Devoir sur table n° 7

(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires **1**

2 Rapport officiel de l'épreuve **1**

3 Corrigé **6**

1 Commentaires

Ce devoir est une reproduction à l'identique de l'épreuve de Mathématiques II du Concours Commun Mines-Ponts, année 2016, filière MP (l'épreuve durait bien quatre heures, ce qui n'est pas une règle générale à ce concours).

Je n'ai pas eu le temps de développer ce commentaire.

Ce qu'on retiendra en bref. Régularité d'une intégrale à paramètre, application au calcul d'une intégrale proche de l'intégrale de Gauß. Continuité d'une somme de série de fonctions, équivalent obtenu par une comparaison série-intégrale ou par un développement asymptotique du terme général. Convergence d'une suite grâce au lien suite-série. Produits de Cauchy. Raisonnements par densité (théorème d'approximation de Weierstraß). Approximation de fonctions indicatrices pour étendre un résultat à toutes les fonctions continues par morceaux.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1 à 3 ;

— DEUXIÈME PARTIE : questions 7 à 10 ;

— TROISIÈME PARTIE : questions 12 et 13 ;

— QUATRIÈME PARTIE : questions 16 et 17.

2 Rapport officiel de l'épreuve

Le sujet de cette année consistait en la démonstration par Karamata d'un résultat obtenu auparavant par Hardy et Littlewood sur le comportement asymptotique de la somme partielle d'une série entière en fonction d'un équivalent simple de celle-ci au bord de son disque de convergence. Il faisait intervenir plusieurs branches de l'analyse : intégrales dépendant d'un paramètre, séries de fonctions, familles sommables, mais aussi un peu de raisonnement sur les entiers qui sont sommes de deux carrés et un peu d'algèbre linéaire.

Ce problème requérait plusieurs qualités de la part des candidats : une bonne connaissance de leur cours, la pratique des méthodes courantes de raisonnement et de calcul, mais aussi la compréhension des questions, la capacité à saisir le fil conducteur du problème et de l'esprit d'initiative pour résoudre les questions dont la solution n'est pas évidente *a priori*.

Les notes obtenues par les candidats sont fonction de leurs compétences dans chacun de ces domaines, et aussi, bien sûr, de l'effort de réflexion et de rigueur qu'ils ont fourni durant les quatre heures de l'épreuve. En effet, de nombreuses questions paraissaient fort simples voire élémentaires, mais leur rédaction requérait du soin de façon à fournir une argumentation complète des assertions proposées, comme nous allons le voir à présent.

Question 1. Les règles d'intégrabilité des fonctions en 0 et en $+\infty$ sont certes connues par la plupart des candidats, mais ils ne précisent pas tous qu'ils sont en droit de l'appliquer à la fonction ψ du fait qu'elle est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Question 2. Le sujet demandait de définir précisément les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie, ce qui n'a été fait correctement que par une minorité de candidats. Il ne suffisait donc pas de prouver que $F(x)$ existe pour tout $x > 0$, mais il fallait également prouver que $F(0)$ n'existe pas (la fonction intégrée n'étant alors pas intégrable près de 0) ni non plus $F(x)$ pour $x < 0$ (la fonction intégrée n'étant alors pas intégrable près de $-x$, ni même continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, condition stipulée par le programme). En outre, il ne servait à rien d'utiliser ici le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, la continuité de F n'étant pas demandée par le sujet.

Question 3. Il s'agissait ici d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, dont la bonne connaissance était évidemment requise pour obtenir les points de cette question. Outre les conditions de régularité tant en x qu'en u et d'intégrabilité de la fonction intégrée et de sa dérivée, il fallait fournir une fonction de domination de la dérivée : or souvent, celles proposées par les candidats soit étaient non intégrables sur $]0, +\infty[$, soit dépendaient de x, soit ne dominaient pas la fonction intégrée pour tout $x > 0$. Il fallait en tout cas limiter les valeurs de x (et non de u !) à un segment, ou du moins à un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, pour obtenir une fonction de domination qui convienne. Il est regrettable de constater que moins de la moitié des candidats réussissent à traiter correctement cette question d'application directe du cours.

Question 4. Nous avons été surpris du très faible nombre de candidats qui ont ne serait-ce qu'abordé valablement cette question, et par le nombre important de ceux qui ont manipulé l'expression de départ pour aboutir au résultat demandé. Le calcul de $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x)$ par simple emploi de la linéarité ne donne évidemment pas $-K$: il était donc nécessaire d'effectuer une intégration par parties sur l'une des intégrales pour parvenir à ce résultat. La nécessité de préserver l'intégrabilité des fonctions interdisait de choisir comme fonction à [intégrer] autre chose que $\frac{1}{\sqrt{u}}$. Ce choix étant fait, le calcul permettait d'obtenir assez simplement le résultat.

Question 5. Il était inutile de recourir ici à la théorie de la résolution des équations différentielles, le travail étant déjà fait par la proposition par l'énoncé de la fonction G. Il suffisait de dériver celle-ci et d'utiliser le résultat de la question 4 pour obtenir $-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Il suffisait alors [d'intégrer] les deux fonctions, en n'omettant pas de préciser que l'intégrabilité et la continuité du second membre rendait licite le recours à une intégrale.

Question 6. La plupart des candidats n'ont pas compris les attentes de cette question. Il n'y avait pas grand-chose à faire pour établir que $G(x)$ tend vers C quand x tend vers 0 et vers $C - K^2$ quand x tend vers $+\infty$: c'est la valeur numérique de ces limites qu'il était nécessaire de calculer. Il a souvent été procédé à une interversion de l'intégrale et de la limite sans justification, ce qui donnait tout de même le bon résultat en $+\infty$, mais les candidats obtenaient 0 en 0 car ils considéraient faussement que F admet une limite finie en 0, sans égard pour le résultat de la question 2. Il en résultait alors $C = K = 0$, ce que certains candidats écrivaient sans vergogne, nonobstant le fait que l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive ne saurait être nulle ! L'absence de ce genre de signal d'alerte, qui devrait alarmer les candidats sur la fausseté de leur raisonnement, est l'une des constatations les plus regrettables à l'issue de la correction. Pour la limite en $+\infty$, le recours au théorème de convergence dominée n'était guère utile étant donné qu'une simple majoration de la fonction intégrée suffisait. De surcroît, il ne fallait surtout pas localiser la majoration en limitant les valeurs de x à un segment de $]0,+\infty[$ pour ensuite faire tendre x vers 0 ou vers $+\infty$! Pour la limite en 0, il fallait de nouveau faire preuve d'initiative de façon à obtenir le comportement de $F(x)$, et effectuer le changement de variable $u = tx$, puis recourir au théorème de convergence dominée et à un nouveau changement de variable de façon à établir que $G(x)$ tend vers π quand x tend vers 0. C'est une qualité importante du scientifique ou de l'ingénieur que de savoir utiliser à bon escient les outils à sa disposition sans attendre qu'on lui dise de le faire, car c'est ainsi qu'il participe à l'innovation technique et à l'avancée de la science.

Question 7. Si l'existence de f et g a généralement été établie correctement, il n'en est pas de même de leur continuité : certains candidats pensent que les séries les définissant convergent normalement sur $]0,+\infty[$, d'autres omettent complètement l'hypothèse de convergence normale ; d'autres enfin oublient tout simplement de préciser que les fonctions sommées sont continues sur $]0,+\infty[$.

Question 8. C'était une question classique sur la comparaison série-intégrale. L'hypothèse de décroissance de la fonction φ_x définie par $\varphi_x(u) = \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ (et non des fonctions f_n définies par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$) permettait d'encadrer $\varphi_x(n)$ entre les intégrales de φ_x sur les segments $[n, n+1]$ et $[n-1, n]$; l'intégrabilité de φ_x permettait de faire la somme des séries des trois termes obtenus. Le changement de variable $t = ux$ permettait enfin d'obtenir l'équivalent $\frac{K}{\sqrt{x}}$. Trop de candidats s'en sont dispensés, donnant alors pour équivalent de $f(x)$ une fonction de u, voire une intégrale divergente en u, ceci en recourant à un théorème de convergence dominée alors que pour $x = 0$ il n'y a pas de convergence du tout !

Question 9. Un candidat moyen devrait au moins savoir résoudre simplement ce genre d'exercice standard que l'on rencontre couramment. Que ce soit par le théorème de comparaison série-intégrale, par l'emploi d'une série télescopique, par le caractère décroissant et minoré de la suite étudiée ou par l'étude de deux suites adjacentes, entre autres procédés possibles, la convergence de cette suite pouvait être établie facilement. Malheureusement, trop de candidats affirment que deux suites sont équivalentes si leur différence tend vers zéro, ou que si la différence de deux termes consécutifs d'une suite tend vers zéro alors cette suite est convergente, ou encore qu'une suite bornée est nécessairement convergente.

Question 10. La convergence de cette série pouvait être établie, soit à l'aide des questions 7 et 9, soit par une simple majoration du terme général par ne^{-nx}. Le calcul pouvait s'opérer de plusieurs manières : soit en calculant le produit des sommes partielles et en faisant tendre le nombre de termes vers l'infini, soit par produit de cette série par $1 - e^{-x}$, soit encore en recourant à un produit de Cauchy, à condition dans ce dernier cas de justifier le procédé par la positivité de tous les termes des séries concernées.

Question 11. Curieusement, bien peu de candidats ont été capables de donner un équivalent simple de $h(x)$ alors qu'il suffisait de dire que $1 - e^{-x}$ est équivalent à x en 0. Quant à ceux qui ont essayé de donner un équivalent de $g(x)$, ils ont souvent recouru à un théorème de convergence dominée, alors qu'il n'y avait pas convergence du terme général par rapport à x, mais équivalence de celui-ci à celui de la série définissant $2g(x)$ quand x tend vers 0. On ne pouvait pas non plus invoquer l'équivalence des sommes des séries de termes généraux équivalents, puisqu'il n'était pas question ici d'établir l'équivalence des sommes partielles de séries divergentes ni des restes de séries convergentes ! C'est là que la convergence de la suite des différences des termes généraux, et non l'équivalence de ceux-ci, avait tout son intérêt, car cette suite étant bornée par une constante M, on pouvait majorer la différence $|h(x) - 2g(x)|$ par $\frac{M}{1-e^{-x}}$ qui est équivalent à $\frac{M}{x}$ quand x tend vers 0, donc négligeable devant $h(x)$, ce qui permettait de conclure, ce que bien peu de candidats ont été capables de faire.

Question 12. La plupart des candidats ont déterminé correctement I_A dans le cas où A est fini. Dans le cas infini, l'existence de la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ a trop souvent résulté d'une paraphrase de l'énoncé par les candidats. Certains ont cru bon de recourir au théorème de Bolzano-Weierstraß : un bien gros pavé pour écraser une si petite mouche, et il aurait au moins fallu se limiter à n assez grand pour que la suite extraite soit constante et non seulement constante à partir d'un certain rang ! D'autres ont simplement proposé de numéroter les éléments de A et de prendre pour b_k l'élément numéroté k, sans égard au caractère obligatoirement croissant des indices d'une suite extraite. Quant à la détermination de I_A, elle requérait de considérer séparément les cas $x = 0$ et $x > 0$; mais de nombreux candidats l'ont traitée en écrivant : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, ce qui rendait évidemment impossible l'attribution de points pour cette partie de la question.

Question 13. La convergence de la série considérée résultait de la majoration $\operatorname{card}(A(n)) \leqslant n+1$ (et non n), et sa valeur du calcul d'un produit de Cauchy, ou autre méthode analogue à celles vues pour la question 10, en remarquant que $\operatorname{card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Question 14. Il n'est guère utile de recourir à une récurrence pour déterminer le nombre d'entiers dont le carré est inférieur ou égal à n : un peu de logique et de rigueur suffit pour cela. De nombreux candidats ont ensuite obtenu l'encadrement : $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1(x)}}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-x}}$; la négligeabilité du dernier membre devant $g(x)$ devait leur permettre d'obtenir l'équivalent demandé, malheureusement de trop nombreux candidats ont multiplié les trois membres de l'inégalité par $1 - e^{-x}$ et ont invoqué le théorème des gendarmes, alors que le membre central était alors encadré entre 0 et 1, commettant donc de nouveau la même erreur que dans la question 9.

Question 15. C'était là typiquement la question dont la réflexion, la rigueur et le soin permettaient de venir à bout.

Premier point : trouver une majoration du nombre de couples d'entiers non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$. Comme p et q sont compris entre 1 et n, on pouvait proposer n^2 (mais non $2n$) ; entre 1 et $\sqrt{n}$, on pouvait choisir $(\sqrt{n})^2$, soit n ; mais comme q est entièrement déterminé par p, on pouvait retenir $\sqrt{n}$. Aucune importance en tout cas, puisque la convergence de la série s'ensuivait dans tous les cas.

Deuxième point : interpréter $v(n)$ à l'aide de A_1. Peu de candidats ont su obtenir $v(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_{1,k} a_{1,n-k}$, et en déduire la relation demandée par produit de Cauchy de la série définissant f_{A_1} par elle-même.

Troisième point : comparer $a_{2,n}$ et $v(n)$. Il suffisait de dire : $a_{2,n}$ et $v(n)$ sont simultanément nuls, et si $a_{2,n}$ vaut 1 alors $v(n)$ est au moins égal à 1. Curieusement, de nombreux candidats ont affirmé que $\operatorname{card}(A_2(n))$ est inférieur ou égal à $v(n)$, ce qui rendait le résultat demandé trivial : malheureusement, il n'y a a priori aucune relation entre $\operatorname{card}(A_2(n))$ et $v(n)$, donc ce raisonnement est invalide.

Question 16. De nombreux candidats ont affirmé l'existence de $L(\psi)$ pour tout $\psi \in E$ par la majoration du terme général de la série sans valeur absolue, ou pis par la majoration des sommes partielles, pis encore par celle de la série tout entière, que l'on écrit de ce fait sans même savoir si elle converge ! Pis encore, certains ont majoré la norme uniforme du terme général de la série, incluant de ce fait l'exponentielle dans cette norme, de sorte que celui-ci ne pouvait être majoré que par $\alpha_n \|\psi\|_\infty$ qui n'est pas nécessairement le terme général d'une série convergente. La linéarité et le caractère croissant de L n'ont pas posé de problème en général.

Question 17. Le fait que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que Δ est linéaire résultaient à peu près des mêmes calculs, mais certains candidats ont oublié de conclure par ces deux assertions. Plusieurs ont attribué la continuité de Δ au fait que E_1 serait un espace vectoriel de dimension finie, ce qui est pourtant démenti par la question suivante.

Question 18. L'appartenance de e_p à E_1 ne saurait résulter d'un théorème de la double limite puisque la série définissant $L(\psi)$ n'a aucune raison de converger en 0. Ce ne peut être le cas que si ℓ est nul, ce qui n'est en général pas vrai, et implique que L est l'application nulle, ce qui en fait un cas sans intérêt. Un grand nombre de candidats affirment que la limite définissant $\Delta(\psi)$ existe du fait que la fonction concernée est bornée, ce qui est évidemment insuffisant. Certains ont réussi à calculer correctement $L\left(e_p\right)$, mais ils n'ont pas tous pensé à exprimer cette quantité en fonction de l'intégrale de e_p sur [0,1], ce qui les handicapait fortement pour la suite de la question et pour la suivante. Il ne fallait pas manquer ensuite d'en déduire que les polynômes appartiennent à E_1 par linéarité, puis d'énoncer le théorème de Weierstraß pour passer aux fonctions continues : ce que beaucoup de candidats parvenus à ce point ont pensé à faire, mais avec parfois des énoncés fantaisistes ou abrégés du style « toute fonction est limite d'un polynôme » ce qui ne fait penser que de très loin au théorème original ! Une autre erreur courante a été d'écrire la suite de polynômes $\left(P_n\right)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers une fonction continue ψ sous la forme $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$, ce qui faisait de ψ une fonction développable en série entière, ce qui est évidemment loin d'être toujours le cas.

L'appartenance de toute fonction continue ψ à E_1 était assurément la partie la plus délicate de la question. Une bonne partie des candidats qui l'ont traitée ont présupposé ce fait et introduit $\Delta(\psi)$ sans savoir si ce nombre existait. Il était nécessaire soit de recourir à un théorème de la double limite, soit d'introduire une majoration avec trois ε ; mais un prérequis à cela était d'établir que la fonction F qui à x associe $xL\left(e_0\right)(x)$ est prolongeable par continuité en 0, et est de ce fait définie et continue sur [0,1] donc bornée, ce qui permet d'affirmer la convergence uniforme de la suite des fonctions $F_k(x) = xL\left(P_k\right)(x)$ vers F, ou ce qui revient au même, de majorer leur différence par ε indépendant de $x \in [0,1]$. Enfin, la valeur de $\Delta(\psi)$ allait de soi quand on avait pensé à exprimer celle de e_p par son intégrale sur [0,1].

Question 19. De nombreux candidats ont établi la continuité des fonctions g_+et g_-, et s'en sont tenus là. Ceux qui disposaient de la valeur de $\Delta(\psi)$ sous forme de son intégrale pour tout $\psi \in E_0$ n'avaient aucune difficulté à calculer $\Delta\left(g_+\right)$et $\Delta\left(g_-\right)$; mais celui de $\Delta\left(\mathbb{1}_{[0,a]}\right)$ a souvent été fort mal mené. Il était pourtant naturel de se poser la question suivante : pour quelle raison l'auteur du sujet fait-il démontrer la croissance de L, résultat trivial dont la preuve est quasiment sans intérêt ? Quand on voit passer ce genre de question, il est bon de la garder en mémoire en se disant qu'elle va sûrement servir quelque part. En l'occurrence, c'était là que la croissance de L était utile, car elle permettait d'encadrer $\Delta\left(\mathbb{1}_{[0,a]}\right)$ par $\Delta\left(g_+\right)$et $\Delta\left(g_-\right)$, et en manipulant correctement ε et x, on obtenait $\Delta\left(\mathbb{1}_{[0,a]}\right) = a$ qui est encore l'intégrale de $\mathbb{1}_{[0,a]}$ sur [0,1].

Pour terminer, on déduisait par linéarité du résultat précédent que toutes les fonctions en escalier appartiennent à E_1, en précisant tout de même que deux fonctions qui diffèrent seulement en un nombre fini de points appartiennent à E_1 ; puis on pouvait utiliser le fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, ou - ce qui était suffisant - on pouvait encadrer une fonction h continue par morceaux par deux fonctions en escalier dont la différence des intégrales sur [0,1] est inférieure à ε, et on pouvait alors procéder comme précédemment pour en déduire que h appartient à E_1 et que $\Delta(h)$ est égale à l'intégrale de h sur [0,1]. Mais on est là à un point qui n'a été atteint que par un tout petit nombre de candidats.

Question 20. Facile même sans avoir fait grand-chose de ce qui précède, cette question a tout de même donné lieu à plusieurs erreurs sur la valeur de $L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right)$ puis sur celle de sa limite quand N

tend vers $+\infty$.

Question 21. Facile également, cette question a été rarement traitée car elle requérait d'avoir traité et compris plusieurs des questions précédentes, en particulier la question 15.

Conclusion. Le bilan de la correction de ce sujet est plutôt décevant : une faible proportion de candidats ont obtenu plus de la moitié des points sur le total brut, et pour beaucoup le sujet s'est limité aux questions 1, 2, 3, 7, 8, 12, 16, 17. Un grand nombre de copies nous ont paru ne pas répondre au minimum requis pour cette épreuve : orthographe et syntaxe déficientes, abus des abréviations, écriture difficilement lisible, questions non numérotées, sans parler des questions dont la rédaction est abandonnée en cours de route et des nombreuses ratures. Elles donnent un sentiment de désinvolture, voire de démission, de la part de leurs auteurs. Nous avons également constaté trop fréquemment une connaissance insuffisante du cours, l'incapacité de le mettre en pratique dans des situations simples, et le recours à des raisonnements manifestement faux pour aboutir au résultat voulu, ce qui manifeste clairement la malhonnêteté intellectuelle de leurs auteurs. Autant dire qu'un étudiant sérieux et travailleur, qui apprend son cours et s'entraîne aux méthodes et exercices classiques de celui-ci, a déjà de sérieux atouts. S'il prend le temps de réfléchir sur le sens des problèmes et d'en chercher le fil du raisonnement, s'il s'efforce de recourir aux outils dont il dispose pour attaquer des questions à première vue insolubles, il a de grandes chances d'obtenir une note qui le propulse vers les niveaux de l'admissibilité. Plus encore, par cette attitude orthogonale à un bachotage stérile, il se prépare ainsi au mieux à son futur métier d'ingénieur ou de chercheur par la recherche de solutions à des problèmes nouveaux qui ne manqueront pas de se poser à lui, tant il est vrai que la science et la technologie ne progressent qu'en sortant des sentiers battus.

3 Corrigé

Première partie – Une intégrale à paramètre

1. La fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Étudions l'intégrabilité au voisinage de 0 et $+\infty$:
   — comme : $\lim\limits_{u\to+\infty} u^{3/2}e^{-u} = 0$, on a : $\psi(u) = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$, or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ en tant que fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par comparaison de fonctions positives ;
   — on a : $\psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{u}}$, et $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1]$ en tant que fonction de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} < 1$; par comparaison de fonctions positives, ψ est intégrable sur $]0,1]$.

   De ce fait, la fonction ψ est intégrable sur $I =]0,+\infty[$: d'où le résultat.

2. Posons : $\forall (x,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $f(x,u) = \dfrac{e^{-u}}{(u+x)\sqrt{u}}$. Discuter du domaine de définition de F revient à déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante sur x l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ converge. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x < 0$. La fonction $u \mapsto f(x,u)$ n'est pas continue par morceaux (ni même définie) sur I vu que $-x \in I$, donc $F(x)$ n'est pas définie.
   Si $x = 0$. La fonction $u \mapsto f(x,u)$ est certes continue sur I, mais elle n'est pas intégrable sur $]0,1]$ car : $f(x,u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{3/2}}$, et $u \mapsto \dfrac{1}{u^{3/2}}$ n'est pas intégrable en tant que fonction de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} \geqslant 1$.

Si $x>0$. La fonction $u\mapsto f(x,u)$ est continue par morceaux et positive sur I. Pour tout $u\in I$, on a : $f(x,u)\leqslant \dfrac{1}{x}\psi(u)$, or ψ est intégrable sur I d'après la question précédente donc $u\mapsto f(x,u)$ l'est aussi par comparaison d'intégrales de fonctions positives.
En conclusion, la fonction F est définie sur $I=]0,+\infty[$.

Remarque. Dans le cas où $x<0$, on peut préciser que de plus $\displaystyle\int_0^{-x} f(x,u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{-x}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$ ne sont pas définies car : $f(x,u)\underset{u\to -x}{\sim}\dfrac{C}{u+x}$, avec $C\neq 0$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Concernant la remarque : pouvez-vous trouver des exemples d'intégrale $\int_I f$ qui pourraient être correctement définies – en se permettant une largesse que ne tolère pas le programme – bien que f ait une limite infinie en un point intérieur à I ?

3. On reprend la notation f de la question précédente. Montrons que F est de classe C^1 grâce au théorème de dérivation sous le signe intégrale :
   — pour tout $x\in I$, l'application $u\mapsto f(x,u)$ est intégrable sur I d'après la question précédente ;
   — pour tout $u\in I$, l'application $x\mapsto f(x,u)$ est de classe C^1 sur I et on a :
   $$\forall (x,u)\in I^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)=-\frac{e^{-u}}{(u+x)^2\sqrt{u}}\ ;$$
   — pour tout $x\in I$, l'application $u\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ est continue (par morceaux) sur I ;
   — pour tout $a>0$ et pour tout $(x,u)\in[a,+\infty[\times I$, on a :
   $$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right|\leqslant \frac{e^{-u}}{a^2\sqrt{u}}=\frac{1}{a^2}\psi(u)\qquad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$
   où $u\mapsto \dfrac{1}{a^2}\psi(u)$ est intégrable sur I d'après la question 1.

   Ainsi, par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, F est de classe C^1 sur I et on a :
   $$\forall x\in I,\quad F'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{(u+x)^2\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Être certain de comprendre l'intérêt de s'être ramené à l'intervalle $[a,+\infty[$ pour l'hypothèse de domination. Qu'aurait-eu comme majoration à la place ? Quel aurait été le problème ?

4. Soit $x\in I$. Calculons $F(x)$ par intégration par parties, où l'on dérive $u\mapsto \frac{e^{-u}}{u+x}$ et intègre $u\mapsto\frac{1}{\sqrt{u}}$ (une primitive est $u\mapsto 2\sqrt{u}$). On a :
   $$\lim_{u\to 0}\frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{u+x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{u+x}=0\qquad\text{(croissances comparées)}$$
   donc le terme entre crochets est correctement défini. Par la formule de l'intégration par parties :
   $$F(x)=\left[\frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{u+x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2\sqrt{u}\left(\frac{1}{u+x}+\frac{1}{(u+x)^2}\right)e^{-u}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{u+x}\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}\frac{2\sqrt{u}e^{-u}}{(u+x)^2}\mathrm{d}u.$$

On en déduit, en écrivant $u = (u+x) - x$:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u + 2\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{(x+u)^2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u - 2x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u + 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(x+u)\sqrt{u}}\mathrm{d}u - 2x\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{(x+u)^2\sqrt{u}}\mathrm{d}u \\ &= 2K - 2xF(x) + 2F(x) - 2xF'(x). \end{aligned}$$

Il suffit de réarranger les termes pour obtenir : $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K$, d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi l'idée d'intégrer par parties ? Et pourquoi ce choix des fonctions à dériver et intégrer ? (Celle à dériver a l'air bien compliquée, *a priori*) Bien comparer les intégrandes de $F'(x)$ et $F(x)$ pour comprendre. Également comprendre en quelle circonstance avoir l'idée du « $+x - x$ ». C'est d'autant plus subtil ici que le numérateur n'a *a priori* pas une expression proche de celle du dénominateur ; pour autant, j'affirme qu'on y était conduit assez naturellement.

— Trouver une autre façon de faire qui ne nécessite pas d'avoir spécialement de flair, en s'aidant de la connaissance *a priori* de l'équation à trouver (on doit montrer que $x \mapsto xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)$ est constante, au fond ; est-ce exploitable ?).

5. La fonction $G : x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}F(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x}\right)F(x) + \sqrt{x}e^{-x}F'(x) \\ &= \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)\right) \\ &= -K\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}. \qquad (q.\,4) \end{aligned}$$

De ce fait, comme G' est continue et que I est un intervalle, en intégrant, on obtient l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I,\ G(x) = C - K\int_0^x \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Retenir l'idée de montrer des identités : $f = g$, en montrant que $f' = g'$ et en intégrant le résultat obtenu. Ce n'est cependant pas une idée systématique, loin de là : cela s'y prête lorsque les dérivées sont plus simples (comme lorsqu'on montre $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ par ce moyen : un exemple parmi d'autres). Qu'en penser ici ?

— La question précédente donne une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par F. Ne pouvait-on pas la résoudre pour obtenir le résultat voulu ? Si oui, pourquoi ai-je procédé autrement ?

6. Calculons la limite de $G : x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}F(x)$ en $+\infty$. La fonction F est positive (par positivité de l'intégrale) et décroissante (car sa dérivée est négative d'après l'expression de la question 3) donc elle tend vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+$ en $+\infty$. Or, par le théorème des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.
D'autre part, en utilisant l'identité de la question 5, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = C - K^2$. On en déduit : $C = K^2$.
Calculons maintenant la limite de G en 0. Il suffit pour cela de calculer la limite de $\sqrt{x}F(x)$ quand $x \to 0$. On effectue le changement de variable affine $u = xt$, de sorte que :

$$\sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}e^{-xt}\mathrm{d}t}{\sqrt{xt}(xt+x)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}.$$

Utilisons alors le théorème de continuité sous le signe intégrale pour obtenir la limite de cette intégrale quand $x \to 0$:

— pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'application $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue (par morceaux) sur I ;

— pour tout $t \in I$, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} = \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$;

— l'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue (par morceaux) sur I ;

— pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in I$, on a :

$$\left|\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \qquad \text{(hypothèse de domination)}$$

où $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$ est intégrable sur I ; en effet, elle est continue sur I, équivalente en 0 à la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et au voisinage de $+\infty$ à la fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$; dans les deux cas, ce sont des fonctions de référence intégrables.

On en déduit, par le théorème de continuité sous le signe intégrale :

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}(1+(\sqrt{t})^2)} = 2\left[\arctan(\sqrt{t})\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

D'autre part en reprenant l'identité de la question 5 on a : $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = C$. En conclusion : $K^2 = C = \pi$, et donc : $K = \sqrt{\pi}$.

Remarque. Vous avez peut-être remarqué que l'on vous demandait implicitement de calculer l'intégrale de Gauß. En effet, après le changement de variable $t = \sqrt{u}$, on a :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{u}^2}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Ne pouvait-on pas avoir la valeur exacte de la limite de F en $+\infty$? (J'affirme qu'on peut même avoir un équivalent asymptotique simple.)

— Comparer ce calcul de l'intégrale de Gauß avec ceux proposés dans vos feuilles d'exercices. La démarche est-elle la même ? Enrichir votre bagage méthodologique de calculs d'intégrales *via* les intégrales à paramètres.

Deuxième partie – Étude de deux séries de fonctions

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x \in I$, posons : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ l'application f_n est continue sur I. Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, en montrant qu'elle converge normalement sur cet intervalle. Par décroissance de f_n :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na} = \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}} < +\infty,$$

la dernière égalité provenant du calcul d'une somme géométrique de raison $e^{-a} \in]0,1[$. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$. On en déduit que la fonction f est définie et continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, et donc sur I puisque $([a,+\infty[)_{a\in\mathbb{R}_+^*}$ est une base de voisinages de I : d'où le résultat.

Le raisonnement est analogue pour montrer que g est définie et continue sur I, à la différence près que la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sqrt{n}e^{-na}$, pour $a>0$, se justifie soit par la règle de D'Alembert (les quotients successifs convergent vers $e^{-a}<1$), soit par le théorème des croissances comparées (pour dominer le terme général par $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente). D'où le résultat.

Remarque. On tue la question si l'on utilise la connaissance usuelle des rayons de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sqrt{n}x^n$ (cela vaut 1 à chaque fois). On en déduit que $x\mapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}x^n$ sont continues sur $]-1{,}1[$. Par composition avec $x\mapsto e^{-x}$ (continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $]0{,}1[\subseteq]-1{,}1[$), on a la continuité de f et g.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Faire ce que j'ai omis.
> — Pourquoi s'être placé sur des intervalles de la forme $[a,+\infty[$, et non sur $]0,+\infty[$?

8. Soit $x\in I$. L'application $\theta : u\mapsto\dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions décroissantes et positives sur $\mathbb{R}_+^*$. Par la méthode de comparaison série-intégrale :

$$\int_1^{+\infty}\theta(u)\mathrm{d}u\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\leqslant\int_0^{+\infty}\theta(u)\mathrm{d}u.$$

Notons que ces intégrales convergent bien d'après la question 1 (même si la vérification est superflue à ce stade puisque l'on intègre des fonctions positives : l'intégrale et la somme existent toujours, quitte à valoir $+\infty$). Cela donne l'encadrement demandé.

Calculons ces intégrales en vue d'obtenir un équivalent quand $x\to 0$. On se ramène à l'intégrale K calculée dans la partie I en posant : $v=ux$, de sorte à obtenir :

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\mathrm{d}v\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\mathrm{d}v.$$

Par encadrement, on en déduit : $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\mathrm{d}v=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$ (question 6). D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Se convaincre qu'on a bien compris pourquoi, dans la comparaison série-intégrale, c'est bien n qui « devient » la variable u, et non x. C'est une source d'erreur très fréquente.
> — L'énoncé a donné une indication ici (passer par une comparaison série-intégrale). Se convaincre qu'on y aurait pensé de soi-même si l'on s'était contenté de demander un équivalent en 0.
> — Est-ce que cette comparaison permettrait d'avoir un équivalent en $+\infty$ de f ? (Une analyse qualitative des deux extrémités de l'encadrement permet de se convaincre de la réponse.) Si oui : quel est cet équivalent ? Si non : peut-on en trouver un malgré tout ? Remarquer que dans cette comparaison série-intégrale et dans d'autres, il est possible de pressentir les cas où elle va effectivement donner un équivalent (ou non).
> — Cette comparaison série-intégrale, adaptée différemment, aurait-elle permis de montrer la convergence uniforme de la question précédente ? Ou de la contredire sur $\mathbb{R}_+^*$?

9. Il y a plusieurs méthodes pour obtenir la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Première méthode (lien suite-série). Pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)\\
&= \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est d'exposant $\frac{3}{2}>1$ donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge absolument donc converge. Par le lien suite-série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge : d'où le résultat.

Deuxième méthode (comparaison série-intégrale). La méthode de comparaison série-intégrale, appliquée à la fonction décroissante $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, implique :

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\qquad \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

— est décroissante, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - (2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leqslant 0\,;$$

— est minorée, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} + \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right) \geqslant 0.$$

Elle est donc convergente : d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Si les deux méthodes que je vous propose ci-dessus ne vous évoquent que des souvenirs vagues, ou que vous estimez ne jamais avoir pu y penser de vous-mêmes : lire *Méthodes* du chapitre II, *Étudier des suites en passant par des séries télescopiques*, et revoir comment on démontra l'existence de la constante d'Euler.

— Obtenir la convergence par une transformation d'Abel, pour varier les plaisirs et maîtriser cette technique (selon qu'on privilégie la version classique ou la version intégrale du devoir maison n° 3, l'aisance de la démonstration diffère).

— On a écrit u_n sous la forme $\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$ (à peu de choses près) dans la deuxième méthode. Est-ce qu'on aurait pu montrer la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en passant par la convergence de cette série ? Il en fut question dans le cours du chapitre II.

— Peut-on généraliser ? En remplaçant $\frac{1}{\sqrt{k}}$ par $\frac{1}{k^\alpha}$ avec α approprié ?

— Au vu du sujet qui veut nous faire obtenir un équivalent de h et g, peut-on déjà anticiper *pourquoi* on démontre ce résultat ? Trouver une réponse à cette question afin d'y songer de soi-même en d'autres circonstances !

10. Soit $x \in I$. La série :

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)e^{-(n+1)x} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-(k+1)x}e^{-(n-k)x}}{\sqrt{k+1}}\right)$$

est le produit de Cauchy des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{-nx}$. Ces deux séries convergent (absolument), la première d'après la question 7 et la seconde parce que c'est une série géométrique de raison $e^{-x}\in]0,1[$, donc leur produit de Cauchy converge absolument aussi et on a :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}\right) = \frac{f(x)}{1-e^{-x}},$$

d'où le résultat.

Autre démonstration (Abel). On a, avec la convention habituelle sur les sommes vides :

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-nx} - \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-nx}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-nx} - \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-(n+1)x}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\left(e^{-nx}-e^{-(n+1)x}\right)\\
&= \left(1-e^{-x}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-nx}\\
&= \left(1-e^{-x}\right)h(x).
\end{aligned}$$

Cependant cette démonstration, au contraire des autres proposées, nécessite de démontrer *a priori* la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-nx}$ (sinon la différence de sommes ci-dessus n'est pas définie).

Autre démonstration (Fubini). On utilise le théorème de Fubini positif (l'ajout d'une fonction indicatrice étant pour effectivement reconnaître son cadre d'application), de sorte à avoir :

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{[0,n]}(k)}{\sqrt{k}}e^{-nx} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{[0,n]}(k)}{\sqrt{k}}e^{-nx} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{n=k}^{+\infty}e^{-nx} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{e^{-kx}}{1-e^{-x}} = \frac{f(x)}{1-e^{-x}}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Si vous ne faites pas attention en appliquant le produit de Cauchy, vous trouvez : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\right) = f(x)\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Bien comprendre pourquoi cela aurait été faux.

— Si vous êtes plus à l'aise avec les produits de Cauchy de séries entières : comment pouvaient-ils nous venir en aide ici ? Cette question ne se pose que si vous avez eu du mal à faire apparaître le $a_k b_{n-k}$ du produit de Cauchy ici.

— Refaire le dernier calcul sans introduire de fonction indicatrice mais avec un bon usage du théorème de sommation par paquets.

— Généraliser : si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite et $(A_n)_{n\geqslant 0} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\right)_{n\geqslant 0}$ sa « sommation », quel lien peut-on donner entre leurs séries entières génératrices ?

11. En utilisant les résultats des questions 8 et 10, on obtient :

$$h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{\pi}{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}.$$

Maintenant, reprenons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ de la question 9. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad h(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (2\sqrt{n} + u_n) e^{-nx} \\ &= 2g(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-nx}. \qquad \text{(les deux séries convergent)} \end{aligned}$$

Maintenant, on a vu à la question 9 que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. C'est donc une suite bornée. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\forall x \in I, \quad \left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n e^{-nx}\right| \leqslant M \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{M}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{M}{x}.$$

On en déduit : $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} = \underset{x\to 0}{O}\left(\frac{1}{x}\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$, et donc :

$$g(x) = \frac{1}{2}h(x) + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi ne pouvait-on pas obtenir un équivalent de g comme pour f, *via* une comparaison série-intégrale ?

— Remarquer quelques similarités avec la démonstration du théorème de sommation des équivalents, mais sans majorations epsilonesques ici. Cela permet peut-être de mieux comprendre l'introduction de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

— Il peut paraître extrêmement étrange de passer par h, dont le terme général est en apparence bien plus compliqué, pour obtenir un équivalent de g ! Essayer de comprendre pourquoi cette idée était payante. Si vous avez compris : essayer de l'appliquer à la détermination d'équivalents d'autres sommes. L'intégrer à votre répertoire de techniques.

Troisième partie – Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12. Si A est fini alors la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est presque nulle. De ce fait, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$ converge. On a alors : $I_A = \mathbb{R}_+$.

On suppose que A est infini. Une partie de $\mathbb{N}$ infinie est dénombrable, et plus précisément il existe une bijection strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to A$ (construite par récurrence en posant : $\varphi(0) = \min(A)$, puis : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(k) \mid k \in [\![0, n]\!]\})$. La suite $(b_n)_{n\geqslant 0} = \left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ convient alors.

Dans le cas où A est infini, si $x = 0$ la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge puisque :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in A} 1 = \mathrm{card}(A) = +\infty.$$

Supposons à présent $x > 0$. On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} < +\infty,$$

donc $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$ converge. On a donc : $I_A = \mathbb{R}_+^* = I$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Compléter la construction de φ en vérifiant son caractère bijectif.

— Pourquoi puis-je manipuler $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ *a priori*, avant d'avoir montré son existence ?

— À votre avis, pourquoi l'énoncé vous fait construire cette suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$? (Je ne l'ai pas utilisée ; c'est un reliquat des anciens programmes que j'ai oublié d'enlever.)

13. Soit $x \in I$. Pour tout entier naturel n on a, par définition de $A(n)$:

$$\operatorname{card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{card}(A(n))e^{-nx} = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-nx} = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx}e^{-(n-k)x}$ est le produit de Cauchy des séries (absolument) convergentes $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-nx}$ et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-nx}$ (pour la première série, c'est une conséquence de la question précédente). Ce produit de Cauchy converge donc aussi et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n))e^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\right) = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}.$$

D'où le résultat.

Autre démonstration (Abel). On a, en posant $A(-1) = \emptyset$:

$$\begin{aligned} f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\operatorname{card}(A(n)) - \operatorname{card}(A(n-1))\right) e^{-nx} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n))e^{-nx} - \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n-1))e^{-nx} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n))e^{-nx} - \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n))e^{-(n+1)x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n))\left(e^{-nx} - e^{-(n+1)x}\right) \\ &= \left(1-e^{-x}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n))e^{-nx}. \end{aligned}$$

Cependant cette démonstration, au contraire des autres proposées, nécessite de démontrer *a priori* la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{card}(A(n))e^{-nx}$ (sinon la différence de sommes ci-dessus n'est pas définie).

Autre démonstration (Fubini). On utilise le théorème de Fubini positif (l'ajout d'une fonction indicatrice étant pour effectivement reconnaître son cadre d'application), de sorte à avoir :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{card}(A(n))e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathbb{1}_{[0,n]}(k)e^{-nx} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_k \mathbb{1}_{[0,n]}(k)e^{-nx} &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-nx} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{e^{-kx}}{1-e^{-x}} \\ &= \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}. \end{aligned}$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Mêmes commentaires qu'à la question 10.

14. Soient $x > 0$ et $n \geqslant 0$. On a par définition :

$$A_1(n) = \left\{k^2 \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ k^2 \leqslant n\right\} = \left\{k^2 \mid k \in [\![1, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]\right\}.$$

On en déduit : $\mathrm{card}(A_1(n)) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Dès lors, en utilisant la question 13, on obtient :

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{card}(A_1(n))e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}.$$

Maintenant, par définition de la partie entière : $\forall n \in \mathbb{N},\ \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \sqrt{n} \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$, donc :

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1)e^{-nx} = \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} + \frac{1}{1-e^{-x}}$$

Or : $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$. Cet encadrement donne donc :

$$0 \leqslant g(x) - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

On en déduit, au voisinage de 0, d'après l'équivalent trouvé à la question 11 :

$$f_{A_1}(x) = (1-e^{-x})g(x) + \underset{x\to 0}{O}(1) = (x + \underset{x\to 0}{o}(x))\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right) + \underset{x\to 0}{O}(1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

On en déduit en particulier : $\lim\limits_{x\to 0} x f_{A_1}(x) = 0$, donc : $A_1 \in S$, et : $\Phi(A_1) = 0$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> - Bien comprendre mon développement asymptotique de f_{A_1}, et pourquoi je ne suis pas immédiatement passé aux équivalents (cela n'aurait pas été faux mais je voulais mettre en évidence une prudence à observer : laquelle ?).
> - Comme à la question 11, il peut paraître surprenant qu'il soit plus facile d'obtenir un équivalent de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right)e^{-nx}$ que de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$. Qualitativement, que se passe-t-il qui explique que ce soit le cas ? (Ce n'est pas tout à fait la même raison que dans la question 11.) Par conséquent, dans quelles situations analogues peut-on y songer ?
>
>   C'est dans cette idée qualitative qu'a germé le théorème taubérien de ce problème.

15. Soit $x > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{(p,q) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid n = p^2 + q^2\right\} = \bigsqcup_{\substack{k=1 \\ k\in A_1}}^{n} \left\{(k,\ell) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid \ell = n-k,\ \ell \in A_1\right\}$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v(n) = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\in A_1}}^{n} \mathbb{1}_{A_1}(n-k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_1}(k)\mathbb{1}_{A_1}(n-k)$.

Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{1}_{A_1}(n)e^{-nx}$ est (absolument) convergente pour $x > 0$, donc le produit de Cauchy de cette série par elle-même converge absolument aussi et on a :

$$\begin{aligned}
(f_{A_1}(x))^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_1}(n)e^{-nx}\right)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{A_1}(k)e^{-kx}\mathbb{1}_{A_1}(n-k)e^{-(n-k)x}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{A_1}(k)\mathbb{1}_{A_1}(n-k)\right)e^{-nx}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx}\\
&= f_{A_2}(x).
\end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{A_2}(n) \leqslant v(n)$; en effet, dès que $\mathbb{1}_{A_2}(n)$ vaut 1, la quantité $v(n)$ vaut au moins 1. On en déduit directement que pour tout $x > 0$:

$$f_{A_2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_2}(n)e^{-nx} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$

Par suite : $xf_{A_2}(x) \leqslant x(f_{A_1}(x))^2$. En réutilisant l'équivalent $f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ trouvé à la question 14, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} x(f_{A_1}(x))^2 = \dfrac{\pi}{4}$. En admettant que $A_2 \in S$ et en passant à la limite, on obtient :

$$\Phi(A_2) \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Se convaincre de la réécriture de $v(n)$ proposée. Reconnaître là une idée qui apparaît dans vos feuilles d'exercices du chapitre sur les séries entières, pour l'étude du nombre de solutions d'une équation diophantienne.

— Même commentaire qu'à la question 10.

Quatrième partie – Un théorème taubérien

16. Soit $\psi \in E$. C'est une fonction continue par morceaux sur [0,1]. Elle est en particulier bornée. De ce fait, pour tout $x > 0$, la fonction $L(\psi)$ est définie en x, en effet la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx})$ est absolument convergente donc convergente car pour tout entier naturel n :

$$|\alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx})| \leqslant \|\psi\|_\infty \alpha_n e^{-nx},$$

et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n e^{-nx}$ est convergente par hypothèse.

L'application L est linéaire d'après la linéarité de la somme des séries. De plus, si : $\psi_1 \leqslant \psi_2$, alors pour tout $x > 0$ et pour tout entier naturel n on a :

$$\alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx}) \leqslant \alpha_n e^{-nx}\psi_2(e^{-nx}),$$

car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $\alpha_n e^{-nx} \geqslant 0$. En passant à la somme : $\forall x > 0$, $L(\psi_1)(x) \leqslant L(\psi_2)(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

17. La fonction nulle appartient à E_1 car $L(0_E)$ est la fonction nulle. De plus, si ψ_1 et ψ_2 appartiennent à E_1 et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x > 0$,

$$xL(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \lambda xL(\psi_1)(x) + xL(\psi_2)(x).$$

Quand $x \to 0$, les deux termes du membre de droite ont une limite finie par définition de E_1, donc $xL(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x)$ a une limite finie et de ce fait, $\lambda\psi_1 + \psi_2 \in E_1$. Ceci achève de justifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de E. L'égalité ci-dessus donne en outre, quand $x \to 0$:

$$\Delta(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda\Delta(\psi_1) + \Delta(\psi_2),$$

donc Δ est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire sur E_1. Il reste à montrer que Δ est continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $\psi \in E_1$. D'après les calculs de la question précédente, pour tout $x > 0$ on a :

$$|x(L(\psi))(x)| = x\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx})\right| \leqslant x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\|\psi\|_\infty.$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient alors, grâce à l'hypothèse de l'énoncé sur $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$:

$$|\Delta(\psi)| = \left|\lim_{x\to 0} xL(\psi)(x)\right| \leqslant \ell\|\psi\|_\infty.$$

Par conséquent Δ est linéaire et ℓ-lipschitzienne, donc continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$: d'où le résultat.

18. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $p = 0$, alors : $\forall x > 0$, $xL(e_0)(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$, et par hypothèse de l'énoncé cette quantité tend vers ℓ. On en déduit que $e_0 \in E_1$ et : $\Delta(e_0) = \lim_{x\to 0} x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx} = \ell$.

Supposons à présent $p > 0$. On a pour tout $x > 0$:

$$L(e_p)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}(e^{-nx})^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx(1+p)} = L(e_0)((p+1)x).$$

On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$xL(e_p)(x) = \frac{1}{p+1}\cdot(p+1)xL(e_0)((p+1)x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{\ell}{p+1}.$$

Ceci montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $e_p \in E_1$, et : $\Delta(e_p) = \dfrac{\ell}{p+1} = \ell\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi les formes linéaires Δ et $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ coïncident sur $\mathcal{P}_{[0,1]} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\{e_p \mid p \in \mathbb{N}\})$, donc pour toute fonction polynomiale P sur [0,1], on a : $P \in E_1$, et : $\Delta(P) = \ell\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$. Mieux : ces deux formes sont de plus continues sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$ (pour Δ ce fut démontré à la question précédente, et pour $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$ cela découle de son caractère 1-lipschitzien : $\forall P \in E_1$, $\left|\displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|P\|_\infty$), elles coïncident sur l'adhérence de $\mathcal{P}_{[0,1]}$ dans E_1. Montrons que cette adhérence est E_0. Dans tout ce qui suit, la notation $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A dans E_1.

Soit $\psi \in E_0$. Par définition de E_0, c'est une fonction continue sur le segment [0,1]. Par le théorème d'approximation de Weierstraß, il existe donc une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{P}_{[0,1]}$ qui converge vers ψ. On pourrait à partir de là vouloir conclure facilement, mais à tort : $E_0 \subseteq \overline{\mathcal{P}_{[0,1]}} \subseteq \overline{E_1} = E_1$. Ce serait cependant incorrect : l'adhérence de $\mathcal{P}_{[0,1]}$ dans E_1 est l'ensemble des limites de suites à valeurs dans $\mathcal{P}_{[0,1]}$ et *convergeant dans* E_1 (distinguer adhérence et adhérence relative). Il faut encore démontrer que $\psi \in E_1$ pour conclure que $E_0 \subseteq \overline{\mathcal{P}_{[0,1]}} \subseteq E_1$.

Faisons. On doit montrer que la limite : $\lim_{x\to 0} xL(\psi)(x)$, existe et est finie (notons que $L(\psi)$ existe bien par la question 16). On *aimerait* écrire, puisque la convergence uniforme de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers ψ

implique sa convergence simple :

$$\lim_{x\to 0} xL(\psi)(x) \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\lim_{k\to+\infty} xL(P_k)(x) \overset{(\dagger)}{=} \lim_{k\to+\infty}\lim_{x\to 0} xL(P_k)(x) = \lim_{k\to+\infty}\Delta(P_k)$$
$$= \lim_{k\to+\infty}\ell\int_0^1 P_k(t)\mathrm{d}t$$
$$= \ell\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t < +\infty,$$

où la dernière égalité proviendrait classiquement de la convergence uniforme sur l'intervalle d'intégration. Il s'agit de justifier les deux étapes potentiellement litigieuses $(*)$ et $(\dagger)$: la première étape revient à démontrer la convergence (simple ou uniforme) de $(x\mapsto xL(P_k)(x))_{k\in\mathbb{N}}$ vers $x\mapsto xL(\psi)(x)$, et la seconde étape est un problème d'interversion que nous allons lever avec le théorème de la double limite, démontrant ainsi $(*)$ et $(\dagger)$ en même temps. Posons :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x>0,\quad f_k(x) = xL(P_k)(x).$$

Alors :

— pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a par ce qui précède : $\lim_{x\to 0} f_k(x) = \Delta(P_k) = \ell\int_0^1 P_k(t)\mathrm{d}t$: la limite existe et est finie ;

— montrons que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]0,1]$ vers $x\mapsto xL(\psi)(x)$: pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]0,1]$ on a :

$$|f_k(x) - xL(\psi)(x)| = |xL(P_k-\psi)(x)| \leqslant x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}\left|P_k(e^{-nx}) - \psi(e^{-nx})\right|$$
$$\leqslant \|P_k-\psi\|_\infty x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha e^{-nx}$$
$$= \|P_k-\psi\|_\infty xL(e_0)(x),$$

or on sait que $x\mapsto xL(e_0)(x)$ admet une limite finie (égale à $\Delta(e_0)$) quand $x\to 0$, et cette application est continue sur $]0,1]$ par convergence normale (donc uniforme) de la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(x\mapsto \alpha_n e^{-nx}\right)$ sur tout segment de la forme $[a,1]$ avec $a\in]0,1]$ (facile à établir en majorant e^{-nx} par e^{-na} et en utilisant le fait que la série $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n e^{-na}$ converge par hypothèse) ; elle se prolonge donc en une application continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée d'après le théorème des bornes atteintes ; cela nous permet de conclure que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \|x\mapsto f_k(x) - xL(\psi)\|_\infty \leqslant \|P_k-\psi\|_\infty\|x\mapsto xL(e_0)(x)\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par convergence uniforme de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers ψ sur $[0,1]$, ce qui achève de démontrer comme souhaité que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]0,1]$ vers $x\mapsto xL(\psi)(x)$.

Par le théorème de la double limite, $(*)$ et $(\dagger)$ sont licites, de sorte qu'en reprenant le raisonnement plus haut on ait :

$$\lim_{x\to 0} xL(\psi)(x) = \ell\int_0^1\psi(t)\mathrm{d}t.$$

On a montré : $\psi\in E_1$. Ceci vaut pour tout $\psi\in E_1$, donc : $E_0\subseteq E_1$, et le théorème d'approximation de Weierstraß donne aussi : $E_0\subseteq\overline{\mathcal{P}_{[0,1]}}$.

Réciproquement, une limite uniforme de fonctions polynomiales est continue, puisque toute application polynomiale est continue, donc : $\overline{\mathcal{P}_{[0,1]}} = E_0$. On a montré que l'adhérence de $\mathcal{P}_{[0,1]}$ dans E_1 est E_0, ce qui permet enfin de conclure, par coïncidence sur une partie dense :

$$\forall\psi\in E_0,\quad \Delta(\psi) = \ell\int_0^1\psi(t)\mathrm{d}t.$$

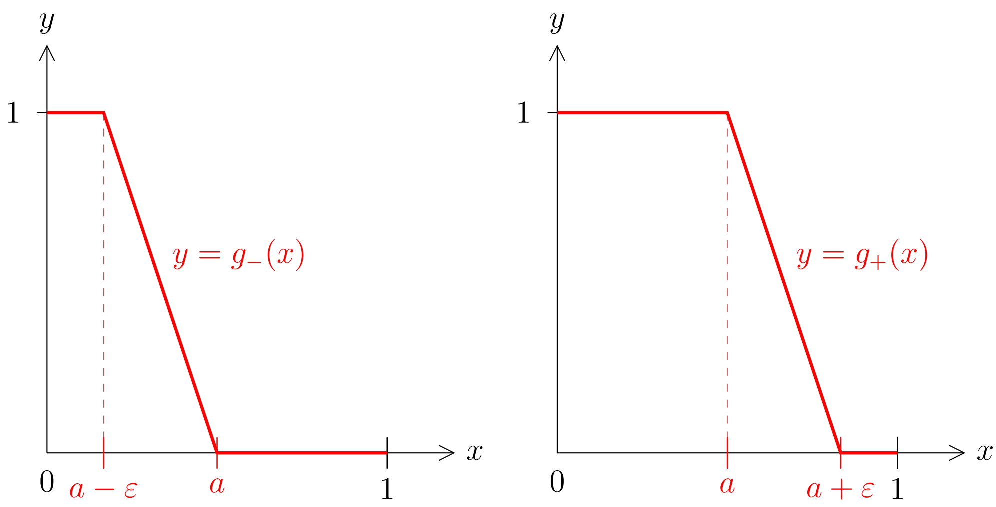
Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Cette question était très longue et subtile. Dégager les principales étapes. Je pense que le plus important réside en deux points : 1° comprendre pourquoi il était naturel de songer à raisonner par densité, surtout au vu de la formulation de la question, 2° pourquoi ce vœu de prolongement par densité IMPOSAIT de trouver une expression alternative de $\frac{1}{p+1}$, en l'occurrence sous forme intégrale ? À deux égards on aurait été gêné pour la suite du raisonnement (je ne parle même pas de la vérification de la convergence uniforme).
- Si mon objection vis-à-vis de la détermination de l'adhérence relative vous paraît trop obscure : raisonner par densité sans écriture ensembliste.
- Vérification de la convergence uniforme : pouvait-on la vérifier sur $[0,1]$? Pourquoi n'était-ce pas une utilisation de la double limite pour les séries de fonctions, alors que $xL(P_k)(x)$ est pourtant bel et bien une somme de série ?

19. Les fonctions g_+ et g_- sont affines par morceaux, de plus,

$$\lim_{x\to(a-\varepsilon)^+} g_-(x) = \frac{a-(a-\varepsilon)}{\varepsilon} = 1, \quad \lim_{x\to a^-} g_-(x) = \frac{a-a}{\varepsilon} = 0.$$

On en déduit que g_- est continue sur $[0,1]$. De même pour g_+.



On a donc :

$$\Delta(g_-) = \ell\int_0^1 g_-(t)\mathrm{d}t = \ell\left((a-\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}\right) = \ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

(toute personne sensée, je l'espère, s'est contentée de faire le calcul d'aire en reconnaissant des aires de rectangles et de triangles).

Un calcul similaire donne : $\Delta(g_+) = \ell\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Or on remarque que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $g_- \leqslant \mathbb{1}_{[0,a]} \leqslant g_+$. donc par croissance de L (question 16) on a pour tout $x > 0$:

$$xL(g_-)(x) \leqslant xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) \leqslant xL(g_+)(x).$$

Déduisons-en un encadrement de $x(\mathbb{1}_{[0,a]})(x)$ par des quantités arbitrairement proches de ℓa. On a :

$$\lim_{x\to 0} xL(g_-)(x) = \Delta(g_-) = \ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

donc il existe $\eta_- > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0,\eta_-], \quad xL(g_-)(x) \geqslant \ell\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right) - \ell\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \ell\left(a-\varepsilon\right).$$

En procédant de même avec g_+, il existe $\eta_+ > 0$ tel que : $\forall x \in]0, \eta_+]$, $xL(g_+)(x) \leqslant \ell\,(a+\varepsilon)$. En prenant $\eta = \min(\eta_-, \eta_+)$ on a pour tout $x \in]0, \eta]$:

$$\ell\,(a-\varepsilon) \leqslant xL(g_-)(x) \leqslant xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) \leqslant x(L(g_+)(x)) \leqslant \ell\,(a+\varepsilon)\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim_{x\to 0} xL(\mathbb{1}_{[0,a]})(x) = a\ell$. Ceci montre d'une part : $\mathbb{1}_{[0,a]} \in E_1$, et d'autre part :

$$\Delta(\mathbb{1}_{[0,a]}) = a\ell = \ell \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,a]}(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi toutes les fonctions indicatrices de segments sont dans E_1. Il en est de même pour les fonctions indicatrices d'intervalles semi-ouverts de la forme $[0, a[$ avec $a \in [0,1]$ (les calculs sont identiques), et donc par linéarité le résultat ci-dessus vaut pour la fonction indicatrice de tout intervalle de $[0,1]$ (pour les singletons, il suffit d'écrire : $\mathbb{1}_{\{a\}} = \mathbb{1}_{[0,a]} - \mathbb{1}_{[0,a[}$; si c'est ouvert à gauche, on adapte sans difficulté ce qui précède). Par linéarité, pour toute fonction en escalier ψ on a : $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t$. Cela encourage à raisonner par densité pour avoir le résultat pour toute fonction continue par morceaux sur $[0,1]$: pour toute fonction ψ continue par morceaux et tout $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe ψ_- et ψ_+ des fonctions en escaliers telles que : $\psi_- \leqslant \psi \leqslant \psi_+$, et : $\psi_+ - \psi_- \leqslant \varepsilon$. On peut alors procéder comme ci-dessus pour montrer : $\psi \in E_1$ (ceci vaut pour toute fonction ψ continue par morceaux, donc : $E \subseteq E_1$, et il y a égalité puisque l'inclusion réciproque est immédiate par définition de E_1) et que :

$$\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Reconnaître encore un raisonnement par densité. Remarquer, comme dans le DST n° 1, une approximation de fonctions indicatrices avec des fonctions affines par morceaux. La raison d'être de cette approximation (par inégalités et non par convergence uniforme) doit vous interpeller et vous faire réaliser, encore une fois, que l'utilisation de la monotonie est une belle béquille lorsque des propriétés de continuité ne sont pas utilisables (je parle de continuité ici au sens suivant : la continuité de Δ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). J'en parle plus longuement dans le devoir cité.
- Pourquoi la densité des fonctions en escalier est utilisée ainsi, et non avec une suite qui converge uniformément vers ψ ?

20. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a : $L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N})$. Or :

$$e^{-n/N} \geqslant e^{-1} \iff \frac{n}{N} \leqslant 1 \iff n \leqslant N,$$

donc :

$$L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-n/N} \frac{1}{e^{-n/N}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n.$$

D'après la question précédente, la fonction continue par morceaux ψ appartient à E_1, et :

$$\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t = \ell \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ell.$$

Comme : $\Delta(\psi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right)$, on déduit de ce qui précède :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \ell \quad \left(= \lim_{x\to 0} x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Toute la stratégie pour « tronquer » la série $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n e^{-nx}$ de sorte à « en extraire » la somme $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k$ (et l'exprimer en fonction de la somme de cette série) s'achève avec cette question. Finalement, comment a-t-on fait ? A-t-on compris cette idée d'ajouter un facteur ψ dans la somme, et comment il fallait choisir ψ pour avoir la troncature et le résultat de cette question ? Cette stratégie est *dans les grandes lignes* la même qui motiva la construction d'une « ondelette » φ pour « isoler l'amplitude $e^{i\lambda_n x}$ » à la fin du problème du DM n° 8. Ce sont des généralisations (plus techniques) des coefficients de Fourier (faire un produit scalaire par une exponentielle complexe permet « d'isoler » le coefficient c_n de la somme de Fourier $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{inx}$) ou de la formule intégrale de Cauchy (même idée), qui doivent vous servir de modèle d'inversion de formules en analyse.

21. Soit $A\in S$. On considère sa suite associée $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie au début de la partie III. On a pour rappel : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\operatorname{card}(A(n))=\sum_{k=0}^{n}a_k$. Or $A\in S$, donc on sait que pour tout $x>0$, la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n e^{-nx}$ converge (vers sa somme $f_A(x)$) et par définition de S on a : $\lim_{x\to 0}xf_A(x)=\Phi(A)$. Les résultats de cette partie, avec $\ell=\Phi(A)$, donnent donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\operatorname{card}(A(n))=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_k=\Phi(A).$$

Appliquons ce résultat à la suite $(v(n))_{n\geqslant 0}$. En combinant les résultats des questions 14 et 15, on a pour tout $x>0$:

$$x\sum_{n=0}^{+\infty}v(n)e^{-nx}\overset{(q.\,15)}{=}x(f_{A_1}(x))^2\underset{x\to 0}{\sim}x\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\right)^2\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\pi}{4}.$$

On conclut : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}v(k)=\frac{\pi}{4}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Trouver cet équivalent par une voie plus directe. Une petite piste de réflexion : on peut encadrer $\sum_{k=1}^{n}v(k)$ en remarquant que cette quantité dénombre aussi le nombre de points à coordonnées entières dans le disque de centre O et de rayon $\sqrt{n}$.

— Que penser de $\lim_{n\to+\infty}v_n$? Penser au cas où n est un type de nombre premier particulier.