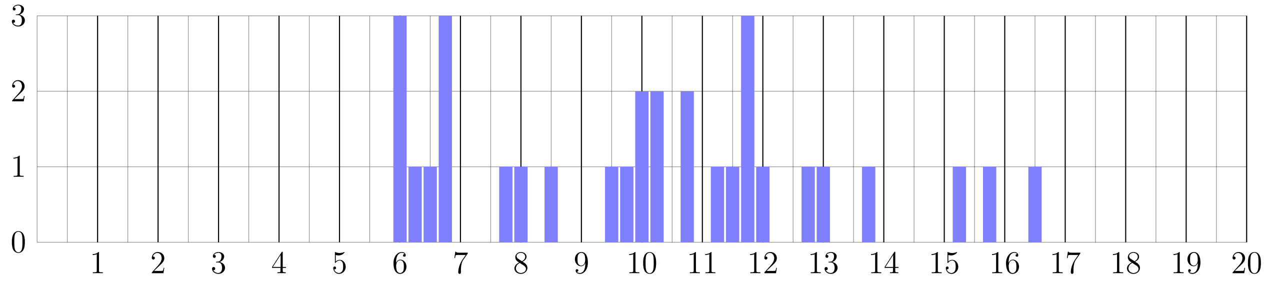
Devoir sur table n° 6 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **52 points**.
Moyenne : 10,11. **Écart-type :** 2,99.
Premier quartile : 7,25. **Médiane :** 10,25. **Troisième quartile :** 11,75.

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Il n'y a aucun intérêt à mentionner que $\mathrm{N}_\infty(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}) = 0$, même si c'est pour dire que c'est trivial.
2. L'identité $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, est au programme. L'invoquer directement pour la démonstration de l'homogénéité d'une norme définie avec une borne supérieure. Vous gagnerez du temps.

   Dans le cas d'un maximum à la place de la borne supérieure, d'ailleurs, il est plus rapide d'introduire un élément qui permet d'atteindre le maximum pour montrer l'homogénéité. Par exemple, pour montrer que $\|\lambda\vec{x}\|_\infty = |\lambda|\|\vec{x}\|_\infty$ (pour $\|\cdot\|_\infty$ norme sur K^n), il suffit d'introduire i_0 tel que : $|x_{i_0}| = \|\vec{x}\|_\infty$, et de noter que $|\lambda x_{i_0}| = |\lambda||x_{i_0}| \geqslant |\lambda x_i|$ pour tout i, ce qui est immédiat.
3. Un polynôme est scindé *sur* K ou *dans* $K[X]$, mais pas « scindé dans K ». Remarque analogue quand on dit : « la matrice A est diagonalisable (ou triangulable) sur K (ou dans $\mathrm{M}_n(K)$) ».
4. Il y a beaucoup de raisonnements par l'absurde lourds et dispensables. Deux situations où vous pouvez *souvent* constater que votre raisonnement par l'absurde est superflu : 1° lorsque vous raisonnez par contraposée ET par l'absurde en même temps, 2° lorsque votre raisonnement est du type : « Montrons $\mathcal{P}$. Pour cela raisonnons par l'absurde en supposant $\neg\mathcal{P}$. Alors (...) donc on a $\mathcal{P}$. C'est impossible puisqu'on a supposé $\neg\mathcal{P}$. Par l'absurde, on a $\mathcal{P}$. » Souvent, dans ce cas-là, soit vous avez montré $\mathcal{P}$ de manière directe sans utiliser l'hypothèse absurde, soit vous avez en fait raisonné par contraposée sans vous en rendre compte.

   Cela a l'air caricatural, et pourtant vous avez été une très large majorité à procéder ainsi pour montrer qu'une matrice non inversible n'est pas à diagonale strictement dominante.

Imprécisions mathématiques.

5. Vous avez fait trop de calculs pour montrer que N_∞ est sous-multiplicative, alors que la question précédente vous fait démontrer qu'elle est une norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$: on a très aisément montré dans le cours que toute norme subordonnée est une norme sous-multiplicative, et cela devait donc vous inspirer pour montrer la sous-multiplicativité de N_∞ sans calcul.
6. Le passage de « $\mathrm{N}_\infty(A^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ » à « $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ » n'a strictement rien à voir avec la propriété de séparation (avoir une limite nulle n'est pas la même chose qu'être nul !) ni avec la continuité de la norme (qui servirait pour l'implication dans l'autre sens). C'est tout simplement la DÉFINITION d'une limite qui y autorise, ainsi que l'équivalence des normes qui assure que converger pour N_∞ implique la convergence de $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ « tout court » (i.e. pour n'importe quelle norme).
7. Il m'embête que beaucoup d'élèves ne passent pas de « λ est valeur propre » à « $A - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible » directement, mais ressentent le besoin d'invoquer le raisonnement intermédiaire « donc $\chi_A(\lambda) = 0$ ». Il faut savoir distinguer ce que nous apprit χ_A et ce qui découle de la *définition* d'une valeur propre.

Je crains par exemple qu'avec un tel schéma de pensée, vous ne pensiez pas à la non inversibilité dans le cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension quelconque (où le polynôme caractéristique n'existe pas toujours).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

8. Vous êtes nombreux à faire preuve de trop de scrupule ou d'un manque de considération stratégique. Il est rarement payant de buter trente minutes ou plus sur une question (à plus forte raison si c'est pour finalement n'en proposer qu'une résolution incomplète), hormis éventuellement à X-ENS, et il n'est pas honteux de consacrer la fin de l'épreuve au traitement de questions potentiellement plus faciles reléguées plus loin dans le sujet (cependant n'interrompez pas une réflexion fructueuse pour cela : c'est quand vous commencez à sécher). Il vaut mieux, idéalement, avoir repéré dès le début de l'épreuve ces questions.

   De telles questions sont, par exemple : les questions 16 à 18 de la partie II (je suis étonné qu'on puisse compter sur les doigts d'une main le nombre d'élèves ayant cherché à calculer les valeurs propres d'une matrice explicite d'ordre 3 ! ce sont des points gratuits !), puis les questions 23, 25, 29 et 30 de la partie III.
9. J'espère ne plus revoir d'inégalités entre nombres complexes.
10. Attention, le rayon spectral $\rho(A)$ N'EST PAS une valeur propre en général. C'est le *module* d'une valeur propre.
11. En montrant que $\mathrm{N}_Q(AB) \leqslant \mathrm{N}_Q(A)\,\mathrm{N}_Q(B)$, vous montrez seulement que N_Q est une fonction sous-multiplicative, et non que c'est une *norme d'algèbre*. Vous avez souvent omis la vérification que c'est une norme.
12. La vérification que N_Q sépare les points fut souvent bâclée. Trop d'élèves pensent que la non nullité de Q et Q^{-1} suffisait à justifier : $Q^{-1}AQ = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \Rightarrow A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, oubliant que $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas intègre.
13. Lors des majorations epsilonesques de l'analyse, la question des dépendances est essentielle et vous n'y avez pas toujours prêté attention (c'est parfois subtil, je vous l'accorde). La norme N_ε dépendant de ε, il était douteux de vouloir montrer que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle en montrant : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N,\ \mathrm{N}_\varepsilon(A^k) \leqslant \varepsilon$. La convergence de $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est au sens de quelle norme, dans cette définition ?

    Il y eut, plus rarement, un problème analogue dans la question 27 (utilisation de la question 26 sans remarquer que η dépend de t).
14. À partir du moment où vous avez démontré que $\mathbb{1}_A$ est continue, j'ai vu trop de raisonnements délirants pour conclure que c'est une fonction constante, comme si vous invoquiez des propriétés topologiques au hasard (« l'image directe d'un fermé est un fermé, donc $\mathbb{1}_A$ est constante » ?! J'ai vu la même chose avec la densité et la compacité : n'importe quoi !). Avez-vous bien fait en sorte, lors de votre révision du cours de topologie, de vous représenter concrètement toutes ces notions ? Et d'avoir assimilé les motivations que j'ai données ? (i.e. la connexité par arcs permet de généraliser les résultats à la « théorème des valeurs intermédiaires », la compacité les théorèmes de 1re année énoncés sur des segments, etc.)

    Cela me surprit d'autant plus que, dans le cas d'une fonction indicatrice, la raison pour laquelle sa continuité implique sa constance crève les yeux dès lors qu'on se la représente graphiquement.

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— PREMIÈRE PARTIE : questions 8 et 9 ;

— DEUXIÈME PARTIE : question 20 ;

— TROISIÈME PARTIE : questions 21 et 22, questions 26 à 28.