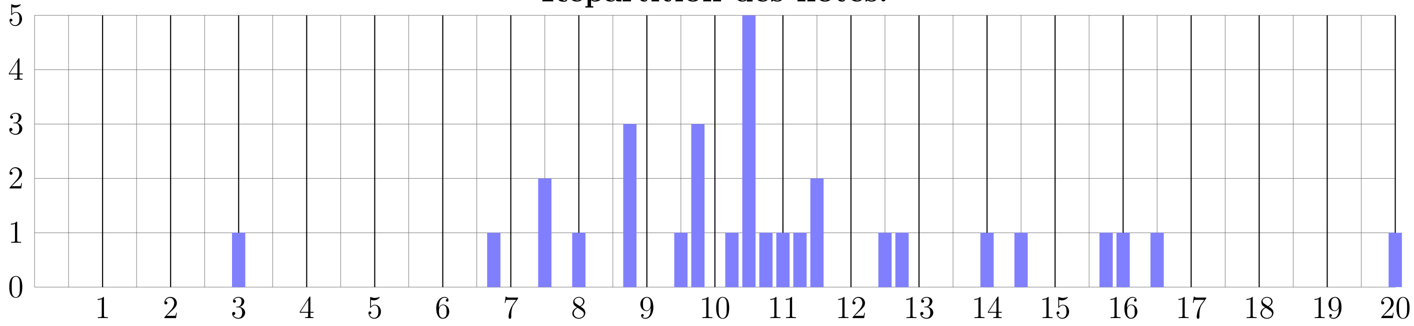
Devoir sur table n° 7 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **62 points**.
Moyenne : 10,92. **Écart-type :** 3,33.
Premier quartile : 9,125. **Médiane :** 10,5. **Troisième quartile :** 12.

Redite des devoirs précédents.

1. Si mon compte est bon, c'est la quatrième fois (et donc quatre fois de trop) que je souligne que l'intégrabilité sur des segments des fonctions continues est un THÉORÈME, et que par conséquent la mention de la continuité dans les études d'intégrabilité N'EST PAS FACULTATIVE.
   Dans ce devoir, je n'eus aucun scrupule à sauter la correction d'une question d'intégrabilité où la continuité fut omise (idem dans tous ceux qui suivront).

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

2. Les théorèmes d'interversion sur les séries de fonctions démontrent l'existence de tous les objets en jeu en plus de permettre l'interversion (parce que l'existence est soit montrée dans les hypothèses, soit dans les conclusions). Ainsi, lorsqu'on demande de montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur I, il est inutile de procéder en deux temps : lorsque vous montrez que le théorème de continuité d'une limite uniforme s'applique, vous avez en même temps la définition sur I.
   Même remarque pour le théorème sur le produit de Cauchy : il prouve en même temps la convergence absolue du produit de Cauchy. Démontrer sa convergence en amont est donc une perte de temps.
3. À partir du moment où une fonction f n'est pas continue par morceaux sur un intervalle I, la convergence de $\int_I f$ n'a aucun sens et il n'est même pas la peine d'en discuter.
4. Vouloir montrer directement : $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x) + K = 0$, en regroupant les trois intégrales sans autre opération préalable, fut une erreur méthodologique très largement évitable, par simple inspection de la quantité à simplifier : le membre de gauche est égal à $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\frac{-x}{(u+x)^2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{u+x} + 1 \right) \mathrm{d}u$ et L'UNICITÉ d'une décomposition en éléments simples vous assure que l'intégrande NE peut PAS donner zéro, peu importe l'acharnement que vous mettrez dans vos calculs.
   Cela devait naturellement vous conduire à changer la forme d'une de ces intégrales (par exemple $F(x)$), par une intégration par parties pour avoir des éléments simples comparables et simplifiables.

Imprécisions mathématiques.

5. Les hypothèses de régularité du théorème de dérivation sous le signe intégrale furent assez mal retenues. Il en manqua souvent une, plus rarement deux (heureusement). La plus souvent oubliée fut l'hypothèse d'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$.
   Je vous rappelle que hormis l'hypothèse de domination, toutes les hypothèses peuvent se retrouver en inspectant les conditions nécessaires ou suffisantes d'existence des objets dans l'égalité : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$. Cela vaut d'ailleurs pour tous les théorèmes d'interversion (voir *Méthodes* du chapitre VII, *Comment retrouver les hypothèses et conclusions*).
6. Dans la comparaison série-intégrale, l'existence des intégrales fut souvent négligée (mentionner la positivité des intégrandes suffisait).

7. Vous avez été nombreux à démontrer la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ en cherchant un équivalent de $|u_{n+1} - u_n|$ et en utilisant le lien suite-série. C'est bien. En revanche vous avez été rares à vous simplifier la vie en effectuant un développement asymptotique de $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $\sqrt{n+1}$.
   Pour ceux qui ont obtenu un équivalent : c'est certes plus précis, mais si l'on sait qu'on veut démontrer la convergence, alors un $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ où $\alpha > 1$ suffit. Cela diminue l'ordre des développements.
8. Faites bien attention lorsque vous faites un produit de Cauchy avec des séries dont l'indexation ne commence pas à $n = 0$, mais à $n = 1$ dans le cas du devoir. Il y aura des termes en trop si votre produit de Cauchy commence aussi à $n = 1$ (évident si on distribue informellement le produit $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n\right) = a_1 b_1 x^2 + \cdots$: le premier terme n'est pas $a_1 b_1 x$).
   Pour éviter de vous tromper : soit vous réindexez vos séries de sorte à ce qu'elles commencent à $n = 0$ (ce que je fais dans le corrigé), ce qui vous permet d'utiliser sans risque l'énoncé que vous connaissez, soit vous refaites (au brouillon) la démonstration vue au chapitre II que la somme d'un produit de Cauchy est le produit des sommes, où il suffisait d'appliquer convenablement le théorème de sommation par paquets après avoir écrit : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2} u_m v_n$ (les paquets sont : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $I_k = \{(m,n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid m + n = k\}$, le paquet étant vide donc inutile si l'on prend $k \leqslant 1$, vu que $m + n \geqslant 2$).
9. L'ensemble $[\![0, n]\!]$ n'a pas n éléments, mais $n + 1$. La majoration $\mathrm{card}(A(n)) \leqslant n$ fut donc fautive.
10. Puisque $A_1(n) = \{p^2 \mid 1 \leqslant p^2 \leqslant n\}$ est explicite, obtenir son cardinal par récurrence est poussif.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

11. Effectuer un produit de Cauchy ou une interversion de deux sommes nécessite des hypothèses !
12. Il ne va pas de soi que la divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ implique : $\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} = +\infty$. C'est un problème d'interversion que les théorèmes du cours ne peuvent résoudre. Il vaut cependant le coup de se demander si la parade trouvée pour les séries de fonctions s'adapte ici (pas si clair, mais...).
13. L'erreur $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-nx}$, fréquemment rencontrée, me semble très facilement évitable si l'on remarque que $b_n = a_{\varphi(n)}$ ne peut être qu'en facteur de $e^{-\varphi(n)x}$.
14. Il m'a surpris que si peu d'élèves parviennent à calculer la limite quand $x \to +\infty$ de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\mathrm{d}u$: le théorème de convergence dominée à paramètre continu, ou des encadrements triviaux (avec $u + x \geqslant x$ et le théorème des gendarmes) mènent au résultat sans calcul savant.
    Pour la limite quand $x \to 0$, en revanche, il y avait une vraie difficulté. Je vous renvoie au document *Méthodes* du chapitre I, *Limites et développements limités, asymptotiques d'intégrales*, pour revoir comment aborder le cas particulier d'un équivalent lorsque l'intégrale semble « devenir divergente » en passant à la limite. Ici : quand $x \to 0$, la contribution de l'intégrande à la valeur de l'intégrale se concentre autour de 0 à cause du terme $\frac{1}{u+x}$; l'approximation $e^{-u} \approx 1$ est donc peu coûteuse, de sorte que : $F(x) \approx \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}(u+x)} = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ (cette dernière intégrale se calcule *via* le changement de variable $v = \sqrt{u}$, si vous ne reconnaissez pas immédiatement la dérivée de $u \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} \arctan\left(\sqrt{\frac{u}{x}}\right)$).
    On démontre ensuite cette conjecture en étudiant la différence $F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}(u+x)}$ pour montrer qu'elle est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (cela nécessite d'expliciter l'écart entre e^{-u} et 1, sachant qu'il est petit pour u proche de 0 : scinder l'intégrale en deux), ou en appliquant intelligemment le théorème de convergence dominée à l'intégrale $\sqrt{x}F(x)$ (c'est la voie du corrigé).

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— PREMIÈRE PARTIE : questions 5 et 6 ;
— TROISIÈME PARTIE : question 15 ;
— QUATRIÈME PARTIE : question 19.