidement le résultat de la première partie de la question.

En revanche, certains ont fait appel à un théorème plus précis que le théorème de comparaison série-intégrale, mais hors programme, fournissant un équivalent de la somme partielle.

La question 10 a aussi été peu abordée car il fallait avoir résolu la question 8 pour la traiter.

La question 11 était d'une simplicité désarmante, il suffisait pour obtenir la première inégalité de minorer a_k par a_n dans l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 1$ en précisant bien que la multiplication par b_{n-k} conserve l'inégalité car $b_{n-k} \geqslant 0$, ce dernier point étant trop peu souvent cité.

La question 12 était aussi abordable. Le jury espérait un encadrement propre de $a_n B_n$ à l'aide de la question 11, puis un passage à la limite des deux côtés de l'encadrement et une conclusion par le théorème d'encadrement. Hélas, les candidats ont préféré user de leur imagination pour étaler leur mauvaise compréhension des petits o, des équivalents et des limites. Petit florilège de pseudo-résultats utilisés pour conclure :

— on a : $u_n \leqslant v_n$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

— on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \leqslant 1$, donc : $u_n \leqslant 1$.

— on a : $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$.

— on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, donc : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0 + w_n$.

— on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = v_n$.

On a écrit ici les résultats avec $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ au lieu des (a_n), (B_n) et (B_{m-n}) utilisés dans les copies. Peut-être, les candidats verront-ils mieux leurs erreurs ainsi. Exercice conseillé : justifier que toutes ces affirmations sont fausses.

Les quatre dernières questions ont donné des résultats satisfaisants sur environ une copie sur cent.

La question 13 était difficile. Néanmoins, l'équivalent de b_n permettait facilement, via un théorème de sommation des relations de comparaison, d'affirmer que $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$, en vérifiant, bien sûr, les hypothèses dudit théorème. Le cœur de la question consistait à trouver une suite $(m_n)_n$ telle que $m_n - n$ soit assez proche de n pour avoir $B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$, et en même temps que m_n soit proche de $m_n - n$ pour avoir $B_{m_n} - B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, $m_n = 2n$ ne fonctionnait pas car $B_{m_n} - B_{m_n-n}$ est de l'ordre de $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} k^{-1}$ qui ne tend pas vers 0, contrairement à ce que croient de nombreux candidats, mais vers une limite finie non nulle bien connue. Très peu de candidats ont donc proposé une suite $(m_n)_n$ convenable.

À l'instar des questions de probabilités 2 et 5, la question 14 était difficile, mais a été résolue avec brio par quelques candidats, soit par raisonnement probabiliste direct, soit par récurrence sur n.

La question 15 a été traitée par beaucoup de candidats, qui ont cru, à tort, pouvoir utiliser la question 7. En notant A_n (respectivement B_n) l'abscisse (respectivement l'ordonnée) de S_n, ces candidats ont affirmé, sans preuve ni explication, que « A_n et B_n sont indépendantes ». Pourquoi une telle affirmation ? Parce que cela arrangeait bien les candidats, pardi ! Malheureusement pour ces candidats, A_n et B_n n'étaient pas indépendantes (laissé en exercice au lecteur).

2.4 Conclusions

Cette épreuve était progressive, les six premières questions étaient abordables (*Note de moi-même : je les ai enlevées*) et permettaient aux candidats sérieux de gagner des points. Malheureusement, par manque de connaissances ou par volonté d'aller vite, un certain nombre de candidats n'a pas traité ces questions assez sérieusement. Nous conseillons donc aux candidats d'être attentifs à ce premier groupe de questions plutôt que d'aller tenter une ou deux questions faisables mais éparpillées dans le sujet ou de ne prendre son temps que pour les questions difficiles.

Ce sujet permettait de faire une distinction entre les excellents candidats et les élèves sérieux, mais aussi entre les candidats sérieux et ceux dont le travail pendant deux ans a pu manquer d'intensité. À l'opposé de copies très faibles, certaines excellentes, mais très rares, ont abordé tout le sujet de façon correcte.

3 Corrigé

Première partie

1. Les suites $\left(\mathrm{P}(S_n = \vec{0})1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{P}(R = n)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, donc par le lemme d'Abel, les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(S_n = \vec{0})x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(R = n)x^n$ sont supérieurs ou égaux à 1. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (x \mapsto \mathrm{P}(R = n)x^n)$ converge uniformément sur $[-1,1]$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-1,1]$, $|\mathrm{P}(R = n)x^n| \leqslant \mathrm{P}(R = n)$, donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x \mapsto \mathrm{P}(R = n)x^n\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(R = n) \overset{(*)}{=} \mathrm{P}(R \neq +\infty) \leqslant 1 < +\infty,$$

l'égalité $(*)$ découlant du fait que R soit à valeurs dans $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\bigcup\{+\infty\}$, de sorte que l'on ait : $(R\neq+\infty)=\Omega\setminus(R=+\infty)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}(R=n)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(R=n)$ (on a : $(R=0)=\emptyset$).

Le calcul ci-dessus démontre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(x\mapsto \mathrm{P}(R=n)x^n)$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$. Sa somme G est donc continue sur $[-1,1]$ en tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues : d'où le résultat. On a montré par ailleurs :

$$G(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}\left(R=n\right)1^n=\mathrm{P}(R\neq+\infty).$$

Remarque. Attention, la fonction G n'est pas une fonction génératrice car R n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$ (cette variable aléatoire peut prendre la valeur $+\infty$).

2. Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que : $k\leqslant n$. Si $k=0$, on a : $(R=0)=\emptyset$, et donc : $(S_n=\vec{0})\cap(R=0)=\emptyset$. On a donc directement le résultat dans ce cas :

$$\mathrm{P}((S_n=\vec{0})\cap(R=0))=0=\mathrm{P}(R=0)=\mathrm{P}(R=0)\mathrm{P}(S_{n-0}=\vec{0}).$$

Si $k\geqslant 1$, on remarque :

$$(S_n-S_k=\vec{0})=\left(\sum_{i=k+1}^{n}X_i=\vec{0}\right),\quad \text{et :}\quad (R=k)=\left(\sum_{i=1}^{k}X_i=\vec{0}\right)\bigcap\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{j}X_i\neq\vec{0}\right)\right),$$

avec la convention qu'une intersection indexée par un ensemble vide donne Ω (pour le cas $k=1$). Ainsi :

$$(R=k)=\left(\left(\sum_{i=1}^{1}X_i,\sum_{i=1}^{2}X_i,\ldots,\sum_{i=1}^{k-1}X_i,\sum_{i=1}^{k}X_i\right)\in\left(\mathbb{Z}^d\setminus\{\vec{0}\}\right)^{k-1}\times\{\vec{0}\}\right).$$

Comme $X_1,\ldots,X_k,X_{k+1},\ldots,X_n$ sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions les variables aléatoires $\sum\limits_{i=k+1}^{n}X_i$ et $\left(\sum\limits_{i=1}^{1}X_i,\sum\limits_{i=1}^{2}X_i,\ldots,\sum\limits_{i=1}^{k-1}X_i,\sum\limits_{i=1}^{k}X_i\right)$ sont indépendantes. Les événements $(R=k)$ et $(S_n-S_k=\vec{0})$ sont donc indépendants et on a :

$$\mathrm{P}\left((S_n=\vec{0})\cap(R=k)\right)=\mathrm{P}\left((S_n-S_k=\vec{0})\cap(R=k)\right)=\mathrm{P}\left(S_n-S_k=\vec{0}\right)\mathrm{P}(R=k).\qquad(*)$$

Pour obtenir l'identité de l'énoncé, il reste à démontrer : $\mathrm{P}\left(S_n-S_k=\vec{0}\right)=\mathrm{P}(S_{n-k}=\vec{0})$. Nous allons démontrer davantage, à savoir que S_n-S_k et S_{n-k} ont même loi (sauf dans la seconde méthode ci-dessous).

Soient $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k}\in\mathbb{Z}^d$. Comme $(X_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de X qui est à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, on a :

$$\mathrm{P}\left((X_1,\ldots,X_{n-k})=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k})\right)=\prod_{i=1}^{n-k}\mathrm{P}\left(X_i=\varepsilon_i\right)=\prod_{i=1}^{n-k}\mathrm{P}\left(X=\varepsilon_i\right)=\prod_{i=k}^{n}\mathrm{P}\left(X_i=\varepsilon_i\right),$$

d'où : $\mathrm{P}\left((X_1,\ldots,X_{n-k})=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k})\right)=\mathrm{P}\left((X_{k+1},\ldots,X_n)=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-k})\right)$. Cela montre que $(X_1,\ldots,X_{n-k})$ et $(X_{k+1},\ldots,X_n)$ suivent la même loi.

Voyons comment en déduire : $S_n-S_k\sim S_{n-k}$. Nous allons proposer trois méthodes pour le faire.

Première méthode. Comme $Z=(X_1,\ldots,X_{n-k})$ et $Y=(X_{k+1},\ldots,X_n)$ ont même loi, il en est de même de $f(Z)$ et $f(Y)$, avec f l'application :

$$(x_1,\ldots,x_{n-k})\in\left(\mathbb{Z}^d\right)^{n-k}\mapsto\sum_{i=1}^{n-k}x_i\in\mathbb{Z}^d.$$

Comme : $f(Z) = \sum_{i=1}^{n-k} X_i = S_{n-k}$, et : $f(Y) = \sum_{i=1}^{n-k} X_{k+i} = S_n - S_k$, on conclut : $S_n - S_k \sim S_{n-k}$.

Deuxième méthode. Posons : $\Lambda = \left\{(x_1, \ldots, x_{n-k}) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^{n-k} \mid \sum_{i=1}^{n-k} x_i = \vec{0}\right\}$.

L'ensemble Λ est au plus dénombrable car $\left(\mathbb{Z}^d\right)^{n-k}$ est dénombrable en tant que produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Comme $(X_1, \ldots, X_{n-k})$ et $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ ont même loi, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n - S_k = 0) = \mathrm{P}\left((X_{k+1}, \ldots, X_n) \in \Lambda\right) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{P}\left((X_{k+1}, \ldots, X_n) = \lambda\right) \\
&= \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{P}\left((X_1, \ldots, X_{n-k}) = \lambda\right) \\
&= \mathrm{P}\left(S_{n-k} = 0\right),
\end{aligned}$$

comme annoncé.

Troisième méthode. Elle nécessite un petit lemme intéressant en soi :

> Soient A et B deux variables aléatoires réelles indépendantes, ayant même loi respectivement que deux variables aléatoires indépendantes A' et B' sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Alors $A + B$ et $A' + B'$ ont même loi.

Démontrons ce lemme. On remarque que $E = A(\Omega) \cup A'(\Omega)$ et $F = B(\Omega) \cup B'(\Omega)$ sont des ensembles au plus dénombrables. Soit $x \in E + F$. On a :

$$(A + B = x) = \bigcup_{a \in E} (A = a, B = x - a),$$

donc par réunion disjointe et par indépendance :

$$\mathrm{P}(A + B = x) = \sum_{a \in E} \mathrm{P}(A = a) \mathrm{P}(B = x - a) = \sum_{a \in E} \mathrm{P}(A' = a) \mathrm{P}(B' = x - a) = \mathrm{P}(A' + B' = x)$$

On procède ensuite par récurrence sur $m = n - k$, pour montrer : $S_n - S_k \sim S_{n-k}$. L'initialisation est vraie pour $m = 1$ et pour l'hérédité, on utilise le lemme.

Peu importe la méthode employée, on a bien : $\mathrm{P}((S_n = \vec{0}) \cap (R = k)) = \mathrm{P}(R = k)\mathrm{P}(S_{n-k} = \vec{0})$.

Conclusion. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La famille $((R = k))_{(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{+\infty\}}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(S_n = \vec{0}) &= \mathrm{P}\left((R = +\infty) \cap (S_n = \vec{0})\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left((R = k) \cap (S_n = \vec{0})\right) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left((R = k) \cap (S_n = \vec{0})\right)
\end{aligned}$$

car on a pour tout $k > n$, l'égalité évidente : $(R = k) \cap (S_n = \vec{0}) = \emptyset = (R = +\infty) \cap (S_n = \vec{0})$. Avec la première égalité démontrée dans cette question, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}(S_n = \vec{0}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(R = k)\mathrm{P}(S_{n-k} = \vec{0}).$$

3. On effectue un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence 1. On obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F(x)G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(R = k)\mathrm{P}(S_{n-k} = \vec{0})\right) x^n.$$

Pour $n=0$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \mathrm{P}(R=k)\mathrm{P}(S_{n-k}=\vec{0}) = \mathrm{P}(R=0)\mathrm{P}(S_0=\vec{0}) = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, d'après la question précédente on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(R=k)\mathrm{P}(S_{n-k}=\vec{0}) = \mathrm{P}(R=0)\mathrm{P}(S_n=\vec{0}) + \mathrm{P}(S_n=\vec{0}) = \mathrm{P}(S_n=\vec{0}),$$

donc :

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x)G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n=\vec{0})x^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n=\vec{0})x^n = -1 + F(x).$$

d'où : $\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)$, et ainsi : $\forall x \in]-1,1[,\ F(x)\,(1-G(x)) = 1$.
On en déduit que $1 - G(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-1,1[$, et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F(x) = \frac{1}{1-G(x)}.$$

Si $\mathrm{P}(R \neq +\infty) = 1$ alors d'après la question 1, on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad G(x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(R=n) = \mathrm{P}(R \neq +\infty) = 1,$$

donc : $\forall x \in]-1,1[$, $1 - G(x) \geqslant 0$. Or $G(1) = 1$ et G est continue sur $[-1,1]$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-G(x)) = 0$. L'égalité ci-dessus entre F et G implique, si $\mathrm{P}(R \neq +\infty) = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty.$$

Si : $\mathrm{P}(R \neq +\infty) \neq 1$, alors toujours d'après la question 1 on a : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-G(x)) = 1 - \mathrm{P}(R \neq +\infty) > 0$, et donc :

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{1}{1-\mathrm{P}(R \neq +\infty)},$$

d'où le résultat selon les hypothèses sur $\mathrm{P}(R \neq +\infty)$.

4. Supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(S_n=\vec{0})$ converge. Par le théorème d'Abel radial, la fonction F admet une limite finie en 1 ; d'après la question précédente, c'est vrai si et seulement si : $\mathrm{P}(R \neq +\infty) \neq 1$. Par contraposée, on a montré que si : $\mathrm{P}(R \neq +\infty) = 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(S_n=\vec{0})$ diverge.

   Supposons que la série $\sum \mathrm{P}(S_n=\vec{0})$ diverge. Comme c'est une série divergente à termes positifs, elle tend vers l'infini. On aimerait conclure en écrivant :

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(S_n=\vec{0})x^n = \lim_{N\to+\infty} \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(S_n=\vec{0})x^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(S_n=\vec{0}) = +\infty.$$

   Il s'agit cependant d'un problème d'interversion qui n'est pas couvert par le théorème de la double limite. Pas grave : la méthode pour s'en sortir ici est classique, en tirant profit de la positivité du terme général de la série. On a pour tout $x \in [0,1[$:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad F(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(S_n=\vec{0})x^n.$$

   Chaque membre de cette inégalité a une limite (éventuellement infinie) quand $x \to 1^-$. Pour le membre de gauche, c'est par croissance de la fonction F (c'est en effet une somme de fonctions croissantes sur $[0,1[$). Quand $x \to 1^-$, on obtient :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to 1^-} F(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(S_n=\vec{0}).$$

Quand $N \to +\infty$, on a d'après ce qui précède : $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) \geqslant +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$. D'après la question précédente, c'est vrai si et seulement si : $\mathrm{P}(R \neq +\infty) = 1$. D'où le sens direct, ce qui achève de démontrer l'équivalence demandée.

5. Soit $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On remarque que : $(Y_i = 1) = \bigcap\limits_{k=0}^{i-1} (S_i \neq Sk)$, donc :

$$(Y_i = 0) = \bigcup_{k=0}^{i-1} (S_i = Sk) = \bigcup_{k=0}^{i-1} \left(\sum_{j=k+1}^{i} X_j = \vec{0} \right).$$

De façon analogue à la question 2, on montre que $(X_1, \ldots, X_i)$ et $(X_i, \ldots, X_1)$ sont de même loi, donc leurs images par la fonction $(x_1, \ldots x_i) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^i \mapsto \left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j, \ldots, x_{i-1} + x_i, x_i \right) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^i$ le sont également et on en déduit :

$$\mathrm{P}\left(Y_i = 0\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{i-1} \left(\sum_{j=k+1}^{i} X_j = \vec{0} \right) \right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{\ell=1}^{i} \left(\sum_{j=1}^{\ell} X_j = \vec{0} \right) \right),$$

or : $\bigcup\limits_{\ell=1}^{i} \left(\sum\limits_{j=1}^{\ell} X_j = \vec{0} \right) = \bigcup\limits_{\ell=1}^{i} \left(S_\ell = \vec{0} \right) = (R \leqslant i)$, donc : $\mathrm{P}\left(Y_i = 0\right) = \mathrm{P}\left(R \leqslant i\right)$. En passant aux événements contraires, on obtient :

$$\mathrm{P}(Y_i = 1) = \mathrm{P}(R > i).$$

Or par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que : $N_n = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Les Y_i suivant des lois de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(Y_i = 1) = \mathrm{P}(R > i)$, on a donc par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(Y_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(Y_i = 1\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(R > i).$$

6. On remarque que $((R > i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion. Par le théorème de continuité décroissante, on a :

$$\lim_{i\to+\infty} \mathrm{P}(R > i) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (R > j) \right) = \mathrm{P}(R = +\infty).$$

Or d'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\dfrac{\mathrm{E}(N_n)}{n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{P}(R > i)$. À l'aide du théorème de Cesàro, on peut conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(N_n)}{n} = \mathrm{P}(R = +\infty).$$

Deuxième partie

7. Soit $\omega \in \Omega$. On a : $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $X_i(\omega) \equiv 1 \bmod 2$, donc : $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_p(\omega) \equiv p \bmod 2$. On en déduit : $S_{2n+1}(\omega) \equiv 1 \bmod 2$, puis : $S_{2n+1}(\omega) \neq 0$. Ceci montre que : $(S_{2n+1} = 0) = \emptyset$, d'où :

$$\mathrm{P}(S_{2n+1} = 0) = 0.$$

(Ce raisonnement de congruence formalise l'idée qu'il faut autant de 1 que de -1 pour revenir à l'origine, ce qui est impossible s'il y a un nombre impair de marches.)

Pour obtenir la probabilité de $(S_{2n}=0)$, nous proposons deux approches.

Première méthode (dénombrement). Notons : $\Lambda = \left\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}) \in \{-1,1\}^{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0\right\}$.

Comme les X_i sont presque sûrement à valeurs dans $\{-1,1\}$, on a :

$$(S_{2n}=0) = \left(\sum_{i=1}^{2n} X_i = 0\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left((X_1,\ldots,X_{2n}) = \lambda\right).$$

Comme la réunion est finie et disjointe on a :

$$\mathrm{P}(S_{2n}=0) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{P}\left((X_1,\ldots,X_{2n}) = \lambda\right).$$

Soit $\lambda \in \Lambda$. On écrit $\lambda = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})$.
On remarque que nécessairement : $\mathrm{card}\left(\{i \in [\![1,2n]\!] \mid \varepsilon_i = 1\}\right) = \mathrm{card}\left(\{i \in [\![1,2n]\!] \mid \varepsilon_i = -1\}\right) = n$, donc par indépendance des X_i qui suivent toutes la même loi que X, on a :

$$\mathrm{P}\left((X_1,\ldots,X_{2n}) = \lambda\right) = \prod_{i=1}^{2n} \mathrm{P}\left(X = \varepsilon_i\right) = p^n q^n = (pq)^n.$$

De plus, pour caractériser un élément de Λ, il faut et il suffit de choisir la position des n valeurs « 1 » d'un $2n$-uplet de $\{-1,1\}^{2n}$, donc : $\mathrm{card}\left(\Lambda\right) = \binom{2n}{n}$, donc :

$$\mathrm{P}(S_{2n}=0) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (pq)^n = \mathrm{card}\left(\Lambda\right) \times (pq)^n = \binom{2n}{n}(pq)^n.$$

Deuxième méthode (utilisation d'une loi binomiale). Posons : $\forall i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $Y_i = \dfrac{1+X_i}{2}$, de sorte que : $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$. On remarque par le lemme des coalitions que les Y_i sont indépendantes. On en déduit que $T_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} Y_i$ vérifie : $T_{2n} \sim \mathcal{B}(2n,p)$. Or :

$$T_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1+X_i}{2} = n + \frac{S_{2n}}{2},$$

ce dont on déduit immédiatement :

$$\mathrm{P}(S_{2n}=0) = \mathrm{P}(T_{2n}=n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

En conclusion, on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n} p^n q^n, \quad \mathrm{P}(S_{2n+1}=0) = 0.$$

8. Soit $x \in]-1,1[$. On a, à l'aide de la question précédente, et par exemple en utilisant le théorème de sommation par paquets pour séparer les termes pairs et impairs (c'est licite par convergence absolue d'une série entière en tout point de son intervalle ouvert de convergence) :

$$F(x) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S_{2n}=0)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(pqx^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left(4pqx^2\right)^n.$$

On reconnaît le développement en série entière *non usuel* suivant :

$$\forall u \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} u^n,$$

qui découle du développement en série entière (qui lui est usuel) de $u \mapsto (1+u)^\alpha$. Nous rappelons comment l'obtenir à la fin de cette réponse (ainsi que celui de $u \mapsto \sqrt{1-u}$). Vérifions que $4pqx^2$ est bien dans $]-1,1[$. Une étude de la fonction $t \mapsto t(1-t)$ montre que : $0 \leqslant p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$, le maximum étant atteint en $\frac{1}{2}$. Comme : $x^2 \in [0,1[$, on a : $4pqx^2 \in [0,1[$. Il est par conséquent licite de poser : $u = 4pqx^2$, et on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} \neq 0.$$

Ainsi par la question 3 on a : $G(x) = 1 - \dfrac{1}{F(x)}$ d'où :

$$G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}.$$

D'après la question 1, l'application G est continue sur $[-1,1]$ et on a :

$$\mathrm{P}(R \neq +\infty) = G(1) = \lim_{x \to 1^-} G(x) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{1-4p+4p^2} = 1 - \sqrt{(1-2p)^2},$$

donc :

$$\mathrm{P}(R = +\infty) = 1 - \mathrm{P}(R \neq +\infty) = |2p-1|\,.$$

Or : $p - q = p - (1-p) = 2p - 1$, donc : $\mathrm{P}(R = +\infty) = |p-q|$. Pour obtenir la loi, nous développons en série entière $x \mapsto \sqrt{1-x}$. C'est un autre développement non usuel dont nous expliquerons aussi l'obtention ci-dessous. On a :

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!} u^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}n} u^n.$$

Comme : $4pqx^2 \in]-1,1[$, on en déduit :

$$G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n-2}{n-1} 4^n (pq)^n}{2^{2n-1}n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n} x^{2n}.$$

Or on a aussi : $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(R=n)x^n$, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière :

$$\mathrm{P}(R=0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(R = 2n+1) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \mathrm{P}(R=2n) = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n}.$$

Il est cohérent que R soit presque sûrement paire.
La valeur de $\mathrm{P}(R = +\infty)$ ayant été donnée plus haut, on a bien déterminé la loi de R.
Remarque. Rappelons comment on obtient le développement en série entière de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u}}$ et comment en déduire rapidement celui de $u \mapsto \sqrt{1-u}$. Le développement en série entière usuel de $u \mapsto (1+u)^\alpha$, composé avec $u \mapsto -u$ et avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, donne :

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-u)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!} u^n.$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.$$

On pourrait faire un raisonnement analogue avec $\alpha = \frac{1}{2}$ pour obtenir le développement en série entière de $u \mapsto \sqrt{1-u}$, mais pour éviter des redondances je vais me contenter d'intégrer terme à terme celui ci-dessus, puis diviser l'identité obtenue par -2, de sorte que :

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{u^{n+1}}{n+1} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} u^n.$$

9. Soit $\alpha < 1$. On sait trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ soit par une comparaison série-intégrale, soit par le théorème de sommation des équivalents. Illustrons la seconde façon de faire, peut-être moins habituelle (et qui a l'avantage d'être moins exigeante en hypothèses : notamment, pas de distinction de cas selon le signe de α !). On a au voisinage de $+\infty$:

$$(k+1)^{-\alpha+1} - k^{-\alpha+1} = k^{-\alpha+1}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\alpha+1} - 1\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} (1-\alpha)k^{-\alpha}. \qquad (*)$$

En utilisant le théorème de sommation des équivalents avec la série divergente $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k^{-\alpha}$ (car $\alpha < 1$) on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{-\alpha+1} - k^{-\alpha+1}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

le dernier équivalent étant vrai car $n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Supposons à présent $\alpha > 1$. On réutilise l'équivalent $(*)$, quitte à raisonner avec les séries opposées pour avoir des termes positifs. Comme la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k^{-\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, on a cette fois-ci :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left((k+1)^{-\alpha+1} - k^{-\alpha+1}\right) = \frac{-n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

d'où le résultat.

Remarque. L'énoncé ne le demande pas, mais on peut obtenir un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ par une démarche analogue. On a : $\displaystyle\frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) > 0$, donc par le théorème de sommation des équivalents :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n),$$

où le dernier équivalent découle de : $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

10. Quand $p = q = \frac{1}{2}$, le calcul de la question 8 donne :

$$\mathrm{P}(R=2n) = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n4^n} = \frac{2(2(n-1))!}{n4^n((n-1)!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{2\pi(2(n-1))}\left(\frac{2(n-1)}{e}\right)^{2n-2}}{n4^n(2\pi(n-1))\left(\frac{n-1}{e}\right)^{2n-2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}},$$

où l'équivalent a été trouvé *via* la formule de Stirling. D'où le résultat.

On nous demande d'en déduire un équivalent simple de $\mathrm{E}(N_n)$. Notons que la question 6 n'est d'aucune aide : elle nous enseigne seulement que : $\mathrm{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, parce que dans le cas particulier de cette question : $\mathrm{P}(R=+\infty)=|p-q|=0$. Nous allons revenir à l'expression de la question 5 pour obtenir cette espérance. Trouvons un équivalent de $\mathrm{P}(R>i)$ quand $i\to+\infty$. Par commodité, nous raisonnons sur la parité (puisque R est presque sûrement à valeurs dans l'ensemble $2\mathbb{N}\setminus\{0\}$).

On a pour tout $p\in\mathbb{N}$, $(R>2p)=(R>2p+1)=\bigsqcup\limits_{k=p+1}^{+\infty}(R=2k)$, donc :

$$\mathrm{P}\left(R>2p\right)=\mathrm{P}\left(R>2p+1\right)=\sum_{k=p+1}^{+\infty}\mathrm{P}\left(R=2k\right).$$

Ainsi en utilisant la sommation des équivalents, avec : $\mathrm{P}(R=2k)\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{k^{3/2}}$ et la série convergente à termes positifs $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k^{3/2}}$:

$$\mathrm{P}\left(R>2p\right)=\mathrm{P}\left(R>2p+1\right)\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=p+1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\overset{(q.\,9)}{\underset{p\to+\infty}{\sim}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2}{\sqrt{p}}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2p}}.$$

De même : $\mathrm{P}\left(R>2p+1\right)\underset{p\to+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2p+1}}$. Cela peut se retraduire en termes de limite (égale à 1) des suites extraites d'indice pair ou d'indice impair de la suite $\left(\dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt{i}}{\sqrt{2}}\mathrm{P}\left(R>i\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$. On en déduit que cette suite converge aussi vers 1, c'est-à-dire :

$$\mathrm{P}\left(R>i\right)\underset{i\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{i}}.$$

En utilisant encore une fois le théorème de sommation des équivalents et la question précédente, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\left(R>i\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2}n^{1-1/2}}{\sqrt{\pi}(1-1/2)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, et : $\mathrm{E}(N_n)=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{P}\left(R>i\right)$ d'après la question 5, on en déduit l'équivalent :

$$\mathrm{E}(N_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

Troisième partie

11. On a, par décroissance de $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et stricte positivité de $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$:

$$1=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\geqslant\sum_{k=0}^{n}a_nb_{n-k}=a_n\sum_{j=0}^{n}b_j=a_nB_n,$$

d'où : $a_n\leqslant\dfrac{1}{B_n}$ (car $B_n>0$), et :

$$1=\sum_{k=0}^{m}a_kb_{m-k}=\sum_{k=0}^{n-1}a_kb_{m-k}+\sum_{k=n}^{m}a_kb_{m-k}\leqslant a_0\sum_{k=0}^{n-1}b_{m-k}+a_n\sum_{k=n}^{m}b_{m-k}.$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} b_{m-k} = \sum_{j=0}^{m-n} b_j$, et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} = \sum_{j=m-n+1}^{m} b_j = B_m - B_{m-n}$. On en déduit :

$$1 \leqslant a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n}).$$

12. Pour tout n assez grand, on a $m_n > n$ donc à l'aide de la question précédente et par stricte positivité de $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\frac{1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})}{B_{m_n-n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{B_n},$$

donc :

$$\frac{B_n}{B_{m_n-n}}\left(1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})\right) \leqslant a_n B_n \leqslant 1.$$

Par hypothèse on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{B_{m_n-n}}\left(1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})\right) = 1$, donc par le théorème des gendarmes : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{B_n}$.

13. En utilisant la remarque de la question 9, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{C}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n)$ puis par sommation des relation de comparaison :

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n).$$

d'où : $B_n = C\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$. Pour obtenir un équivalent asymptotique de a_n, posons : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $m_n = \lfloor n\ln(n)\rfloor$, et : $m_0 = 0$ (peu importe m_0 à vrai dire).
Pour tout $n \geqslant e^2$, on a :

$$m_n \geqslant 2n > n, \qquad (*)$$

et pour tout n assez grand, on a : $n\ln(n) \leqslant m_n \leqslant n\ln(n) + 1$, donc quand $n \to +\infty$: on a : $m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$, puis :

$$m_n - n = n\ln(n) - n + \underset{n\to+\infty}{o}(n\ln(n)) = n\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(n\ln(n)),$$

donc :

$$B_{m_n-n} = C\ln(m_n - n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(m_n - n)).$$

Or :

$$\begin{aligned}\ln(m_n - n) = \ln\Big(n\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(n\ln(n))\Big) &= \ln(n) + \ln(\ln(n)) + \ln(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1))\\ &= \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n)).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$B_{m_n-n} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\ln(n) \sim B_n. \qquad (\dagger)$$

Enfin : $B_{m_n} - B_{m_n-n} = \displaystyle\sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} b_k$, et l'équivalent $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n}$ nous fournit $A \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k \geqslant A$, $0 < b_k \leqslant \dfrac{2C}{k}$.
Comme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(m_n - n + 1) = +\infty$, ceci nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait : $m_n - n + 1 \geqslant A$. Ainsi pour tout entier $n \geqslant N$, on a :

$$0 \leqslant B_{m_n} - B_{m_n-n} \leqslant \sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} \frac{2C}{k} \leqslant \frac{2Cn}{km_n - n + 1},$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2Cn}{km_n - n + 1} = 0$, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} (B_{m_n} - B_{m_n-n}) = 0. \tag{‡}$$

Avec (∗), (†) et (‡), les hypothèses de la question 12 sont vérifiées et donc on a bien :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{C\ln(n)}.$$

Quatrième partie

14. Soit H la somme de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0} \mathrm{P}\left(R > k\right) x^k$. On montre comme à la question 1 que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Soit $x \in]-1,1[$. On sait que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (somme de série entière de rayon de convergence 1). De plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Omega \setminus (R > k) = (R \leqslant k) = \bigcup_{i=0}^{k} (R = i)\,.$$

On a donc existence des deux membres et l'égalité :

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(R \leqslant n\right) x^n = \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}\left(R = i\right)\right) x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{G(x)}{1-x}$$

On a en effet reconnu un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence 1. En effectuant un nouveau produit de Cauchy puis en utilisant la question 3, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_k = \vec{0})\mathrm{P}(R > n-k)\right) x^n = F(x)H(x) = \frac{F(x) - F(x)G(x)}{1-x} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, on a :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_k = \vec{0})\mathrm{P}(R > n-k).$$

15. Pour $n = 0$, on a : $(S_{2\cdot 0} = \vec{0}) = (S_0 = \vec{0}) = \Omega$ et on a bien : $\left(\dfrac{\binom{2\cdot 0}{0}}{4^0}\right)^2 = 1 = \mathrm{P}(\Omega)$.

On suppose désormais : $n \geqslant 1$. Comme dans la question 7, nous proposons deux façons d'obtenir le résultat attendu.

Première méthode (dénombrement). Notons $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ et :

$$\Lambda = \left\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) \in \{\vec{e}_1, -\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_2\} \mid \sum_{j=0}^{2n} \varepsilon_j = \vec{0}\right\}$$

En raisonnant comme dans la question 7, on peut montrer : $\mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \mathrm{card}\,(\Lambda) \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2n}$. Calculons ce cardinal.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, posons : $\Lambda_k = \{(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_{2n}) \in \Lambda \mid \mathrm{card}\,(\{i \in [\![1,2n]\!] \mid \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_1\}) = k\}$, de sorte que l'on ait :

$$\Lambda = \bigsqcup_{k=0}^{n} \Lambda_k, \quad \text{puis :} \quad \mathrm{card}\,(\Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}\,(\Lambda_k)\,.$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On va dénombrer les éléments de Λ_k.

Pour caractériser un élément de cet ensemble :

— on commence par choisir les positions des $\vec{e}_1$, puis des $-\vec{e}_1$ et enfin des $\vec{e}_2$; les places restantes seront attribuées aux $-\vec{e}_2$;
— parmi les places dévolues aux $\vec{e}_1$, on choisit les k positions des $\vec{e}_1$, on en trouve $\binom{2n}{k}$ possibles ;
— parmi les places dévolues aux $-\vec{e}_1$, il y en a nécessairement k également pour que la somme soit nulle, on en trouve $\binom{2n-k}{k}$ possibles ;
— Il reste alors $2n-2k$ places à attribuer à parts égales aux $\vec{e}_2$ et $-\vec{e}_2$: il y a donc $\binom{2n-2k}{n-k}$ possibilités pour les $\vec{e}_2$.

Ainsi :

$$\operatorname{card}(\Lambda_k) = \binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{(2n)!\cancel{(2n-k)!}\cancel{(2n-2k)!}}{\cancel{(2n-k)!}k!\cancel{(2n-2k)!}k!(n-k)!(n-k)!} = \binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2,$$

donc :

$$\operatorname{card}(\Lambda) = \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Pour simplifier cette somme, remarquons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ est, par définition du produit de polynômes, le coefficient de T^n dans le polynôme $(1+T)^n\cdot(1+T)^n = (1+T)^{2n}$ (on décompose chaque facteur du membre de gauche dans la base canonique grâce à la formule du binôme de Newton). Ce coefficient est aussi $\displaystyle\binom{2n}{n}$, toujours par la formule du binôme. Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. On peut conclure :

$$\operatorname{card}(\Lambda) = \binom{2n}{n}\times\binom{2n}{n},$$

puis : $\displaystyle \mathrm{P}(S_{2n}=\vec{0}) = \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}^2.$

Deuxième méthode (utilisation de lois binomiales). L'idée est de se ramener à deux marches aléatoires dans $\mathbb{Z}$, correspondant aux mouvements horizontaux et verticaux respectivement. C'est du moins ce qu'on voudrait faire naïvement ; cependant la possibilité de « surplace » dans une direction n'en fait pas le meilleur choix : on va plutôt se ramener à la dimension 1 en regardant les déplacements « en diagonale ».

Pour tous $i\in\{1,2\}$ et $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, notons $\pi_i : (a_1,a_2)\mapsto a_i$ la projection naturelle de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}$, et : $X_k^{(i)} = \pi_i(X_k)$. Notons également : $u_k = X_k^{(1)} + X_k^{(2)}$, et : $v_k = X_k^{(1)} - X_k^{(2)}$ de sorte que u_k et v_k suivent des lois uniformes sur $\{-1,1\}$.

On remarque que : $((u_k,v_k)=(1,1)) = (X=(1,0))$, donc :

$$\mathrm{P}\left((u_k,v_k)=(1,1)\right) = \frac{1}{4} = \mathrm{P}\left(u_k=1\right)\cdot\mathrm{P}\left(v_k=1\right).$$

On montre de même :

$$\forall(\varepsilon,\varepsilon')\in\{-1,1\}^2,\ \mathrm{P}\left((u_k,v_k)=(\varepsilon,\varepsilon')\right) = \frac{1}{4} = \mathrm{P}\left(u_k=\varepsilon\right)\mathrm{P}\left(v_k=\varepsilon'\right),$$

donc u_k et v_k sont des variables aléatoires indépendantes.

Notons enfin, pour tout $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\displaystyle U_m = \sum_{k=1}^{m} u_k$ et : $\displaystyle V_m = \sum_{k=1}^{m} v_k$.

On remarque : $\left(S_{2n}=\vec{0}\right) = (U_{2n}=0)\bigcap(V_{2n}=0)$. Montrons par récurrence sur $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ que U_m et V_m sont indépendantes.

L'initialisation a été établi pour $m = 1$ car $U_1 = u_1$ et $V_1 = v_1$.
Pour l'hérédité, soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que U_m et V_m soient indépendantes. Soient $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a, b) \in \{-1,1\}^2$. On a :

$$((U_m, u_{m+1}) = (A, a),\ (V_m, v_{m+1}) = (B, b)) \ = \ ((U_m, V_m) = (A, B),\ (u_{m+1}, v_{m+1}) = (a, b))\,.$$

Avec le lemme des coalitions, on a l'indépendance de (U_m, V_m) et de (u_{m+1}, v_{m+1}) qui sont respectivement fonctions de $X_1, \ldots, X_m$ et de X_{m+1}. Ainsi :

$$\mathrm{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a),\ (V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right] = \mathrm{P}\left((U_m, V_m) = (A, B)\right) \cdot \mathrm{P}\left((u_{m+1}, v_{m+1}) = (a, b)\right).$$

Ensuite :

$$\mathrm{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a),\ (V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right] = \mathrm{P}\left(U_m = A\right) \cdot \mathrm{P}\left(V_m = B\right) \cdot \mathrm{P}\left(u_{m+1} = a\right) \cdot \mathrm{P}\left(v_{m+1} = b\right).$$

En réutilisant le lemme des coalitions, on obtient :

$$\mathrm{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a),\ (V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right] = \mathrm{P}\left[(U_m, u_{m+1}) = (A, a)\right] \cdot \mathrm{P}\left[(V_m, v_{m+1}) = (B, b)\right].$$

On a établi que (U_m, u_{m+1}) et (V_m, v_{m+1}) sont indépendantes. Par le lemme des coalitions, $U_{m+1} = U_m + u_{m+1}$ et $V_{m+1} = V_m + v_{m+1}$ le sont aussi, ce qui prouve le résultat au rang $m + 1$.
Par principe de récurrence, U_m et V_m sont indépendantes pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En particulier U_{2n} et V_{2n} sont indépendantes. Ainsi : $\mathrm{P}\left(S_{2n} = 0\right) = \mathrm{P}\left(U_{2n} = 0\right) \cdot \mathrm{P}\left(V_{2n} = 0\right)$. En raisonnant comme à la question 7, on montre : $\mathrm{P}\left(U_{2n} = 0\right) = \mathrm{P}\left(V_{2n} = 0\right) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$, ce qui permet de conclure :

$$\mathrm{P}(S_{2n} = \vec{0}) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 = \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}^2.$$

16. En reprenant l'équivalent $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ obtenu à la fin de la question 10, on obtient : $\mathrm{P}\left(S_{2n} = \vec{0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 14, on a :

$$1 = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{P}(S_k = \vec{0})\mathrm{P}(R > 2n - k) = \sum_{p=0}^{2n} \mathrm{P}(S_{2n-p} = \vec{0})\mathrm{P}(R > p).$$

De plus on remarque : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}\left(S_{2i+1} = \vec{0}\right) = 0$, comme à la question 7. Ainsi :

$$1 = 0 + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_{2n-2k} = \vec{0})\mathrm{P}(R > 2k).$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathrm{P}(R > 2n)$, et : $b_n = \mathrm{P}(S_{2n} = \vec{0})$. À l'aide de la question précédente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de plus on a : $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\pi}$. La suite (a_n) est bien décroissante à valeurs positives. Pour appliquer la question 13, il reste à vérifier qu'elle ne s'annule jamais.
On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule. Ceci nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\mathrm{P}(R > N) = a_N = 0$.
Alors : $\forall k \geqslant N$, $\mathrm{P}(R > k) = 0$, car : $(R > k) \subseteq (R > N)$. On aurait donc, par la question 14 :

$$\forall n \geqslant N, \quad 1 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_k = \vec{0})\mathrm{P}(R > n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_{n-k} = \vec{0})\mathrm{P}(R > k) = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{P}(S_{n-k} = \vec{0})\mathrm{P}(R > k),$$

donc en remarquant que $S_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est vrai pour les suites extraites d'indice pair et d'indice impair), on obtient par combinaison linéaire :

$$\sum_{k=0}^{N} \mathrm{P}(S_{n-k}=\vec{0})\mathrm{P}(R>k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où : $0=1$, ce qui est impossible. Par l'absurde, on a montré : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>0$.
Les hypothèses de la partie III étant vérifiées ainsi que celle de la question 13, on déduit :

$$\mathrm{P}(R>2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi\ln(2n)}.$$

En raisonnant comme dans la question 10, on en déduit : $\mathrm{P}(R>n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi\ln(n)}$. En utilisant la question 5 et le théorème de sommation des équivalents avec la série divergente $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{\ln(n)}$ (nous justifions ce point ci-dessous), on trouve :

$$\mathrm{E}(N_n) = 1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(R>i) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\ln(i)}.$$

Nous justifions à présent la divergence de cette série. Notre façon de procéder va en même temps pour nous fournir un équivalent. On pourrait encore procéder par une comparaison série-intégrale (bien que ce ne soit pas direct vu que $x\mapsto\dfrac{1}{\ln(x)}$ n'admet pas de primitive s'exprimant à l'aide de fonctions usuelles : on s'en sortirait malgré tout *via* une intégration par parties ou une comparaison asymptotique à $x\mapsto\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{(\ln(x)^2}$ qui est la dérivée de $x\mapsto\dfrac{x}{\ln(x)}$), mais je veux à nouveau illustrer l'emploi du théorème de sommation des équivalents. On a :

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{n}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n+1)}+n\left(\frac{1}{\ln(n+1)}-\frac{1}{\ln(n)}\right) = \frac{1}{\ln(n+1)} - n\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)},$$

et on a : $n\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\ln(n))^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)$, donc :

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)} > 0.$$

Or la série télescopique $\sum_{n\geqslant 2}\left(\dfrac{n+1}{\ln(n+1)}-\dfrac{n}{\ln(n)}\right)$ diverge par le lien suite-série, étant donné que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\ln(n)}=+\infty$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{\ln(n)}$ diverge aussi, et par le théorème de sommation des équivalents :

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\ln(i)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i+1}{\ln(i+1)}-\frac{i}{\ln(i)}\right) = \frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{2}{\ln(2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}.$$

On conclut :

$$\mathrm{E}(N_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi\ln(n)}.$$