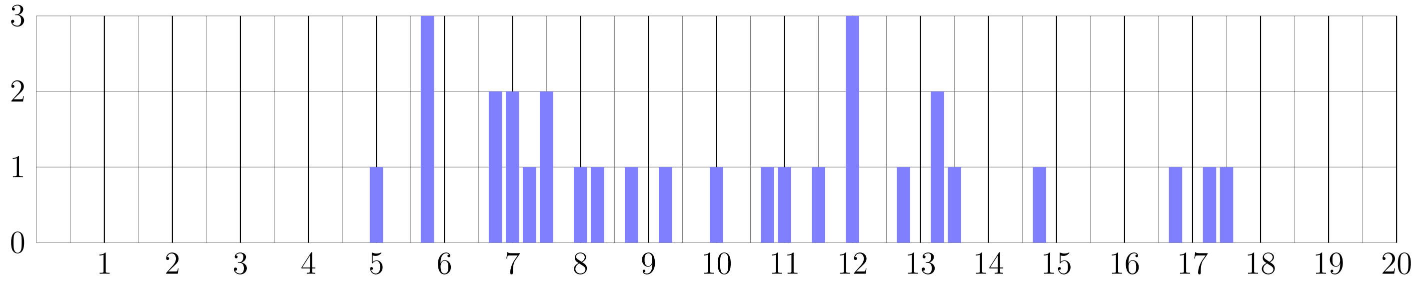
Devoir sur table n° 8 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **57 points**.
Moyenne : 10,15. **Écart-type :** 3,62.
Premier quartile : 7,0625. **Médiane :** 9,625. **Troisième quartile :** 12,5625.

Redite des devoirs précédents.

1. Les hypothèses nécessaires à l'utilisation d'un produit de Cauchy n'ont pas été révisées depuis le dernier devoir, semble-t-il. Quand on voit à quel point elles sont faciles à citer et vérifier, ce sont des points très bêtement perdus (pour des séries entières, on vérifie simplement qu'on est dans le disque ouvert de convergence commun aux deux séries multipliées).

   Il ne semble toujours pas compris que vous devez montrer avoir conscience d'une des principales problématiques de l'analyse de 2e année : les sommes à support infini (et les intégrales) ne se manipulent pas comme leur pendant fini, sauf sous une hypothèse de sommabilité (convergence absolue dans le cas des séries et intégrales) ou de positivité. Autrement, toutes les absurdités sont possibles.

Imprécisions mathématiques.

2. Lorsque vous dénombrez un ensemble E par construction « algorithmique » de ses éléments (exemple : obtenir toutes les applications entre deux ensembles finis *via* des surjections sur des parties), expliquez pourquoi votre construction permet effectivement d'obtenir *tous* les éléments de E.

   Dans le cas de ce devoir, il suffisait de rappeler qu'une application induit toujours une surjection sur son image.

3. Lorsque votre dénombrement suivant la démarche ci-dessus se compliqua, vous peinâtes à obtenir une égalité ensembliste : cela coinça lorsque les réunions n'étaient pas disjointes ou que les objets apparaissant successivement dans votre construction n'étaient pas des parties de E. Dans ces cas-là, c'est plutôt l'introduction d'une bijection ou surjection $f : F \to E$ qui permet de formaliser un dénombrement (en général F est dans ce cas un produit cartésien ou une réunion de produits cartésiens, décrivant les objets choisis successivement dans votre construction, et f est l'application permettant d'en déduire un élément de E)... Vous concluez avec l'égalité ensembliste : $F = \bigsqcup_{y\in E} f^{-1}(\{y\})$. Si chaque fibre a même cardinal k, vous avez alors : $\operatorname{card}(E) = \frac{\operatorname{card}(F)}{k}$ (principe des bergers).

   Il est aussi possible de faire votre dénombrement avec une surjection $f : E \to F$. Cela dépend du contexte et de votre façon de raisonner.

   Si le langage des applications vous déplaît : contentez-vous d'une explication en langage ordinaire : ce n'est pas moins rigoureux si votre vocabulaire est précis !

4. Puisque le produit de deux matrices triangulaires supérieures est aussi triangulaire supérieur (de même pour les matrices inférieures), ceux qui ont affirmé que les matrices $((s_{k,n}))_{k,n}$ et $\left(\left(\binom{n}{k}\right)\right)_{k,n}$ sont toutes les deux triangulaires supérieures devaient s'étonner que leur produit donne la matrice $\left(\left(n^k\right)\right)_{k,n}$ (qui ne l'est pas). Les coefficients de la première sont nuls pour $k < n$ et ceux de la seconde le sont pour $k > n$.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

5. C'est probablement la lacune la plus décevante rencontrée dans ce devoir, et sans conteste la plus urgente à retravailler si vous êtes concernés : l'intérêt d'étudier une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ en passant par sa série génératrice n'a pas du tout été compris par certains élèves. L'idée est pourtant la même à chaque exercice : faute de savoir expliciter u_n pour tout n, on calcule et explicite $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ (philosophiquement, déterminer ces deux objets est un problème exactement équivalent, isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres oblige). L'explicitation de cette somme permet, si elle s'écrit à l'aide de fonctions usuelles, de la développer à nouveau en série entière en 0, mais cette fois-ci avec des coefficients a_n explicites : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par unicité des coefficients on conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n$.
   Pour que cette stratégie fonctionne, encore faut-il que la somme de la série génératrice soit plus simple à étudier que la suite elle-même. C'est en général le cas lorsque u_n est défini à l'aide d'une somme de n ou $n+1$ termes, ou vérifie une relation de récurrence qui en fait intervenir une. Une telle relation peut s'interpréter par : $u = v * w$, ou : $w = u * v$, où v et w sont deux autres suites (*explicites*) et $*$ le produit de Cauchy de deux suites. Il est compliqué de simplifier ou d'inverser une telle relation : songez déjà aux efforts qui furent nécessaires pour calculer des sommes aussi basiques que $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour $\alpha \in \{1,2,3\}$ (il s'agit de $1 * (\mathrm{Id}_{\mathbb{N}})^\alpha$). En revanche, au niveau des sommes de séries génératrices, cela se traduit par une multiplication banale (qu'on sait inverser) : ainsi on obtient $S_u(x) = S_v(x)S_w(x)$ dans le premier cas, $S_u(x) = \frac{S_w(x)}{S_v(x)}$ dans le second. Il suffit alors de développer en série entière le membre de droite et on a explicité les coefficients de S_u (cela revient à connaître le développement en série entière de $\frac{1}{S_v}$, qui était $x \mapsto e^{-x}$ dans le contexte de ce devoir). On remplace un produit ardu par un produit naïf : de l'intérêt des isomorphismes !
   Vous trouverez plus de détails dans *Méthodes* du chapitre VIII, section 2.4.
6. Attention, la manipulation *a priori* d'une somme à support infini $\sum_i x_i$ n'est possible que si les x_i sont des RÉELS POSITIFS (ou plus généralement des éléments de $[0, +\infty]$).
   J'ai quelques fois vu des raisonnements du type : « on a : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n z^n| \leqslant \cdots < +\infty$, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ converge », ce qui démontre simultanément qu'on ne comprend pas bien le rôle de la positivité pour l'implication « somme majorée $\Rightarrow$ série convergente » (on a $|\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n| \leqslant 1 < +\infty$ donc la série converge ?), ainsi que la profondeur du lien entre convergence absolue et convergence.
7. Je ne comprends pas comment on peut oser écrire : « $\bigstar z^n \leqslant \spadesuit z^n$ » avec z complexe, sans ciller.
8. Il n'a pas choqué grand monde de manipuler des logarithmes ($\ln(1-z)$) et racines carrées de nombres COMPLEXES ($\sqrt{1-z^2}$), passant ainsi à côté de la subtilité de certaines questions. Vous pouvez à la rigueur *poser* : $-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ pour z complexe vérifiant $|z| < 1$, mais dans ce cas l'identité : $\exp(-\ln(1-z)) = (1-z)^{-1}$, pour $z \notin]-1,1[$, ne va plus de soi et doit être démontrée.
9. Il est faux de penser que les permutations de S_n sans point fixe sont exactement les n-cycles. C'est vraiment une grosse bêtise car les contre-exemples se trouvent sans effort : par exemple $(1\ 2)(3\ 4) \in S_4$ n'a pas de point fixe et n'est pas un 4-cycle.
   Parmi ceux ayant fait cette erreur, il y en a pourtant qui ont réussi à démontrer (deux questions plus tard !) que le nombre de permutations sans point fixe est : $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{e}$, ce qui n'a rien à voir avec le $(n-1)!$ trouvé plus tôt. Ayez du recul sur ce que vous démontrez.

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— PREMIÈRE PARTIE : question 5 (manque de succès incompréhensible selon moi) ;
— DEUXIÈME PARTIE : questions 13, 15, 16, 19.

Remarque. Le corrigé imprimé comporte quelques coquilles. La plus notable est dans la question 16. Il y en eut aussi une légère dans la question 13 (je parle de diviser par $m!$ alors que c'est inutile et faux, et j'écris $\mathcal{P}_n$ au lieu de $\mathcal{P}_{n-m}$). Le reste n'est que menus détails. Je les ai rectifiées dans la version en ligne.