Devoir sur table n° 8
(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

La première partie de ce devoir est une adaptation de l'épreuve de Mathématiques II du Concours d'admission à l'École Polytechnique, année 2008, filière MP. J'ai enlevé à peu près toute l'algèbre linéaire du sujet pour la remplacer par les très succinctes questions 4 et 5.

La seconde partie n'a à ma connaissance pas fait l'objet d'un sujet de concours, mais le problème est si classique que je me trompe certainement. J'ai puisé mon inspiration dans l'ouvrage *Les maths en tête* (tome d'algèbre et de probabilités).

C'est davantage un sujet de dénombrement que de probabilités. Dans chaque partie, la philosophie du sujet est qu'une relation obtenue par des arguments combinatoires se traduit fort commodément en passant par les séries génératrices. En particulier, on retiendra la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$$

qui, du point de vue des séries entières, est une conséquence triviale de la propriété des produits de Cauchy (ils sont souvent en jeu lorsqu'une relation combinatoire fait intervenir une somme de n termes) et du fait que e^x admette pour inverse e^{-x}. Si le procédé ne vous paraît toujours pas naturel, vous seriez bien avisés de lire *Méthodes* du chapitre VIII, *À quoi servent les produits de Cauchy ?*

Un autre type d'identité, dont on parvient plus aisément à tirer des informations en considérant l'image du morphisme injectif de $\mathbb{C}$-algèbres $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto \left(z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n z^n\right)$, est lorsqu'on compte un nombre de partitions (sous contrainte ou non) d'un entier naturel. C'est ce qui apparaît implicitement dans les deux problèmes (questions 9 et 13), puisque la somme des longueurs des cycles d'une permutation de S_n est exactement égale à n (en comptant les cycles de longueur 1 dans la somme). Vous l'aviez déjà observé dans le devoir maison n° 9. Cela tient à la suite d'égalités suivante (justifiables avec le théorème de sommation par paquets) :

$$\left(\sum_{a=0}^{+\infty} x^{ak_1}\right)\left(\sum_{b=0}^{+\infty} x^{bk_2}\right) = \sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^2} x^{ak_1+bk_2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}\left(\left\{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2 \mid ak_1+bk_2=n\right\}\right) x^n,$$

qu'on peut bien entendu généraliser à des partitions plus élaborées.

Une fois que la somme de la série entière génératrice d'une suite étudiée est explicitée, il y a deux pistes de réflexion possibles :

— soit cette explicitation permet de proposer un développement en série entière simple et explicite, auquel cas l'unicité des coefficients nous permet d'expliciter aussi la suite étudiée (première partie) ;

— soit, à défaut d'obtenir une expression explicite simple de la suite étudiée, on arrive à obtenir son comportement asymptotique *via* la formule intégrale de Cauchy (deuxième problème).

Ce qui apparaît implicitement dans la résolution du second problème est un résultat général sur les coefficients d'une série entière : leur ordre de grandeur dépend grandement de la singularité la plus proche de 0 (dans ce problème, il s'agit de $z = 1$, à cause de la division par $1 - z$). Le programme des classes préparatoires ne permet pas de formuler le résultat dont la dernière question du problème est un cas particulier.

Le premier problème vous fait également montrer que **si φ et ψ sont deux applications développables en série entière en 0, telles que : $\varphi(0) = 0$, alors leur composition $\psi \circ \varphi$ l'est aussi**. Lorsqu'on essaie de le montrer, on fait face à une difficulté évidente. Si l'on a : $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et : $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ (j'ai inversé les notations par rapport au sujet), alors un premier calcul naïf est le suivant :

$$\psi(\varphi(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k x^k \right)^n .$$

Pour écrire cela sous la forme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \bigstar x^n$, il semble qu'il soit nécessaire de développer $(b_1 x + b_2 x^2 \cdots)^n = x^n (b_1 + b_2 x + \cdots)^n$, de regrouper les puissances de x égales, etc. Si on le fait pour les plus petites puissances de x, on peut se convaincre (sans le démontrer rigoureusement) que le coefficient constant du développement en série entière de $\psi \circ \varphi$ est égal à a_0 (ça, ça va), celui de x semble être égal à $a_1 b_1$ (noter que dans l'écriture ci-dessus de $\psi \circ \varphi$, aucun terme en x ne peut provenir des indices n supérieurs ou égaux à 2, puisqu'ils sont « divisibles » par x^2 – raisonnement arithmétique qui serait rigoureux dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[X]]$), celui de x^2 semble être $a_2 b_1^2 + a_1 b_2$, celui de x^3 semble être $a_3 b_1^3 + a_2 \cdot 2 b_1 b_2 + a_1 b_3$, etc. Sur la base de ces quelques observations, on peut conjecturer une identité de la forme suivante :

$$\psi(\varphi(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{\clubsuit} \prod_{i \in \spadesuit} b_i \right) x^n.$$

Pour expliciter $\clubsuit$ et $\spadesuit$, cela nécessite de bien comprendre comment on distribue le produit lorsqu'on élève à la puissance n une somme d'un certain nombre fini de termes (le fait qu'on puisse se restreindre à un nombre *fini* de termes, malgré la somme visiblement infinie à l'exposant n ci-dessus, est parce qu'en voulant déterminer le coefficient de x^n, on peut raisonner « modulo X^{n+1} » et tronquer les développements). Autrement dit, on doit démontrer une généralisation de la formule du binôme de Newton, appelée **la formule du multinôme**. C'est ce que propose le problème.

C'est une occasion pour moi de vous présenter le **coefficient multinomial** apparaissant naturellement dans cette formule du multinôme :

$$\binom{k}{i_1, \ldots, i_n} = \frac{k!}{i_1! \cdots i_n!}$$

dont le sens combinatoire est le suivant : alors que $\binom{n}{k}$ donne le nombre de k-parties dans un ensemble à n éléments, ce qu'on peut interpréter comme le nombre de façons de choisir (sans ordre) k éléments parmi n, le coefficient multinomial $\binom{k}{i_1,\ldots,i_n}$ compte le nombre de façons de choisir n parties disjointes d'un ensemble E à n éléments, la première ayant i_1 éléments, la seconde i_2 éléments, etc., de sorte à obtenir un recouvrement de E (ceci impose : $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$). Ainsi défini, il est naturel qu'il intervienne dans les questions combinatoires pointues. Cette même interprétation permet de comprendre pourquoi il intervient dans la généralisation de la formule du binôme de Newton :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_i\right)^k = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \binom{k}{i_1,\ldots,i_n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{i_j}.$$

En effet, quand vous distribuez ce produit, vous obtenez uniquement une somme de produits de k termes qui, après regroupement des facteurs égaux, sont de la forme $\prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{i_j}$ avec $i_1+\cdots+i_n=k$; pour savoir combien de fois apparaît $\prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{i_j}$ dans la distribution du produit $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_i\right)^k = \prod\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, cela revient à déterminer combien il y a de façons de choisir i_1 fois l'élément x_1 dans chacun des k facteurs, i_2 fois l'élément x_2, etc. Ce nombre de choix est donné par $\binom{k}{i_1,\ldots,i_n}$ (c'est la définition donnée ci-dessus).

Néanmoins cette définition combinatoire n'explique pas pourquoi on a effectivement : $\binom{k}{i_1,\ldots,i_n} = \frac{k!}{i_1!\cdots i_n!}$. Informellement : pour choisir n parties disjointes vérifiant les conditions prescrites ci-dessus sur les cardinaux, on commence par choisir une partie à i_1 éléments de $[\![1,k]\!]$ (il y a $\binom{k}{i_1}$ possibilités), puis une partie à i_2 éléments parmi les $k-i_1$ éléments restants (il y a $\binom{k-i_1}{i_2}$ possibilités), puis une partie à i_3 éléments parmi les $k-i_1-i_2$ restants, etc. Ce faisant, on obtient :

$$\binom{k}{i_1,\ldots,i_n} = \prod_{\ell=1}^{n} \binom{k-\sum\limits_{j=1}^{\ell-1} i_j}{i_j} = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{\left(k-\sum\limits_{j=1}^{\ell-1} i_j\right)!}{i_j!\left(k-\sum\limits_{j=1}^{\ell} i_j\right)!}.$$

On reconnaît un produit télescopique. Sa simplification donne l'expression ci-dessus (ne pas oublier que $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j = k$).

Ce qu'on retiendra en bref. Nombre de surjections, nombres de Stirling de seconde espèce. Relations de récurrence obtenues par des raisonnements combinatoires, réinterprétées plus commodément *via* un produit de Cauchy de séries entières génératrices. Formule d'inversion de Pascal démontrée par usage des séries entières. Formule du multinôme, coefficient multinomial. Composition de fonctions développables en série entière en 0. Prolongement d'identités entre séries entières. Formule intégrale de Cauchy pour estimer asymptotiquement un coefficient à l'aide de sa série entière génératrice.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1 à 5 ;

— DEUXIÈME PARTIE : question 12, questions 15 et 16, questions 18 à 21.

2 Rapport officiel de l'épreuve (première partie)

Cette épreuve a été plutôt réussie dans l'ensemble dans la mesure où quelques questions d'algèbre linéaire élémentaire permettait à l'immense majorité des candidats d'avancer dans le sujet. On notera cependant le manque criant de familiarité avec les problèmes de dénombrement et le vocabulaire s'y rattachant : bijections, classes d'équivalences, partitions, lemme du berger... D'autre part, nous avons été surpris par le grand nombre de candidats qui traitaient de façon totalement approximative, et très souvent erronée, les questions liées aux séries entières, comme si, puisqu'il s'agissait d'un problème d'algèbre, ils pouvaient se contenter de réponses allusives.

La moyenne générale est supérieure à 9, et une petite dizaine de candidats a obtenu la note 20. Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	31	2,2%
$4 \leqslant N < 8$	325	22,7%
$8 \leqslant N < 12$	753	52,5%
$12 \leqslant N < 16$	266	18,5%
$16 \leqslant N \leqslant 20$	59	4,1%
Total	1434	100%
Nombre de copies : 1434 Note moyenne : 9,93 Écart-type : 3,06		

Comme les années précédentes, nous ne pouvons que constater en général une certaine désinvolture dans la rédaction, voire une absence de rédaction. En général, une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, soit un passage d'une ligne de calcul à la suivante, soit une affirmation qui découle d'une question précédente ou d'une hypothèse de l'énoncé, sans s'y référer explicitement, soit d'un exercice traité en classe et dont les résultats sont supposés admis (voir par exemple le déterminant de Vandermonde). Ceci peut expliquer des notes moyennes pour des candidats qui ont traité un grand nombre de questions mais dont les démonstrations étaient incomplètes.

Peu de candidats prennent la peine de rédiger correctement une démonstration par récurrence. Rappelons qu'il convient d'énoncer clairement la propriété qu'on prétend démontrer, de démontrer cette propriété pour une valeur initiale, de démontrer que cette propriété est héréditaire, et enfin de conclure en invoquant le théorème de récurrence. En général, seul le second point et partiellement le troisième point sont correctement traités.

Passons à l'examen détaillé des questions.

Q. 1. Bien traitée dans l'ensemble, puisque le plupart des candidats ont noté que dans ce cas (...) les surjections coïncidaient avec l'ensemble des permutations.

Q. 2. Cette question (...) a été peu traitée correctement. La plupart des candidats ont compris qu'ils s'agissait d'énumérer les applications suivant le cardinal de leur image mais très peu ont rédigé une démonstration correcte. Certains ont tenté une récurrence très souvent erronée.

Q. 3. De nombreux candidats ont remarqué que la matrice dont on demandait le déterminant était le produit de deux matrices triangulaires. Encore fallait-il le démontrer correctement. D'autres ont reconnu une variante du déterminant de Vandermonde mais la plupart n'ont pas pris la peine de démontrer ce qu'il valait et souvent le résultat proposé était faux.

Q. 5. Cette question a été très généralement bien traitée.

Q. 6. Cette question a été abordée par la plupart des candidats mais de façon peu convaincante. Une majorité a réussi à mettre en relation les éléments de $A_{k,n}$ avec ceux des $A_{k-j,n-1}$ mais sans démontrer le caractère bijectif.

Notons, pour le déplorer, que de nombreux candidats ne prennent pas la peine de rédiger correctement la démonstration par récurrence, omettant souvent de conclure, comme si cela allait de soi.

Q. 7. Cette question a troublé de nombreux candidats, proposant des démonstrations peu convaincantes.

Q. 8. Cette question a été abordé par une grosse minorité de candidats. Beaucoup de démonstrations correctes ont été proposées, peu étaient complètes.

Q. 9. Souvent cette question a été très mal rédigée. Des majorations étaient proposées comme si tous les coefficients étaient positifs, d'autres majorations n'avaient aucun sens. De nombreux candidats ont affirmé qu'il s'agissait de produits de Cauchy, sans le démontrer, et ont conclu sur le rayon de convergence sans donner un énoncé clair de ce fait. De nombreux candidats ont tenté d'inclure $B_{k,n}$ dans $\Omega_{k,n}$ ce qui est manifestement faux.

Q. 10. Les candidats qui ont traité cette question (très peu en fait) ont noté qu'il convenait d'invoquer le théorème de Fubini mais peu en ont vérifié les hypothèses.

Q. 11. Un nombre significatif a tenté de répondre à cette question et a parfois fourni le bon résultat mais très souvent sans justifier de sa validité, qui découlait pourtant des questions précédentes.

3 Corrigé

Première partie

1. Comme une surjection entre deux ensembles finis de même cardinal est une bijection, on a : $s_{n,n} = \mathrm{card}(S_n) = n!$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Comment le démontre-t-on, d'ailleurs ?

2. Plus généralement, notons $S(k, A)$ l'ensemble des surjections de $[\![1, k]\!]$ dans A, pour tout ensemble A. Comme toute application induit une surjection sur son image, on a :

$$[\![1, n]\!]^{[\![1,k]\!]} = \bigsqcup_{q=1}^{n} \bigsqcup_{\substack{A\subseteq[\![1,k]\!] \\ \mathrm{card}(A)=q}} S(k, A).$$

Or il est évident que $S(k, A)$ et $S_{k,q}$ sont en bijection si $\mathrm{card}(A) = q$: en effet, si $\varphi : A \to [\![1, q]\!]$ est une bijection (qui existe par définition du cardinal d'un ensemble fini), alors $f \in S(k, A)$ si et seulement si $\varphi \circ f \in S_{k,q}$ (la composition par une application bijective ne change pas la surjectivité), de sorte qu'une application bijective naturelle entre $S(k, A)$ et $S_{k,q}$ soit $f \mapsto \varphi\circ f$, de bijection réciproque $f \mapsto \varphi^{-1} \circ f$. En prenant les cardinaux dans l'égalité ensembliste ci-dessus, on a donc :

$$n^k = \sum_{q=1}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq[\![1,k]\!] \\ \mathrm{card}(A)=q}} \mathrm{card}(S(k, A)) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq[\![1,k]\!] \\ \mathrm{card}(A)=q}} \mathrm{card}(S_{k,q}) = \sum_{q=1}^{n} \binom{n}{q} s_{k,q},$$

d'où le résultat.

Remarque. Il est certain que la justification soignée que $\mathrm{card}(S(k, A)) = s_{k,q}$ (si $\mathrm{card}(A) = q$) n'est pas indispensable. Les raisonnements combinatoires en langage ordinaire, s'ils sont précis, sont acceptés même sans autant de formalisme que ci-dessus.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Faire le lien entre mes deux premières phrases et la description ensembliste proposée.
> — Être capable d'obtenir l'identité demandée par un raisonnement combinatoire formulée en langage ordinaire (qui dit exactement la même chose). D'une part, cela permet de comprendre « moralement » l'égalité, et d'autre part une situation est parfois complexe à écrire mathématiquement mais très simple en langage ordinaire : ne pas se priver d'y recourir, au nom d'une préciosité mathématique indûment justifiée.
> — Deux remarques sur ce type de relation (aussi obtenue quand on compte les dérangements). 1° Remarquer que dans les relations de récurrence d'origine combinatoire avec des coefficients binomiaux, ils proviennent souvent du choix d'une partie (penser au nombre de dérangements), 2° lorsque le membre de gauche de l'égalité à démontrer correspond au cardinal de l'ensemble E ambiant, et que le terme en facteur du coefficient binomial (dans le membre de droite) est justement le cardinal de l'ensemble des éléments $x \in E$ vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ (que l'on veut dénombrer : il s'agit de se demander en quoi un élément x quelconque de E induit (ou provient de) sur une partie A de E un élément y vérifiant $\mathcal{P}$.
> — Noter, ici et ailleurs, que les bijections entre ensembles sont les « isomorphismes » de la structure la plus pauvre de toutes, à savoir celle d'ensemble. En tant qu'isomorphismes, ils préservent donc les rares propriétés relatives à la structure d'ensemble : les applications surjectives, injectives, les cardinaux, etc. (Préservent-ils les partitions ? les intersections vides ? etc.)

3. Soit $A = \left(\left(n^k\right)\right)_{1\leqslant k,n\leqslant r}$. L'égalité de la question précédente, écrite pour tout $n \in [\![1,r]\!]$, s'écrit matriciellement ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,r} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & s_{r-1,r} \\ s_{r,1} & \cdots & s_{r,r-1} & s_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{1}{2} & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{r}{r-1} \\ \binom{1}{r} & \cdots & \binom{r-1}{r} & \binom{r}{r} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s_{r,1} & \cdots & s_{r,r-1} & s_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{r}{1} \\ 0 & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{r}{r-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{r}{r} \end{pmatrix}.$$

Nous avons deux matrices triangulaires. Leur déterminant se calcule en faisant le produit des coefficients diagonaux. La multiplicativité du déterminant implique :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{r} s_{i,i} \prod_{i=1}^{r} \binom{i}{i} \overset{(q.\,1)}{=} \prod_{i=1}^{r} i!.$$

Remarque. Il n'aura pas échappé à certains d'entre vous (j'imagine) qu'il s'agit d'un déterminant de Vandermonde, après factorisation de la n^{e} colonne par n (pour tout $n \in [\![1,r]\!]$). On en déduit :

$$\det(A) = \prod_{n=1}^{r} n \cdot \prod_{1\leqslant k<n\leqslant r} (n-k) = r! \prod_{n=2}^{r}\prod_{k=1}^{n-1} (n-k) = r! \prod_{n=2}^{r} (n-1)! = \prod_{n=1}^{r} n!.$$

Néanmoins cette résolution n'était pas du tout dans la philosophie du problème.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Est-ce que d'autres relations du même type (que vous avez pu croiser en exercice) permettent d'obtenir de même des déterminants non triviaux et non connus ?
- Dans ma remarque : comment ai-je simplifié le produit $\prod_{k=1}^{n-1} (n-k)$?

4. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{s_{k,n}}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ parce qu'on ne somme qu'un nombre fini de termes : en effet, on a $s_{k,n} = 0$ pour tout $n > k$. On en déduit que c'est une série entière de rayon de convergence infini.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Est-ce que la majoration triviale $s_{k,n} \leqslant n^k$, obtenue en comparant les cardinaux, aurait aussi permis de conclure ?

5. Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} \frac{s_{k,n}}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ (c'est la série exponentielle) sont de rayon de convergence infini, donc leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ également, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$F(z)e^z = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_{k,n}}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{q=0}^{n} \frac{s_{k,q}}{q!} \cdot \frac{1}{(n-q)!} = \frac{1}{n!} \sum_{q=0}^{n} \frac{n!\, s_{k,q}}{(n-q)!\, q!} = \frac{1}{n!} \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} s_{k,q},$$

et cette dernière somme est égale à n^k d'après la question 2 (rappelons que l'on a $s_{k,0} = 0$: commencer la somme à $q = 0$ ou $q = 1$ est indifférent). On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{n^k}{n!}$, et comme $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ le produit ci-dessus devient :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z)e^z = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_{k,n}}{n!} z^n\right) \cdot e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} z^n.$$

(Nous avons démontré en passant que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n^k}{n!} z^n$ est de rayon de convergence infini.)

Pour en déduire $s_{k,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous allons isoler la série entière exponentielle génératrice de la suite $(s_{k,n})_{n \geqslant 0}$ en multipliant par e^{-z} l'égalité précédente. On obtient pour tout $z \in \mathbb{C}$, encore en faisant un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon de convergence infini :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_{k,n}}{n!} z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} z^n\right) \cdot e^{-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{q^k}{q!} \cdot \frac{(-1)^{n-q}}{(n-q)!}\right) z^n.$$

Nous avons deux sommes de séries entières coïncidant sur un voisinage de 0, donc par identification des coefficients on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{s_{k,n}}{n!} = \sum_{q=0}^{n} \frac{q^k}{q!} \cdot \frac{(-1)^{n-q}}{(n-q)!} = \frac{1}{n!} \sum_{q=0}^{n} \frac{n!(-1)^{n-q} q^m}{q!(n-q)!} = \frac{1}{n!} \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} (-1)^{n-q} q^k.$$

Comme $\mathrm{P}_{k,n}$ est la probabilité uniforme sur $\Omega_{k,n}$, on en déduit simplement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}_{k,n}(S_{k,n}) = \frac{\operatorname{card}(S_{k,n})}{\operatorname{card}(\Omega_{k,n})} = \sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^{n-q}}{n^k} q^k \binom{n}{q},$$

d'où le résultat en posant $\lambda_{n,k,q} = \dfrac{(-1)^{n-q}}{n^k}$ pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ et tout $q \in [\![0, n]\!]$.

On nous demande d'en déduire : $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \mathrm{P}_{k,n}(S_{k,n})$. Notons que le nombre de termes de la somme ci-dessus ne dépend pas de k. Il suffit donc de calculer : $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \frac{q^k}{n^k}$, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $q \in [\![0, n]\!]$. Cela dépend selon que $\dfrac{q}{n}$ soit égal à 1 ou non : dans le second cas, la limite est nulle. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \lim_{k \to +\infty} \mathrm{P}_{k,n}(S_{k,n}) = \binom{n}{n} = 1.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Interpréter concrètement la valeur de la limite obtenue : était-ce prévisible ?
- Retenir cette idée d'inversion des formules par l'utilisation d'un produit de Cauchy et l'inversion d'une fonction (ici $z \mapsto e^z$). Vous pouvez ainsi obtenir la formule d'inversion de Pascal et retrouver le lien suite-série (avec un petit défaut, effacé *via* les séries formelles : la formule d'inversion de Pascal vaut pour toutes suites vérifiant la relation $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$, alors que le passage par les séries entières nécessitent de les prendre de « taille contrôlée » pour que le rayon de convergence soit non nul – c'est pourquoi la preuve matricielle de cette formule est aussi à connaître).
- Est-ce que la stratégie d'explicitation de $s_{k,n}$ aurait marché en considérant la série entière génératrice $\sum_{n \geqslant 0} s_{k,n} z^n$ à la place ? Avez-vous une idée de la situation où il est préférable de plutôt étudier $\sum_{n \geqslant 0} \frac{s_{k,n}}{n!} z^n$? Si vous ne voyez pas : la lecture de *Méthodes* devrait vous éclairer.
- Regarder ce que donne l'expression de $s_{n,n}$ obtenue par cette formule, et la comparer avec celle de la question 1. Est-ce que l'identité obtenue est inédite pour vous ? Arriveriez-vous à en trouver d'autres, en changeant les choix de valeurs de k ?

6. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous allons montrer le prédicat de l'énoncé par récurrence sur n. La formule est évidente pour $n = 1$ et on retrouve la formule du binôme pour $n = 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons-la vraie au rang n. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
&(x_1 + \cdots + x_{n+1})^k \\
&= (x_1 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1}))^k \\
&= \sum_{f \in A_{k,n}} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n)!} x_1^{f(1)} \cdots x_{n-1}^{f(n-1)} (x_n + x_{n+1})^{f(n)} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{f \in A_{k,n}} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n)!} x_1^{f(1)} \cdots x_{n-1}^{f(n-1)} \sum_{i=0}^{f(n)} x_n^i x_{n+1}^{f(n)-i} \frac{f(n)!}{i!(f(n)-i)!} && \text{(formule du binôme)} \\
&= \sum_{(f,i) \in A_{k,n}^*} \frac{k!}{f(1)! \cdots f(n-1)! i! (f(n)-i)!} x_1^{f(1)} \cdots x_{n-1}^{f(n-1)} x_n^i x_{n+1}^{f(n)-i},
\end{aligned}$$

où l'on a posé : $A_{k,n}^* = \{(f,i) \in A_{k,n} \times \mathbb{N} \mid i \in [\![0, f(n)]\!]\}$. Or on a une bijection de $A_{k,n}^*$ dans $A_{k,n+1}$ donnée par :

$$\varphi : \begin{cases} A_{k,n}^* & \to & A_{k,n+1} \\ (f,i) & \mapsto & \left(\tilde{f} : j \mapsto \begin{cases} f(j) & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \\ i & \text{si } j = n \\ f(n) - i & \text{si } j = n+1 \end{cases} \right) \end{cases}.$$

Détaillons cette affirmation : tout d'abord, φ est bien définie puisque :

$$\forall (f,i) \in A_{k,n}^*, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{f}(j) = \sum_{j=1}^{n-1} f(j) + i + (f(n) - i) = \sum_{j=1}^{n} f(j) = 1,$$

et elle est bijective puisqu'on vérifie aisément qu'elle admet pour réciproque :

$$\psi : \begin{cases} A_{k,n+1} & \to & A_{k,n}^* \\ g & \mapsto & \left(\tilde{g} : j \mapsto \begin{cases} g(j) & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \\ g(n) + g(n+1) & \text{si } j = n \end{cases}, g(n) \right) \end{cases}.$$

Ainsi par la formule du changement d'indice :

$$(x_1 + \cdots + x_{n+1})^k = \sum_{g \in A_{k,n+1}} \frac{k!}{g(1)! \cdots g(n-1)! g(n)! g(n+1)!} x_1^{g(1)} \cdots x_{n-1}^{g(n-1)} x_n^{g(n)} x_{n+1}^{g(n+1)}.$$

On reconnaît la proposition au rang $n+1$, d'où l'hérédité de la formule du multinôme. Par principe de récurrence, on a montré le résultat voulu.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- La bijection φ que je propose est particulièrement abjecte. Essayer de comprendre son sens concret (parce que je ne l'ai bien sûr pas trouvée par une opération mystique, mais par une inspection minutieuse de ce que l'on veut obtenir et de ce que l'on a).
- Vérifier que φ et ψ sont effectivement réciproques l'une de l'autre (bien calculer la composition dans les deux sens), et que la formule du changement d'indice donne bien ce que j'annonce : comme ce n'est pas un changement d'indice banal du type $n \mapsto n+1$, je veux m'assurer que la façon de faire est bien comprise.
- Éclairer cette indexation par $A_{k,n}$. Que dit-on de très concret, finalement, sur la forme générale des facteurs obtenus en distribuant le produit $(x_1 + \cdots + x_n)^k$?
- De la même manière que l'on peut obtenir la formule du *binôme* par un raisonnement combinatoire : peut-on obtenir la formule du multinôme par un argument combinatoire, en se demandant ce que dénombre exactement le terme $\frac{k!}{f(1)! \cdots f(n)!}$?
- Pourquoi n'ai-je pas entamé mon hérédité en écrivant la formule du binôme avec $((x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1})^k$?
- L'énoncé proposait une récurrence sur n. Et si on veut la faire sur k ? Parvient-on au résultat ?

7. Soient $(k,n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Développer $(x_1+\dots+x_n)^k$ consiste à prendre de toutes les façons possibles un terme x_i dans chaque somme $x_1+\dots+x_n$, à les multiplier, et à ajouter tous les produits obtenus. Si on appelle $\varphi(j)$ l'indice du terme retenu dans la j^e somme, on obtient le développement en ajoutant tous les produits $x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}$ lorsque φ décrit l'ensemble des applications de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, soit :

$$(x_1+\dots+x_n)^k = \sum_{\varphi\in\Omega_{k,n}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Si vous trouvez cette démonstration trop informelle : formalisez-la.

— Pouvait-on raisonner par récurrence comme dans la question 6 ? Comment serait-on passé de $\Omega_{k,n}$ à $\Omega_{k+1,n}$ ou $\Omega_{k,n+1}$ (selon que la récurrence soit sur k ou sur n... d'ailleurs, quel choix feriez-vous ?) ?

8. Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$. D'après les questions 6 et 7, on a :

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad \sum_{f\in A_{k,n}} \frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!} x_1^{f(1)}\cdots x_n^{f(n)} = \sum_{\varphi\in\Omega_{k,n}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}.$$

On obtient une égalité entre deux applications polynomiales de la variable x_1, valable en une infinité de réels. Les polynômes associés sont donc égaux et on peut identifier leurs coefficients, plus particulièrement les coefficients constants (c'est-à-dire indépendants de x_1). En soustrayant ces coefficients constants, on obtient pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ l'égalité :

$$\sum_{\substack{f\in A_{k,n}\\ f(1)\geqslant 1}} \frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!} x_1^{f(1)}\cdots x_n^{f(n)} = \sum_{\substack{\varphi\in\Omega_{k,n}\\ 1\in\varphi([\![1,k]\!])}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}.$$

On recommence alors la même manipulation avec les variables $x_2,\dots,x_n$, ce qui donne :

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad \sum_{f\in B_{k,n}} \frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!} x_1^{f(1)}\cdots x_n^{f(n)} = \sum_{\varphi\in S_{k,n}} x_{\varphi(1)}\cdots x_{\varphi(k)}.$$

En prenant toutes les variables x_i égales à 1, on trouve finalement :

$$\sum_{f\in B_{k,n}} \frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!} = \operatorname{card}(S_{k,n}) = s_{k,n}.$$

Comme $\mathrm{P}_{k,n}$ est la probabilité uniforme, on conclut :

$$\mathrm{P}_{k,n}(S_{k,n}) = \frac{1}{n^k}\sum_{f\in B_{k,n}} \frac{k!}{f(1)!\cdots f(n)!}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Il peut paraître surprenant de voir apparaître un lien entre le nombre de surjections et la formule du multinôme. Essayer d'y donner un sens concret.

— Est-ce que pour les polynômes en plusieurs indéterminées aussi, coïncider sur $\mathbb{R}^n$ équivaut à être égal ? Et sur une partie infinie quelconque de $\mathbb{R}^n$? Y réfléchir, afin de se convaincre de la nécessité de fixer une variable (et comprendre si la stratégie peut échouer).

9. Répondre à cette question nécessite de savoir dominer les termes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$: pour cela, on redémontre le fait classique que le coefficient général d'une série entière de rayon de convergence non nul est dominé par une suite géométrique : soit r un réel tel que : $0<r<R_1$. Par définition

du rayon de convergence, la suite $(a_k r^k)$ est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $|a_k r^k| \leqslant M$. On en déduit, pour tout entier $k \geqslant n$:

$$|\alpha_{n,k}| \leqslant \sum_{f \in B_{k,n}} M^n r^{-(f(1)+\cdots+f(n))} = r^{-k} M^n \mathrm{card}(B_{k,n}).$$

Majorons ce cardinal : si $f \in B_{k,n}$, alors : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $1 \leqslant f(j) \leqslant k$ (la première inégalité est vraie par définition de $A_{k,n}$, qui contient $B_{k,n}$; la seconde inégalité s'obtient en isolant $f(j)$ dans la somme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(i) = k$; cette majoration peut même être améliorée si l'on sait que $n \geqslant 2$). On en déduit : $\mathrm{card}(B_{k,n}) \leqslant \mathrm{card}\left([\![1,k]\!]^{[\![1,n]\!]}\right) = k^n$. Ainsi :

$$\alpha_{n,k} \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\frac{k^n}{r^k}\right),$$

or la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k^n \left(\frac{z}{r}\right)^k$ est de rayon de convergence r (le cas de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k^n z^k$ est du cours : on s'y ramène par composition). Par le théorème de comparaison des séries entières, le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \alpha_{n,k} x^k$ est supérieur ou égal à r. Cela vaut pour tout $r \in]0, R_1[$, donc le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \alpha_{n,k} x^k$ est supérieur ou égal à R_1 (prendre $r \to R_1^-$).

Passons au calcul de la somme. Soit $x \in]-R_1, R_1[$. La famille $\left(a_k x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable puisqu'une série entière converge absolument en tout point de son intervalle ouvert de convergence, or un produit de familles sommables reste sommable. Cela permet d'écrire, par le théorème de sommation par paquets et par la formule du changement d'indice :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k\right)^n = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^n} a_{k_1}\cdots a_{k_n} x^{k_1+\cdots+k_n} &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^n \\ k_1+\cdots+k_n=\ell}} a_{k_1}\cdots a_{k_n} x^{k_1+\cdots+k_n} \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^n \\ k_1+\cdots+k_n=\ell}} a_{k_1}\cdots a_{k_n} \right) x^\ell \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\sum_{f\in B_{\ell,n}} a_{f(1)}\cdots a_{f(n)} \right) x^\ell \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \alpha_{n,\ell} x^\ell.
\end{aligned}$$

Comme $\alpha_{n,0} = 0$, cela peut se réécrire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,n} x^k = (\varphi(x))^n,$$

d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— La domination du coefficient général par une suite géométrique est déjà intervenue en exercice (pour l'inversion des séries entières de coefficient constant non nul). Important à retenir.

— S'assurer d'avoir compris le changement d'indexation, quand je passe de $k_1+\cdots+k_n = \ell$ à $f \in B_{\ell,n}$.

10. Nous allons traiter les deux parties de la question grâce au théorème de Fubini. Notons $(\alpha'_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ la suite double définie à partir de la suite $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ par la même formule que $\alpha_{n,k}$ à partir de a_k. Par inégalité triangulaire, on a : $\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2$, $|\alpha_{n,k}| \leqslant \alpha'_{n,k}$. Or on sait que la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0}|a_k|x^k$ est de rayon de convergence R_1 (ajouter des valeurs absolues ne change rien au rayon de convergence). Notons φ_1 sa somme. On a, pour tout $x\in]-R_1,R_1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|b_n\alpha_{n,k}x^k\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha'_{n,k}|x|^k \overset{(q.9)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|\left(\varphi_1(|x|)\right)^n.$$

Or : $\varphi_1(0)=0$, et φ_1 est continue en 0 en tant que fonction développable en série entière, donc il existe $R>0$ tel que $\forall x\in]-R,R[$, $\varphi_1(|x|)<R_2$. Comme R_2 est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_nx^n$, elle converge absolument en tout $x\in]-R_2,R_2[$ et donc :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|b_n\alpha_{n,k}x^k\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|b_n|\left(\varphi_1(|x|)\right)^n<+\infty,$$

ce qui montre que la famille $(b_n\alpha_{n,k}x^k)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On peut appliquer le théorème de Fubini, et on a alors :

$$\forall x\in]-R,R[,\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\alpha_{n,k}\right)x^k = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{n,k}x^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}b_n\varphi(x)^n = \psi(\varphi(x)).$$

démontrant en passant la convergence de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n\alpha_{n,k}\right)x^k$ en tout $x\in]-R,R[$, et donc qu'elle est de rayon de convergence non nul.

Remarque. On a montré que la composition de deux fonctions développables en série entière est développable en série entière (à condition d'avoir $\varphi(0)=a_0=0$).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Pourquoi l'ajout des valeurs absolues ne change pas le rayon de convergence ? (C'est du cours.)
- Se convaincre que l'hypothèse $\varphi(0)=0$ est absolument nécessaire pour que la composition de deux fonctions développables en série entière en 0 reste développable en série entière en 0.
- Comparer les coefficients du développement en série entière de $\psi\circ\varphi$ obtenu avec ce que vous auriez trouvé en obtenant à tâtons les coefficients de x, x^2, x^3, etc., comme je le fais dans le commentaire du devoir. Comprend-on la « logique » derrière l'expression du terme général ?

11. Prenons : $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a_k=\dfrac{1}{k!}$ (et $a_0=0$), ce qui donne : $R_1=+\infty$ et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=e^x-1$. Par la question 8, on a : $\alpha_{n,k}=\sum\limits_{f\in B_{k,n}}\dfrac{1}{f(1)!\cdots f(n)!}=\dfrac{s_{k,n}}{k!}$. On en déduit que si l'on pose : $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=\dfrac{1}{n!}$ (de sorte que $R_2=+\infty$ et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\psi(x)=e^x$), alors pour tout x au voisinage de zéro :

$$\theta(x)=e^{e^x-1}=\psi(\varphi(x))=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{n,k}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{s_{k,n}}{n!}\right)\frac{x^k}{k!}.$$

Or on a aussi, pour tout x au voisinage de zéro : $\theta(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\theta^{(k)}(0)}{k!}x^k$. Par unicité des coefficients :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \theta^{(k)}(0)=\sum_{n=0}^{k}\frac{s_{k,n}}{n!}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Cette identité est-elle un moyen pratique de calculer les dérivées successives de θ en 0 ou, *au contraire*, un moyen pratique d'obtenir les valeurs de $s_{k,n}$?

Deuxième partie

12. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $\mathcal{P}_n(A,k) \subseteq \mathcal{P}_n(A) \subseteq S_n$, ce dont on déduit, pour tout $z \in D$ (notons qu'on somme ci-dessous des nombres positifs, ce qui rend licites ces manipulations) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A,k))}{n!}|z|^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A))}{n!}|z|^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{card}(S_n)}{n!}|z|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|} < +\infty$$

la dernière égalité étant vraie parce que $|z| < 1$. On en déduit que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A,k))}{n!} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A))}{n!} z^n$ convergent absolument donc convergent pour tout $z \in D$, ce qui montre que Φ_A et $\Phi_{A,k}$ sont au moins définies sur D.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Quel peut être potentiellement le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A))z^n$? En déduire une raison pour laquelle on n'a pas étudié cette série génératrice, mais la série génératrice exponentielle (ce n'est pas la seule raison).

13. Suivons l'indication de l'énoncé, et montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a :

$$\forall z \in \mathrm{D}, \quad \Phi_{A,k}(z) = \frac{(L_A(z))^k}{k!}.$$

Pour $k = 1$, l'ensemble $\mathcal{P}_n(A,1)$ désigne les n-cycles de S_n avec $n \in A$ (en effet, toute autre permutation que les n-cycles admet au moins deux cycles dans sa décomposition). Or il y a $(n-1)!$ cycles de longueur n dans S_n : en effet, pour définir un tel cycle σ, il suffit de choisir une permutation τ de $[\![2,n]\!]$ pour poser : $\sigma = (1\ \tau(2) \cdots \tau(n))$ (il y a $(n-1)!$ tels choix de τ). On obtient ainsi tous les n-cycles possibles, puisqu'il est toujours possible de débuter leur écriture par 1 quitte à effectuer une permutation circulaire. On en déduit :

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A,1)) = \begin{cases} (n-1)! & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puis (le sens de la somme ci-dessous indexée par $n \in A$ ne pose pas de problème puisque la famille $\left(\frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A,1))}{n!} z^n\right)_{n\in A}$ est sommable en tant que famille extraite de $\left(\frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A,1))}{n!} z^n\right)_{n\geqslant 1}$) :

$$\forall z \in D, \quad \Phi_{A,1}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A,1))}{n!} z^n = \sum_{n\in A}^{+\infty} (n-1)! \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\in A} \frac{z^n}{n} = L_A(z),$$

ce qui donne le résultat au rang $k = 1$.

À présent, soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose : $\forall z \in \mathrm{D}$, $\Phi_{A,k}(z) = \frac{(L_A(z))^k}{k!}$. On remarque que pour avoir l'égalité voulue au rang $k+1$, il suffit de montrer :

$$\forall z \in D, \quad (k+1)\Phi_{A,k+1}(z) = \Phi_{A,k}(z) L_A(z),$$

ce qui équivaut, en utilisant l'unicité des coefficients et le théorème sur les produits de Cauchy (ou par une sommation par paquets convenable), à :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad (k+1)\frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A,k+1))}{n!} = \sum_{\substack{m\in A \\ m\leqslant n}} \frac{\mathrm{card}(\mathcal{P}_{n-m}(A,k))}{(n-m)!m}. \qquad (*)$$

C'est cette dernière identité que nous allons démontrer. On observe que cela revient à trouver une relation de récurrence liant les ensembles $\mathcal{P}_n(A, k+1)$. Pour trouver une telle relation, on remarque que pour fabriquer un élément $\sigma \in \mathcal{P}_n(A, k+1)$, il suffit :

— de choisir un premier cycle τ dont la longueur est un élément m de A (et qui doit être inférieur ou égal à n, sinon σ aurait un support plus grand que l'ensemble qu'il permute), et il y a $\binom{n}{m}(m-1)!$ façons de choisir un tel cycle (d'abord $\binom{n}{m}$ possibilités pour son support, puis $(m-1)!$ façons d'ordonner les éléments de son support, comme dans le dénombrement plus haut) ;

— de choisir ensuite un élément de $\mathcal{P}_{n-m}(A, k)$ (plus précisément : une permutation τ' de $[\![1, n]\!] \setminus \mathrm{supp}(\tau)$ s'écrivant comme produit de k cycles dont les longueurs sont dans A) ;

— de poser : $\sigma = \tau \circ \tau'$.

Attention cependant aux doublons : une même permutation $\sigma \in \mathcal{P}_n(A, k+1)$ peut s'obtenir de $k+1$ façons différentes par cette construction. En effet, n'importe lequel des $k+1$ cycles de sa décomposition aurait pu être choisi en premier. On a donc plus précisément, par le principe des bergers (appliqué à l'application de $\bigsqcup_{m \in A \cap [1,n]} \mathcal{P}_m(A,1) \times \mathcal{P}_{n-m}(A, k)$ dans $\mathcal{P}_n(A, k+1)$ définie par $(\tau, \tau') \mapsto \tau \circ \tau'$) :

$$(k+1)\mathrm{card}(\mathcal{P}_n(A, k+1)) = \sum_{\substack{m \in A \\ m \leqslant n}} \binom{n}{m}(m-1)!\mathrm{card}(\mathcal{P}_{n-m}(A, k)).$$

Divisons par $n!$. On obtient alors $(*)$, ce qu'il fallait démontrer. En remontant la chaîne d'équivalence expliquée ci-dessus (multiplier $(*)$ par z^n, sommer de $n=1$ à $+\infty$, reconnaître un produit de Cauchy), on obtient : $\forall z \in D$, $(k+1)\Phi_{A,k+1}(z) = \Phi_{A,k}(z)L_A(z)$, et ensuite, grâce à l'hypothèse d'hérédité :

$$\forall z \in D, \quad \Phi_{A,k+1}(z) = \frac{1}{k+1}\frac{(L_A(z))^k}{k!}L_A(z) = \frac{(L_A(z))^{k+1}}{(k+1)!},$$

d'où le résultat au rang $k+1$ et l'hérédité.

Par principe de récurrence, on a bien : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall z \in \mathrm{D}$, $\Phi_{A,k}(z) = \dfrac{(L_A(z))^k}{k!}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Être sûr d'avoir compris le raisonnement derrière le dénombrement des cycles de longueur m. Notamment, on est naturellement tenté de dire qu'il y a $n!$ cycles de longueur n (pour le nombre de façons d'ordonner les éléments du support), et non $(n-1)!$. Comment expliquer « naturellement » le facteur n manquant ?

Si mon raisonnement vous déplaît : vous pouvez le formaliser ou en trouver de nombreuses variantes.

— Élucider mon invocation du principe des bergers, si cela vous paraît flou.

— Pouvait-on se dispenser d'une récurrence, en faisant directement un produit de k sommes de séries absolument convergentes et en utilisant savamment le théorème de sommation par paquets ? Si, pour tout ℓ et toute permutation σ, on note $c(\ell, \sigma)$ le nombre de ℓ-cycles dans la décomposition de σ, alors on a : $n = \sum_\ell c(\ell, \sigma)\ell$ (pourquoi ?), ce qui donne une partition de l'entier n : vous avez déjà croisé des utilisations de séries entières pour étudier les partitions d'un entier naturel, donc j'affirme que ma question mérite d'être posée.

— Comparer le raisonnement combinatoire effectué pour obtenir $(*)$, et mes commentaires de la question 2 (sur l'apparition des coefficients binomiaux notamment).

— J'affirme qu'en démontrant $(*)$, on comprend aussi pourquoi on a préféré s'intéresser à une série entière exponentielle génératrice plutôt qu'à une série entière génératrice « au sens usuel ». Pourquoi ? Si vous ne voyez pas : reparcourir mes commentaires de la question 5.

14. Soit $z \in D$. On a :
$$\begin{aligned}\exp(L_A(z)) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(L_A(z))^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi_{A,k}(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A,k))}{n!} z^n \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A,k))}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A,k))\right)\frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$
où l'égalité $(*)$ provient du théorème de Fubini : pour vérifier l'hypothèse de sommabilité de ce théorème, il suffit de reproduire ces mêmes calculs en remplaçant z par $|z|$ (tout le reste étant déjà positif) ; le calcul mène alors à : $\exp(L_A(|z|)) - 1 < +\infty$.
Comme on a clairement : $\mathcal{P}_n(A) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{P}_n(A,k)$, on conclut :
$$\exp(L_A(z)) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A))\frac{z^n}{n!} = \Phi_A(z).$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** On note que $\exp \circ L_A$ est une composition de fonctions développables en série entière en 0, avec d'ailleurs : $L_A(0) = 0$. Pouvait-on donc montrer le résultat de cette question grâce à la question 10 de la première partie ?

15. On a : $D_n = \mathcal{P}_n(\mathbb{N} \setminus \{0,1\})$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (en effet, une permutation est un dérangement si et seulement si elle n'admet pas de cycle de longueur 1, puisqu'il y en a autant que de points fixes). Or d'après la question précédente :
$$\forall z \in]-1,1[, \quad \Phi_{(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}(z) = \exp(L_{(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}(z)) - 1 = \exp\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right) - 1 = \exp(-\ln(1-z) - z) - 1,$$
ce qui permet d'expliciter le développement en série entière de $\Phi_{(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}$, *via* un produit de Cauchy (licite puisque les deux séries entières en jeu sont respectivement de rayons de convergence 1 et $+\infty$) :
$$\forall z \in]-1,1[, \quad \Phi_{(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}(z) = \frac{e^{-z}}{1-z} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) z^n.$$
Comme on a par ailleurs, d'après ce qu'on a dit plus haut :
$$\forall z \in]-1,1[, \quad \Phi_{(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{card}(D_n)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}_n(D_n) z^n,$$
on obtient par unicité des coefficients des fonctions développables en série entière :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \mathrm{P}_n(D_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1},$$
d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(D_n) = \dfrac{1}{e}$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi ai-je pris $z \in]-1,1[$ au lieu de $z \in D$?
> — Comparer le raisonnement de cette partie avec la méthode vue en travaux dirigés pour obtenir le nombre de dérangements de S_n. Sont-ce des raisonnements de même nature ?

16. On reprend le raisonnement ci-dessus mais avec $A = 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$\forall z \in]-1{,}1[, \quad L_A(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{2k} = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - z^2\right),$$

donc :

$$\forall z \in]-1{,}1[, \quad \Phi_A(z) = \exp(L_A(z)) - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} - 1.$$

Or le développement usuel de $z \mapsto (1+z)^\alpha$, composé avec $z \mapsto -z^2$ et avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, donne :

$$\forall z \in]-1{,}1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)}{2^n n!} z^{2n}.$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\prod_{k=1}^{n} (2k)}{\prod_{k=1}^{n} (2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall z \in]-1{,}1[, \quad \Phi_A(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^{2n}.$$

Par unicité des coefficients, on a pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (et aussi pour $n = 0$ dans le second cas) :

$$\mathrm{P}_{2n}(\mathcal{P}_{2n}(A)) = \frac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_{2n}(A))}{(2n)!} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad \mathrm{P}_{2n+1}(\mathcal{P}_{2n+1}(A)) = \frac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_{2n+1}(A))}{(2n+1)!} = 0.$$

Trouvons un équivalent de cette quantité *via* la formule de Stirling :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \cdot 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

On a donc : $\mathrm{P}_{2n}(\mathcal{P}_{2n}(A)) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Même question que dans la question précédente : pourquoi ne pas avoir pris $z \in D$? Il y a deux réponses à cette question.

— Savoir obtenir le développement proposé de $z \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ sans difficulté.

— L'équivalent $\binom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$ est fréquemment utilisé et est, lui aussi, à savoir retrouver yeux fermés.

— Pouvait-on prédire le résultat pour $\mathcal{P}_{2n+1}(A)$?

17. Soit $z \in]-1{,}1[$ (la raison pour laquelle on se restreint à z réel sera claire ci-dessous). En posant : $A = \mathbb{N} \setminus [\![0, m]\!]$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}_n(\mathcal{P}_n(A)) = p_n(m)$. Il s'agit donc, dans cette question, de simplifier $\Phi_A(z)$. On a :

$$\Phi_A(z) = \exp\left(\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right) - 1 = \exp\left(-\ln(1-z) - \sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n}\right) - 1 = \frac{\exp\left(-\sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n}\right)}{1-z} - 1.$$

Pour écrire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)$, nous devions nous restreindre à $z\in]-1,1[$. Justifions que l'identité reste valable pour tout $z\in D$ par le principe du prolongement analytique. Le membre de droite de l'égalité ci-dessus est un produit de fonctions développables en série entière sur D, puisque :

$$\forall z\in D,\quad \frac{\exp\left(-\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{z^n}{n}\right)}{1-z}-1=\frac{1}{1-z}\prod_{n=1}^{m}\exp\left(-\frac{z^n}{n}\right)-1,$$

et $z\mapsto\dfrac{1}{1-z}$ et la fonction exponentielle sont développables en série entière sur D (et même sur $\mathbb{C}$ pour l'exponentielle). Écrivons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}c_nz^n$ la série entière dont la somme sur D égale cette fonction. On a, par l'égalité précédente :

$$\forall z\in]-1,1[,\quad \Phi_A(z)=\frac{\exp\left(-\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{z^n}{n}\right)}{1-z}-1=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n.$$

Nous avons deux sommes de série entière coïncidant sur un voisinage de 0. Par unicité des coefficients : $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A))}{n!}=c_n$. On a alors :

$$\forall z\in D,\quad \Phi_A(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{card}(\mathcal{P}_n(A))}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n=\frac{\exp\left(-\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{z^n}{n}\right)}{1-z}-1,$$

d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Voici une application du principe du prolongement analytique. Comprendre ce qui a pu motiver son recours, et comment je rédige *proprement* l'utilisation de l'unicité des coefficients pour obtenir le prolongement.

— A-t-on toujours $\exp\left(-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\right)=1-z$, comme semble le suggérer ce raisonnement ? Et que dire de la composition dans l'autre sens, à savoir $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(\exp(z))^n}{n}$?

18. Comme l'exponentielle et les applications polynomiales sont continues sur $\mathbb{C}$ (l'exponentielle parce que c'est une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$), on a immédiatement la continuité sur $\overline{\mathrm{D}}^*$ de φ_m, en tant que différence de quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\overline{\mathrm{D}}^*$. C'est le prolongement par continuité sur $\overline{\mathrm{D}}$ qui fait le sel de cette question. Pour cela, il suffit de montrer que φ_m admet une limite (finie) quand la variable complexe z tend vers 1. Soit $z\in\overline{\mathrm{D}}^*$ au voisinage de 1. On a :

$$\begin{aligned}\varphi_m(z)=\frac{e^{-H_m}}{1-z}\left(\exp\left(H_m-\sum_{k=1}^{m}\frac{z^k}{k}\right)-1\right)&=\frac{e^{-H_m}}{1-z}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1-z^k}{k}\right)-1\right)\\&=\frac{e^{-H_m}}{1-z}\left(\exp\left((1-z)\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}z^j\right]\right)-1\right).\end{aligned}$$

L'application $g:z\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}z^j\right]$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{C}$ (et en particulier en 1). On a plus précisément : $\displaystyle\lim_{z\to1}g(z)=m$, ce qui permet d'écrire : $g(z)=m+\underset{z\to1}{o}(1)$ (le sens de cette notation de Landau est le même que dans le cas réel). Alors :

$$\exp\left((1-z)\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} z^j\right]\right) = \exp\left((1-z)\left(m + \underset{z\to 1}{o}(1)\right)\right),$$

et comme l'argument de l'exponentielle tend vers 0 quand $z \to 1$, on a :

$$\exp\left((1-z)\left(m+\underset{z\to 1}{o}(1)\right)\right) = 1 + (1-z)\left(m + \underset{z\to 1}{o}(1)\right) + \underset{z\to 1}{o}(1-z)$$

(si vous trouvez douteuse la validité pour une variable complexe de ce développement limité à l'ordre 1, qui *semble* utiliser la dérivation selon la variable réelle : voir la remarque ci-dessous). On en déduit :

$$\varphi_m(z) = \frac{e^{-H_m}}{1-z}\left((1-z)\left(m+\underset{z\to 1}{o}(1)\right) + \underset{z\to 1}{o}(1-z)\right) = e^{-H_m}\left(m + \underset{z\to 1}{o}(1)\right) \underset{z\to 1}{\longrightarrow} me^{-H_m}.$$

Ceci montre que φ_m admet une limite finie en 1, et donc qu'elle est prolongeable par continuité en ce point puis sur $\overline{\mathbb{D}}$. D'où le résultat.

Remarque. Justifions proprement que le développement limité : $\exp(z) = 1 + z + \underset{z\to 0}{o}(z)$, reste valable pour une variable complexe z. On a : $\exp(z) = 1 + z + z\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$, et la série entière $\sum_{n\geqslant 2}\frac{z^{n-1}}{n!}$ est bien entendu de rayon de convergence non nul (il est même infini), puisqu'on l'a obtenu à partir de la série exponentielle en lui ôtant deux termes (et en divisant par z). Sa somme ε est donc continue sur $\mathbb{C}$ et en particulier en 0. On a donc : $\lim_{z\to 0}\varepsilon(z) = \varepsilon(0) = 0$. D'où le résultat : $\exp(z) = 1 + z + z\varepsilon(z) = 1 + z + \underset{z\to 0}{o}(z)$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> - Éclairer le sens de la notation de Landau, où je reste elliptique sur la définition.
> - Est-ce que, comme dans la remarque ci-dessus, tous les développements limités des fonctions usuelles, à tout ordre, s'étendent à une variable complexe ? (On ne parlera bien sûr pas des fonctions qui ne sont pas définies dans le plan complexe.)
> - La remarque permet de montrer que $\lim_{z\to 0}\frac{\exp(x)-1}{z}$ existe et est finie même quand $z \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0. Autrement dit : l'exponentielle est dérivable au sens complexe en 0. Et en les autres points ? Et peut-on généraliser à toutes les sommes de série entière ?

19. On reconnaît la formule intégrale de Cauchy. Pour ce faire, encore faut-il vérifier que φ_m est la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(p_n(m) - e^{-H_m}\right)z^n$ (au coefficient constant près). C'est le but des calculs qui suivent. Puis nous démontrerons cette formule intégrale dans ce cas particulier.

Soient $\rho \in]0,1[$, $t \in [0,2\pi]$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Posons : $z = \rho e^{it}$. On a : $|z| = \rho < 1$, donc par la question 17 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k(m)z^k = \frac{\exp\left(-\sum_{n=1}^{m}\frac{z^n}{n}\right)}{1-z} - 1 = \varphi_m(z) + \frac{e^{-H_m}}{1-z} - 1 = \varphi_m(z) + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-H_m} z^k - 1,$$

donc :

$$1 - e^{-H_m} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(p_k(m) - e^{-H_m}\right)z^k = \varphi_m(z).$$

Remplaçons z par son expression explicite, multiplions cette égalité par e^{-int}, et intégrons de $t=0$ à $t=2\pi$. On a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} = 0$, donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_m\left(\rho e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t &= \left(1-e^{-H_m}\right)\int_0^{2\pi} e^{-int}\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(p_k(m)-e^{-H_m}\right)\rho^k e^{i(k-n)t} \\ &= \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(p_k(m)-e^{-H_m}\right)\rho^k e^{i(k-n)t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour poursuivre, nous aimerions intégrer terme à terme. Posons :

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall t\in[0,2\pi],\quad f_k(t) = \left(p_k(m)-e^{-H_m}\right)\rho^k e^{i(k-n)t}.$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'application f_k est continue par continuité de l'exponentielle, et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\|f_k\|_\infty = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|p_k(m)-e^{-H_m}\right|\rho^k < +\infty,$$

la finitude de cette dernière somme étant assurée par le fait que les séries entières $\sum\limits_{k\geqslant 1} p_k(m)z^n$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1} z^n$ soient de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (pour la première, cela découle de la question 12) : c'est donc aussi le cas de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left(p_k(m)-e^{-H_m}\right)z^k$, qui par conséquent converge absolument en tout $z\in D$, et donc en particulier en $z=\rho$.

Ainsi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} f_k$ converge normalement donc uniformément sur $[0,2\pi]$, ce qui permet d'intégrer terme à terme et de poursuivre le calcul ci-dessus. On obtient :

$$\int_0^{2\pi}\varphi_m\left(\rho e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(p_k(m)-e^{-H_m}\right)\rho^k e^{i(k-n)t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(p_k(m)-e^{-H_m}\right)\rho^k\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\mathrm{d}t,$$

et par un calcul similaire à celui ci-dessus on a : $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\mathrm{d}t = 0$, sauf pour $k=n$ où cette intégrale vaut 2π, donc finalement :

$$\int_0^{2\pi}\varphi_m\left(\rho e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t = 2\pi\left(p_n(m)-e^{-H_m}\right)\rho^n,$$

d'où le résultat après réarrangement des termes :

$$p_n(m) = e^{-H_m} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_m\left(\rho e^{it}\right)\frac{e^{-int}}{\rho^n}\mathrm{d}t.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Réviser si besoin comment on démontre la formule intégrale de Cauchy. Si on la connaît mais qu'on n'a pas remarqué que c'était ce qu'il s'agissait de démontrer : faire un effort conscient pour la reconnaître à l'avenir, à la simple lecture de l'énoncé.

20. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Posons : $\forall(\rho,t)\in]0,1]\times[0,2\pi]$, $f(\rho,t) = \varphi_m\left(\rho e^{it}\right)\dfrac{e^{-int}}{\rho^n}$. Alors f est continue sur $]0,1]\times[0,2\pi]$ d'après les différentes opérations sur les fonctions continues : par exemple, la continuité de $(\rho,t)\mapsto e^{-int}$ découle de la composition de $(\rho,t)\mapsto -int$, continue car linéaire et à valeurs dans $\mathbb{C}$, et de la fonction exponentielle continue sur $\mathbb{C}$. Notons aussi que $(\rho,t)\mapsto\rho e^{it}$ est continue sur $]0,1]\times[0,2\pi]$ par des arguments analogues et à valeurs dans $\overline{\mathrm{D}}$, or φ_m est continue sur $\overline{\mathrm{D}}$ d'après ce qu'on a démontré dans la question 18, donc par composition il en est de même de $(\rho,t)\mapsto\varphi_m(\rho e^{it})$.

Puisque f est continue sur $]0,1]\times[0,2\pi]$, on en déduit que :

- pour tout $\rho \in]0{,}1]$, l'application $t \mapsto f(\rho, t)$ est continue donc continue par morceaux sur $[0{,}2\pi]$ (composer f à droite par $t \mapsto (\rho, t)$ qui est clairement continue composante par composante) ;
- pour tout $t \in [0{,}2\pi]$, l'application $\rho \mapsto f(\rho, t)$ est continue sur $]0{,}1]$ (composer f à droite par $\rho \mapsto (\rho, t)$) ;
- pour tout segment $[a, b] \subseteq]0{,}1]$, par continuité sur le compact $[a, b] \times [0{,}2\pi]$ (c'est un produit cartésien fini de compacts) et le théorème des bornes atteintes, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall (\rho, t) \in [a, b] \times [0{,}2\pi], \quad |f(\rho, t)| \leqslant M \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$
et l'application $t \mapsto M$ est bien entendu intégrable sur le segment $[0{,}2\pi]$ car continue.

Par le théorème de continuité sous le signe l'intégrale, l'application $\rho \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\rho, t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $]0{,}1]$: ce qu'il fallait démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Cette façon d'obtenir aisément la continuité fut commentée au chapitre VII. À revoir si vous l'aviez oubliée.
- Pourquoi, ici, ai-je davantage justifié les régularités qu'à l'accoutumée, à votre avis ?
- Essayer de traiter cette question sans recours au théorème des bornes atteintes sur un produit cartésien de segments.

21. La continuité de l'intégrale à paramètre de la question précédente permet d'étendre la formule intégrale de Cauchy démontrée à la question 19. Quand on prend la limite dans cette égalité quand $\rho \to 1^-$, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad p_n(m) = e^{-H_m} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_m\left(e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t.$$
Pour obtenir la limite attendue par l'énoncé, il suffit de démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} \varphi_m\left(e^{it}\right)e^{-int}\mathrm{d}t = 0$. C'est le lemme de Riemann-Lebesgue, dont la démonstration est facile lorsque le facteur de e^{-int} dans l'intégrande est de classe C^1 (il suffit d'intégrer par parties en intégrant le terme exponentiel : un facteur $\frac{1}{n}$ en résulte et assure la convergence vers 0 quand $n \to +\infty$). Ici l'intégrande n'est pas de classe C^1 sur $[0{,}2\pi]$ à cause du prolongement de φ en 1, dont on sait seulement qu'il est continu : rien n'a été établi pour la dérivabilité (il s'avère qu'elle est aussi vérifiée mais elle est très pénible à obtenir : l'approche qui suivra sera plus économe). Pas grave : nous allons simplement nous éloigner du problème en 1 pour intégrer par parties. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$. L'application $\psi : t \mapsto \varphi_m\left(e^{it}\right)$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ grâce aux opérations classiques sur les fonctions de classe C^1. Une intégration par parties donne :
$$\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \psi(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \left[\frac{\psi(t)e^{-int}}{-in}\right]_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} + \frac{1}{in}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t,$$
donc :
$$\left|\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \psi(t)e^{-int}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2\|\psi\|_\infty}{n} + \frac{2\pi}{n}\|\psi'\|_{\infty,[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on ait : $\displaystyle\left|\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \psi(t)e^{-int}\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$. Or, trivialement :
$$\left|\int_0^\varepsilon \psi(t)e^{-int}\mathrm{d}t + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} \psi(t)e^{-int}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon\|\psi\|_\infty,$$
donc on a montré :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall n \geqslant N, \quad \left|\int_0^{2\pi} \psi(t)e^{-int}\mathrm{d}t\right| \leqslant (2\|\psi\|_\infty + 1)\,\varepsilon.$$

Ceci montre : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\psi(t)e^{-int}\mathrm{d}t = 0$, comme annoncé. L'identité plus haut donne donc le résultat voulu quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} p_n(m) = e^{-H_m}.$$

Remarque. Il est aussi possible de démontrer le résultat en approchant $t \mapsto \varphi_m(e^{it})$ sur $[0,2\pi]$ par des fonctions en escalier sur (c'est ainsi que nous avons procédé en travaux dirigés au chapitre I). Ma façon de faire était simplement dictée par le fait de diminuer le nombre d'étapes dans le raisonnement.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Réviser comment on obtient les différentes versions du lemme de Riemann-Lebesgue, si l'on n'est plus au point là-dessus.

— Pourquoi ai-je voulu considérer l'intégrale quand $\rho \to 1$? Qu'est-ce qui aurait échoué, dans mon raisonnement, si j'avais conservé l'intégrale pour $\rho < 1$?

— Pourquoi le problème est effectivement en 1 pour φ ? Et pourquoi cela se traduit par le fait de se placer sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ dans la suite de mon raisonnement ?

— Peut-on démontrer que $t \mapsto \varphi_m(e^{it})$ est de classe C^1 sur $[0,2\pi]$, ce qui éviterait mon raisonnement epsilonesque ?

— Retenir la stratégie globale (déjà croisée ailleurs) de cette fin de problème : connaissant le comportement d'une somme de série génératrice (ici φ_m, à peu de choses près), en l'occurrence le fait qu'elle soit continue sur la boule unité fermée, utiliser la formule intégrale de Cauchy pour exprimer la suite étudiée en fonction de ladite somme puis obtenir son comportement asymptotique.