Devoir sur table n° 6
(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Ce devoir est une adaptation de l'épreuve de Mathématiques II du Concours Centrale-Supélec, année 2005, filière MP. J'ai modifié très légèrement quelques questions (coquille ou attente peu claire) et enlevé la dernière partie (éloignée de nos préoccupations actuelles) pour que vous puissiez traiter non superficiellement les trois parties proposées, et notamment la plus topologique de toutes (la dernière).

On y aborde des questions incontournables dans le cursus d'un élève de MP. Nommément :
— le calcul explicite de la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ d'une matrice carrée (ici présenté « à l'envers ») ;
— le lien entre la convergence de $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la taille de ses valeurs propres (vu en travaux dirigés avec une autre méthode) ;
— **l'inégalité de Hadamard**, et la localisation des valeurs propres d'une matrice dans des disques du plan complexe centrés en les coefficients diagonaux de ladite matrice (on les appelle des **disques de Geršchgorin**).

Le deuxième item illustre l'intérêt d'avoir une norme d'algèbre dans l'étude des puissances matricielles. Pour cela, encore faut-il voir comment on relie une norme triple, ici, aux valeurs propres. Une inégalité est très facile à obtenir et est à savoir démontrer impérativement. L'autre nécessite plus de finesse.

La dernière partie du problème est plus difficile. Savoir la comprendre et traiter (*a posteriori* éventuellement, avec ce corrigé) vous permettra de vous distinguer merveilleusement. Les trois délicatesses de cette partie sont :
— les problèmes de **continuité des racines d'un polynôme** ;
— l'emploi à bon escient de la **propriété de Bolzano-Weierstraß** ;
— l'établissement de la **connexité** d'un ensemble, et l'utiliser pour en déduire qu'**une de ses parties lui est égale**.

Veillez à bien observer ce qui peut conduire à démontrer et exploiter ces trois choses. À cet effet, vous pourriez trouver quelque aliment dans les commentaires que je fais à la fin de chaque résolution de question.

Ce qu'on retiendra en bref. Lien entre rayon spectral et normes triples, convergence de la suite des puissances d'une matrice. Matrices à diagonale strictement dominante. Inégalité de Hadamard, disques de Geršchgorin. Continuité des racines d'une application continue à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$. Différentes utilisations de la propriété de Bolzano-Weierstraß. Argument de connexité.

Questions faciles ou classiques à retravailler

- PREMIÈRE PARTIE : questions 1 à 7, question 9 ;
- DEUXIÈME PARTIE : questions 11 à 13, question 19 ;
- TROISIÈME PARTIE : question 21, questions 27 à 29.

2 Rapport officiel de l'épreuve

[Ce sujet] avait pour ambition de présenter divers aspects de la « localisation » du spectre d'une matrice complexe, problème particulièrement important en Analyse numérique mais qui intervient également par exemple dans les questions de stabilité des solutions de systèmes différentiels linéaires.

Ce sujet s'inscrivait particulièrement bien dans les thèmes d'algorithmique proposés en préambule des programmes de Mathématiques de la filière MP et comportait en outre de nombreuses questions de cours, ou proches du cours. Une large part était consacrée aux techniques bien classiques de majoration, minoration et encadrement, et seule une minorité d'entre elles requérait une finesse particulière de la part des candidats. On ne peut qu'être déçu devant le flot d'aberrations que ces méthodes ont suscité et, de ce fait, on ne s'étonnera pas que ce rapport se résume au catalogue de récriminations qui va suivre.

Dans la question 1, il ne s'est trouvé que 80% des candidats pour connaître les axiomes exacts d'une norme, et encore un peu moins pour les vérifier complètement. Beaucoup de candidats majorent dans $\mathbb{C}$ comme si ce corps était ordonné que la multiplication y soit croissante. La majorité confond majorant, maximum et borne supérieure. Parmi les rares qui formulent correctement le problème de la question 3, il s'en trouve encore pour écrire que le maximum est atteint pour un des vecteurs de la base canonique (confusion avec la norme « par colonne » ou mémoire infidèle ?). L'ambiguïté de la définition de la question 5 a abusé 60% de Parisiens mais aussi 45% des provinciaux. Il fallait comprendre que la majoration indiquée ne définissait que l'aspect [sous-multiplicatif] de la norme, et non la notion de norme [d'algèbre] dans toute son étendue. Beaucoup n'ont pas vu que la question 7 demandait plus que la simple équivalence des normes (la notation C_Q correspond au conditionnement de la matrice Q.)

Les questions 8 et 9 ont dans l'ensemble rapporté peu de points. Peu de candidats ont compris que la notation ε invitait à faire tendre cette quantité vers 0. La question 8 permettait de prouver commodément la condition suffisante de la question 9, si toutefois on avait bien en mémoire le fait que N_ε dépendait aussi de A.

Pour la question 10, l'attente d'un dessin n'a pas toujours été comprise, non plus que l'intérêt d'avoir sur soi des instruments de traçage. Les questions 11 à 13 faisaient démontrer le théorème d'Hadamard et ses conséquences quant aux disques de Geršchgorin. Les bons candidats ont alors eu tout loisir de creuser l'écart dans ces questions : dans la question 11, l'existence de l'indice p résulte d'une démarche bien précise, la question 12 en est une conséquence immédiate et la question 13 demande un argument supplémentaire, rarement invoqué. La question 15 requérait une utilisation fine de l'inégalité triangulaire et n'a été traitée que dans quelques copies. Les candidats ont en général abandonné cette sous-partie à ce stade.

Les candidats qui ont su traiter les questions 11 à 13 ont abordé avec profit les questions 19 et 20, mais, le plus souvent, ces questions n'ont été l'occasion que des mêmes inepties.

La question 21 était manifestement une simple question de cours pour quelques-uns, mais, au contraire, dans la plupart des copies, les candidats sont partis du principe que les zéros d'un polynôme étaient des fonctions continues (voire rationnelles !) des coefficients.

Les questions 22 à 30, plus techniques, n'ont pratiquement jamais rapporté ne fût-ce qu'un point.

De facture pourtant classique, cette épreuve s'est révélée très décevante à la correction. Si la présentation est souvent satisfaisante, les raisonnements en revanche souffrent souvent d'erreurs trop graves. Les justifications lapidaires « il est évident que... » sont trop fréquentes et l'exemple demandé à la question 23 n'a que rarement donné lieu à vérification complète.

Beaucoup de candidats sont peu attentifs à l'enchaînement des questions : très peu utilisent les questions 2 et 3 pour traiter la question 4, et il n'est pas rare qu'une même démonstration soit répétée deux ou même trois fois (questions 11 et 14).

Bien des questions relatives aux valeurs propres sont mal surmontées ou délaissées faute d'une conception claire de ce qu'est une valeur propre : la définition est sans doute connue, mais on préfère se référer au polynôme caractéristique ou aux formes réduites des matrices ; c'est particulièrement sensible aux questions 4 et 9. Le même travers se retrouve à propos des matrices inversibles que certains veulent à tout prix caractériser par leur déterminant (question 11 par exemple).

On peut prendre une épreuve de quatre heures pour une épreuve de vitesse, mais cette attitude est manifestement inefficace. Au contraire, ce que le correcteur attend du candidat n'est pas différent de ce qui sera attendu de lui dans sa vie professionnelle : des assertions réfléchies, étayées et non de simples premiers jets.

3 Corrigé

Première partie

1. La positivité de N_∞ est évidente, et l'homogénéité découle de l'identité $\sup(|\lambda| A) = |\lambda| \sup(A)$ valable pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Il reste donc à montrer la propriété de séparation et l'inégalité triangulaire.
   Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose : $\mathrm{N}_\infty(A) = 0$. Alors par définition de N_∞ on a les égalités suivantes : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$. Une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme est nul, donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$, ce qui démontre que A est la matrice nulle. Ainsi N_∞ sépare les points.
   Enfin, soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^2$, dont on note $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ les coefficients. Alors :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(A) + \mathrm{N}_\infty(B).$$
   Cela fournit un majorant de $\left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \mid i \in [\![1, n]\!] \right\}$. Par propriété de la borne supérieure : $\mathrm{N}_\infty(A + B) \leqslant \mathrm{N}_\infty(A) + \mathrm{N}_\infty(B)$. D'où l'inégalité triangulaire.
   Ceci achève de montrer que N_∞ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

   Questions à se poser, réflexes à acquérir. En utilisant le fait que le maximum soit atteint, peut-on obtenir en rédigeant autrement la propriété d'homogénéité et l'inégalité triangulaire ?

2. Soient $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Le i^{e} coefficient de AZ est $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}z_j$, et on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}z_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||z_j| \leqslant \|Z\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \|Z\|_\infty \,\mathrm{N}_\infty(A).$$

Cette majoration est en particulier vraie pour l'indice i qui maximise les coefficients de AZ, d'où le résultat : $\|AZ\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)\|Z\|_\infty$.

3. La question précédente implique aisément l'inégalité : $\sup\limits_{Z\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \dfrac{\|AZ\|_\infty}{\|Z\|_\infty} \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)$. Pour l'inégalité en sens contraire, trouvons un vecteur Z_0 explicite tel que :

$$\mathrm{N}_\infty(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = \frac{\|AZ_0\|_\infty}{\|Z_0\|_\infty}.$$

Cela montrerait à la fois que $\mathrm{N}_\infty(A)$ est inférieur ou égal à la borne supérieure ci-dessus (et donc il lui serait égal), et que cette borne supérieure est atteinte.
Pour trouver un tel vecteur Z_0, il s'agit de se demander comment avoir le cas d'égalité dans chacune des majorations de la question précédente. C'est possible en considérant $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que : $\mathrm{N}_\infty(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$, et en posant pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$z_j = \begin{cases} \frac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit, alors, Z_0 le vecteur de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de coordonnées $z_1, \dots, z_n$. Ce choix est fait de sorte que : $a_{i_0,j}z_j = |a_{i_0,j}||z_j|$, et : $|z_j| = 1$ (afin que $\|Z\|_\infty = 1$). Vérifions déjà que i_0 est l'indice maximisant les coordonnées de AZ :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}z_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}z_j = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}z_j\right|,$$

la dernière égalité étant vraie parce que les $a_{i_0,j}z_j = |a_{i_0,j}|$ sont des réels positifs. Ainsi la coordonnée maximale de AZ est bien pour $i = i_0$. On en déduit, en reprenant le calcul ci-dessus mais qu'on affine :

$$\frac{\|AZ_0\|_\infty}{\|Z_0\|_\infty} = \|AZ_0\|_\infty = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}z_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \mathrm{N}_\infty(A).$$

On en déduit : $\mathrm{N}_\infty(A) = \dfrac{\|AZ_0\|_\infty}{\|Z_0\|_\infty} \leqslant \sup\limits_{Z\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \dfrac{\|AZ\|_\infty}{\|Z\|_\infty}$. Ayant démontré l'inégalité en sens contraire, on a l'égalité :

$$\mathrm{N}_\infty(A) = \sup_{Z\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \frac{\|AZ\|_\infty}{\|Z\|_\infty} = \max_{Z\in\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \frac{\|AZ\|_\infty}{\|Z\|_\infty},$$

le maximum étant atteint en le vecteur Z_0 construit ci-dessus.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Les deux dernières questions doivent vous faire penser à quelque chose de connu, vu en cours et en exercice. Quoi donc ?

— Bien comprendre ce qui présida la définition des z_j, afin de pouvoir adapter la réflexion au calcul d'autres normes triples. Est-ce que le choix de z_j pour $a_{i_0,j} = 0$ aurait pu être différent, $z_j = 0$ par exemple ?

— Réciproquement, si N_∞ avait été défini comme dans cette question, auriez-vous réussi à obtenir les résultats des questions précédentes et à montrer qu'elle est égale à la norme de l'énoncé ?

4. Soient λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre associé. Quitte à le diviser par sa plus grande coordonnée en module (qui est non nulle), on peut supposer : $\|X\|_\infty = 1$. On a alors : $\|AX\|_\infty = |\lambda|$, et par la question 2 on a aussi : $\|AX\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)$, donc : $|\lambda| \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)$. Ceci vaut pour toute valeur propre complexe de A, donc aussi pour sa plus grande en module. D'où le résultat : $\rho(A) \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Est-ce que cette inégalité est une égalité en général ?

5. Nous avons déjà justifié que N_∞ est une norme. Montrons qu'elle est sous-multiplicative. Soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Pour tout vecteur $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, on a par la question 2 (appliquée successivement à A puis B) :

$$\|ABX\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)\|BX\|_\infty \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)\,\mathrm{N}_\infty(B)\|X\|_\infty,$$

donc $\mathrm{N}_\infty(A)\,\mathrm{N}_\infty(B)$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\dfrac{\|ABX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \mid X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}\right\}$. Par propriété de la borne supérieure : $\mathrm{N}_\infty(AB) \leqslant \mathrm{N}_\infty(A)\,\mathrm{N}_\infty(B)$, d'où le résultat.

6. Justifions d'abord brièvement que N_Q est une norme. La plupart des propriétés découlent trivialement du fait que N_∞ en soit une, sans que l'inversibilité de Q n'intervienne. Seule la propriété de séparation le nécessite. En effet, soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\mathrm{N}_Q(A) = 0$. Alors : $\mathrm{N}_\infty(Q^{-1}AQ) = 0$. Comme N_∞ sépare les points, cela équivaut à : $Q^{-1}AQ = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. En multipliant chaque membre de l'égalité par Q à gauche et par Q^{-1} à droite, on conclut : $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. Le reste ne mérite pas d'être détaillé.

Pour démontrer que N_Q est une norme d'algèbre, il suffit de montrer qu'elle est sous-multiplicative grâce au fait que N_∞ le soit par la question précédente. Pour tout $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^2$ on a :

$$\mathrm{N}_Q(AB) = \mathrm{N}_\infty(Q^{-1}ABQ) = \mathrm{N}_\infty(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ) \leqslant \mathrm{N}_\infty(Q^{-1}AQ)\,\mathrm{N}_\infty(Q^{-1}BQ) = \mathrm{N}_Q(A)\,\mathrm{N}_Q(B),$$

d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Reconnaître là une application du transfert de structure (construire une nouvelle norme à partir d'une ancienne norme et d'un isomorphisme d'espaces vectoriels) et du principe de conjugaison. Est-ce que le transfert de structure transforme toujours une norme d'algèbre en une autre norme d'algèbre ? Pourquoi cela a-t-il marché ici ?

— Plus généralement, si P et Q sont des matrices carrées, à quelles conditions l'application $A \mapsto \mathrm{N}_\infty(PAQ)$ est-elle une pseudo-norme ? une norme ? une norme d'algèbre ? Et si P et Q ne sont pas carrées ? (P doit avoir n colonnes et Q doit avoir n lignes, sinon le produit n'est pas défini.)

7. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\mathrm{N}_Q(A) = \mathrm{N}_\infty(Q^{-1}AQ) \leqslant \mathrm{N}_\infty(Q^{-1})\,\mathrm{N}_\infty(A)\,\mathrm{N}_\infty(Q).$$

Posons donc : $C_Q = \mathrm{N}_\infty(Q^{-1})\,\mathrm{N}_\infty(Q)$, qui est strictement positif parce que Q et Q^{-1} ne sont pas des matrices nulles. On a déjà : $\mathrm{N}_Q(A) \leqslant C_Q\,\mathrm{N}_\infty(A)$. Vérifions l'autre inégalité voulue :

$$\mathrm{N}_\infty(A) = \mathrm{N}_\infty(QQ^{-1}AQQ^{-1}) \leqslant \mathrm{N}_\infty(Q)\,\mathrm{N}_\infty(Q^{-1}AQ)\,\mathrm{N}_\infty(Q^{-1}) = C_Q\,\mathrm{N}_Q(A),$$

d'où : $\frac{1}{C_Q}\,\mathrm{N}_\infty(A) \leqslant \mathrm{N}_Q(A)$, ce qu'il fallait démontrer.

Autre démonstration avec l'équivalence des normes en dimension finie. Comme N_∞ et N_Q sont deux normes sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie, elles sont équivalentes : il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que : $\alpha\,\mathrm{N}_\infty \leqslant \mathrm{N}_Q \leqslant \beta\,\mathrm{N}_\infty$. Posons : $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$. On vérifie alors qu'il suffit de prendre $C_Q = \max(\alpha',\beta)$ pour avoir le résultat voulu.

8. Soit $s > 0$. Un calcul matriciel direct montre que la conjugaison $D_S^{-1}TD_S$ revient à multiplier la « i^{e} surdiagonale » de T par s^i, et ce pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. C'est-à-dire, si :

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix},$$

alors :

$$D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & t_{1,3}s^2 & \cdots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,3}s & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n}s^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

En particulier, en calculant la limite composante par composante on a :

$$\lim_{s\to 0^+} D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à : $\lim\limits_{s\to 0^+} \mathrm{N}_\infty(D_S^{-1}TD_S - D) = 0$, où D désigne la matrice diagonale ci-dessus. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s > 0$:

$$s < \eta \Longrightarrow \mathrm{N}_\infty(D_S^{-1}TD_S - D) < \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $s = \frac{\eta}{2}$, avec η un module qui convient pour ε. Alors par l'inégalité triangulaire renversée on a :

$$\mathrm{N}_\infty(D_S^{-1}TD_S) < \varepsilon + \mathrm{N}_\infty(D).$$

Or : $\mathrm{N}_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \mathrm{N}_{D_S}(T)$, et : $\mathrm{N}_\infty(D) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |t_{i,i}| = \rho(T)$ (les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux). D'où le résultat :

$$\mathrm{N}_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon.$$

Soient alors $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. On se ramène au cas précédent en triangulant A : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$. Comme A et T ont les mêmes valeurs propres, on a aussi : $\rho(A) = \rho(T)$, donc le raisonnement ci-dessus appliqué à T donne l'existence de $s > 0$ tel que : $\mathrm{N}_{D_S}(T) < \rho(A) + \varepsilon$. Or :

$$\mathrm{N}_{D_S}(T) = \mathrm{N}_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \mathrm{N}_\infty(D_S^{-1}P^{-1}APD_S) = \mathrm{N}_{PD_S}(A),$$

d'où le résultat en posant : $\mathrm{N}_\varepsilon = \mathrm{N}_{PD_S}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comment peut-on trouver facilement l'expression de $D_S^{-1}TD_S$, sans vraiment poser le calcul matriciel, en exploitant le fait que D_S soit diagonale ou en reconnaissant un changement de base ?

— J'utilise librement l'équivalence des normes dans ce raisonnement. Où ?

9. Supposons : $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$. On a : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \rho(A^k) \leqslant \mathrm{N}_\infty(A^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty} \rho(A^k) = 0$. Or une triangulation de A permet de montrer aisément que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A^k) = \left\{\lambda^k \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)\right\},$$

ce dont on déduit : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\rho(A^k) = \rho(A)^k$. Ainsi le calcul de limite ci-dessus implique que la suite géométrique $\left(\rho(A)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qui n'est possible que si : $\rho(A) < 1$. D'où le sens direct.

Réciproquement, supposons : $\rho(A) < 1$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que : $\rho(A) + \varepsilon < 1$, et en prenant la norme d'algèbre N_ε de la question précédente on a : $0 \leqslant \mathrm{N}_\varepsilon(A^k) \leqslant (\mathrm{N}_\varepsilon(A))^k \leqslant (\rho(A) + \varepsilon)^k$, et le fait que $\rho(A) + \varepsilon$ soit strictement inférieur à 1 implique que les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{N}_\varepsilon(A^k) = 0$, et donc la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle. Ceci achève de démontrer l'équivalence.

Autre démonstration du sens direct. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$ et X un vecteur propre de A associé à λ. Si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle alors, par continuité du produit matriciel, la suite $(A^kX)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul. Or : $\|A^kX\|_\infty = |\lambda|^k\|X\|_\infty$, donc la convergence vers 0 de cette norme implique : $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda|^k = 0$ (on a utilisé le fait que $\|X\|_\infty$ soit non nul). Ce n'est possible que si : $|\lambda| < 1$, d'où le sens direct.

Remarque. On peut démontrer plus généralement que l'on a : $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\mathrm{N}(A^k)\right)^{\frac{1}{k}}$, peu importe la norme d'algèbre N.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Noter une analogie entre l'équivalence qui fut démontrée et un résultat que vous connaissez bien concernant la convergence des suites géométriques complexes. Noter qu'elles interviennent ici dans les deux sens de l'équivalence, si bien que cette relation n'a rien d'un hasard.

— Vérifier ce que j'affirme sur le spectre de A^k : pourquoi le démontre-t-on *via* une triangulation ? Ne peut-on pas le démontrer autrement ? Est-ce que c'est aussi vrai si l'on n'est pas triangulable (i.e. avec des matrices réelles) ?

— Pourquoi tient-on tant à avoir des normes d'*algèbre* dans toute cette partie ?

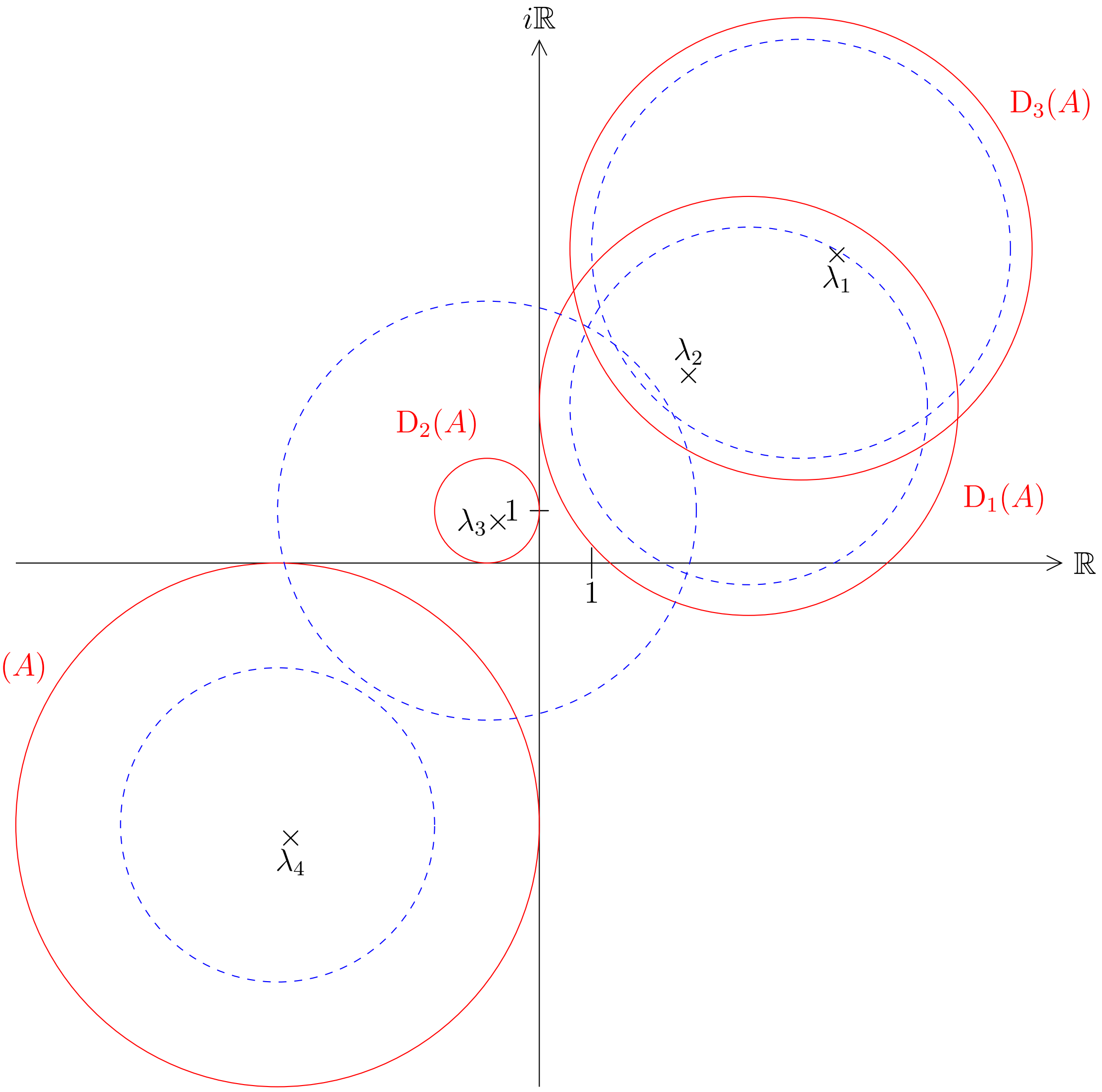
— Comparer la démonstration du sens réciproque avec celle donnée en travaux dirigés. Quels sont les mérites de chacune d'entre elles ? Est-ce que celle de ce sujet permet d'éviter une triangulation, ce qui en ferait éventuellement une démonstration plus économe sur le plan théorique ? Retenir sa démonstration favorite.

— Peut-on donner un ε simple tel que : $\rho(A) + \varepsilon < 1$?

— Est-ce que le résultat donné dans la remarque implique immédiatement l'équivalence à démontrer ?

Deuxième partie

10. Par anticipation sur la suite du problème, j'ai également représenté les valeurs propres complexes de A dans le plan complexe (obtenues par calcul approché *via* un logiciel de calcul formel). L'ensemble $\mathrm{G}_L(A)$ est la réunion des disques rouges (ou, pour l'impression monochrome : dont le trait est plein) tandis que $\mathrm{G}_C(A)$ est la réunion des disques bleus (dont le trait est en pointillé) :



11. Comme M n'est pas inversible, on a : $\ker(M) \neq \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$. Il existe donc $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *non nul*, dont on note $x_1, \dots, x_n$ les coefficients, tel que : $MX = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. En regardant ce que donne cette égalité ligne par ligne, on a :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = 0.$$
Considérons un indice $p \in [\![1, n]\!]$ tel que : $|x_p| = \|X\|_\infty$. En regardant l'égalité ci-dessus pour $i = p$, on a :
$$m_{p,p} x_p = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} m_{p,j} x_j,$$
et donc, par l'inégalité triangulaire :
$$|m_{p,p}| \cdot |x_p| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |m_{p,j}||x_j| \leqslant |x_p| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |m_{p,j}|.$$

Divisons par $|x_p|$, qui est strictement positif puisque par hypothèse X est non nul (et par conséquent $|x_p| = \|X\|_\infty > 0$). On obtient :

$$|m_{p,p}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |m_{p,j}| = L_p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** À partir du moment où l'on a l'idée d'utiliser une relation de la forme $MX = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ pour obtenir une relation entre les coefficients de M, pourquoi est-il naturel de s'intéresser à la ligne qui maximise les coefficients de X ? Songer à la simplification qui aurait été impossible autrement.

12. On applique la question précédente à $M = A - \lambda \mathrm{I}_n$, qui n'est pas inversible. Il existe donc $p \in [\![1, n]\!]$ tel que le coefficient d'indice (p, p) de $A - \lambda \mathrm{I}_n$ soit inférieur ou égal à L_p. Or ce coefficient est égal à $a_{p,p} - \lambda$, donc : $|a_{p,p} - \lambda| \leqslant L_p$. C'est-à-dire :

$$\lambda \in \mathrm{D}_p(A) \subseteq \mathrm{G}_L(A),$$

d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Le raisonnement des deux dernières questions est à retenir dès qu'on veut encadrer une valeur propre (ou son module si l'on parle de nombres complexes) à l'aide de coefficients d'une ligne d'une matrice, ou encore lorsqu'on veut mesurer la distance d'une valeur propre à un coefficient diagonal.
> — Se demander si ce résultat peut servir *en situation pratique*, par exemple pour conjecturer les valeurs propres d'une matrice explicite d'ordre raisonnable, avant de se lancer dans un calcul de polynôme caractéristique. En juger avec des matrices croisées en exercice. Et pour des matrices qui, au contraire, ne sont pas de taille raisonnable, que pensez-vous de l'intérêt de ce résultat ?

13. On rappelle qu'une matrice et sa transposée ont les mêmes valeurs propres (soit par invariance du rang de $A - \lambda \mathrm{I}_n$, soit grâce à l'invariance par transposition du déterminant et donc du polynôme caractéristique). En appliquant la question précédente à $A^\top$, on a donc :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^\top) \subseteq \mathrm{G}_L(A^\top),$$

et on a clairement : $\mathrm{G}_L(A^\top) = \mathrm{G}_C(A)$. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** J'affirme que j'ai déjà eu l'occasion, soit en travaux dirigés soit dans *Méthodes*, d'obtenir des informations sur le spectre d'une matrice en étudiant plutôt celui de sa transposée. Où, et pourquoi ? Quand est-ce utile ?

14. Si l'on reprend le raisonnement de la question 11 avec la matrice $M = A - \mu \mathrm{I}_n$ et le vecteur propre X (qui appartient au noyau de M), alors on obtient : $|a_{k,k} - \mu| \leqslant L_k$. Or par hypothèse μ est sur le bord de $\mathrm{G}_L(A)$, donc : $|a_{k,k} - \mu| \geqslant L_k$; on a donc l'égalité et : $\mu \in \mathrm{C}_k(A)$.
15. On reprend à nouveau le raisonnement de la question 11 avec la matrice $M = A - \mu \mathrm{I}_n$ et le vecteur propre X. Si $k \in [\![1, n]\!]$ est tel que : $|x_k| = \|X\|_\infty$, alors la k^{e} ligne de $AX = \mu X$ donne après réarrangements :

$$(\mu - a_{k,k})x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{k,j} x_j,$$

et d'après la question précédente on a : $|a_{k,k}-\mu| = L_k$, donc :

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\,|x_k| = L_k|x_k| = |\mu - a_{k,k}||x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{k,j}x_j\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\,|x_j|\,.$$

On en déduit : $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\,(|x_k|-|x_j|) \leqslant 0$. Or par hypothèse sur k on a : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $|x_k|-|x_j| \geqslant 0$, donc la somme ci-avant est à termes positifs et est elle-même positive. On en déduit :

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{k,j}|\,(|x_k|-|x_j|) = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme est nul, et comme $a_{k,j} \neq 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ par hypothèse, on a : $\forall j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$, $|x_k| = |x_j|$. En particulier, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on a : $|x_j| = \|X\|_\infty$, ce qui permet d'appliquer la question précédente avec tous les entiers j de $[\![1,n]\!]$. On en déduit : $\mu \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{C}_j(A)$.

Remarque. On a démontré en passant que $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est nécessairement un vecteur propre dans cette configuration. Qu'est-ce que cela nous enseigne de plus sur les coefficients de A ?

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** On remarque que le raisonnement ci-dessus fait apparaître le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (en majorant $|x_j|$ par $|x_k|$). Qu'est-ce que cela implique ? Aurait-on pu conclure en l'utilisant ? Pourquoi ne l'ai-je pas fait ?

16. Notons $x_1,\dots,x_n$ les coefficients de X. La matrice D_X est inversible puisque son déterminant est $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i > 0$ (par hypothèse sur X). Par un calcul matriciel direct, on a :

$$D_X^{-1}AD_X = \left(\left(a_{i,j}\frac{x_j}{x_i}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

On en déduit, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathrm{D}_i(D_X^{-1}AD_X) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\frac{x_j}{x_i} \right\}.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Vérifier mon calcul. Comment peut-on trouver facilement l'expression de $D_X^{-1}AD_X$, sans vraiment poser le calcul matriciel, en exploitant le fait que D_X soit diagonale ou en reconnaissant un changement de base ?

17. Soit λ_0 une valeur propre complexe de A telle que : $\rho(A) = |\lambda_0|$. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $X > 0$. Notons $x_1,\dots,x_n$ les coefficients de X. Le spectre étant un invariant de similitude, λ_0 est aussi valeur propre de $D_X^{-1}AD_X$ et par les questions 12 et 16 il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$|\lambda_0 - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|\frac{x_j}{x_i}.$$

On en déduit, *via* l'inégalité triangulaire renversée :

$$\rho(A) = |\lambda_0| \leqslant |a_{i,i}| + \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| \frac{x_j}{x_i} = \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| x_j.$$

Ainsi $\rho(A)$ est un minorant de l'ensemble $\left\{ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{x_i} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j |a_{i,j}| \mid X > 0 \right\}$. Par propriété de la borne inférieure :

$$\rho(A) \leqslant \inf_{X>0} \left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} x_j |a_{i,j}| \right\},$$

d'où le résultat.

18. Pour montrer la majoration : $\rho(A) \leqslant \frac{83}{3}$, notons que le maximum de trois nombres réels positifs est nécessairement supérieur à leur moyenne (vérification facile : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{x+y+z}{3} \leqslant \frac{3\cdot\max(x,y,z)}{3} = \max(x,y,z)$). On en déduit, pour tout $(x_1,x_2,x_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{3} x_j |a_{i,j}| \geqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{x_j}{x_i} |a_{i,j}|,$$

et comme la matrice est symétrique, on peut regrouper les indices (i,j) et (j,i) avec $i \neq j$ dans cette double somme, de sorte que :

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{3} x_j |a_{i,j}| \geqslant \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{3} |a_{i,i}| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right) |a_{i,j}| \right).$$

La première somme est égale à 19. Pour minorer la seconde somme simplement, notons que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$ (en effet : $t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{t^2-2t+1}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geqslant 0$), donc avec $t = \frac{x_j}{x_i} > 0$ on obtient :

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 3} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{3} x_j |a_{i,j}| \geqslant \frac{1}{3} \left(19 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} |a_{i,j}| \right) = \frac{19 + 2\,(16+8+8)}{3} = \frac{83}{3}.$$

Cette minoration étant indépendante de $(x_1,x_2,x_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, on a le résultat voulu par propriété de la borne inférieure.

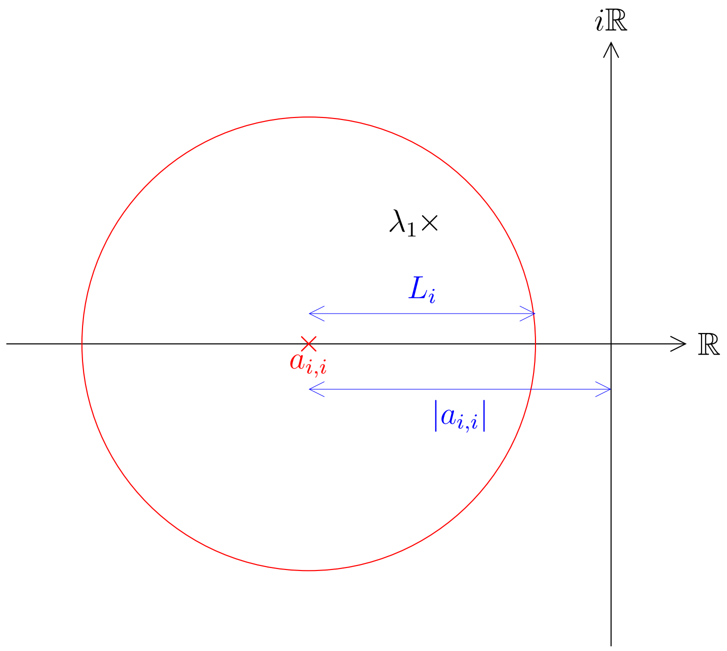
Calculons à présent les valeurs propres de A exactement, ce qui nous permettra d'obtenir la valeur de $\rho(A)$. On a :

$$\begin{aligned}
\chi_A = \begin{vmatrix} X-7 & 16 & -8 \\ 16 & X-7 & 8 \\ -8 & 8 & X+5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} X+9 & X+9 & 0 \\ 16 & X-7 & 8 \\ -8 & 8 & X+5 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\
&= \begin{vmatrix} X+9 & 0 & 0 \\ 16 & X-23 & 8 \\ -8 & 16 & X+5 \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= (X+9) \begin{vmatrix} X-23 & 8 \\ 16 & X+5 \end{vmatrix} \\
&= (X+9)(X^2 - 18X - 243) \\
&= (X+9)^2 (X-27).
\end{aligned}$$

Donc : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-9{,}27\}$ et : $\rho(A) = 27$. La majoration de $\rho(A)$ que l'énoncé nous demande de trouver, à savoir : $\frac{83}{3} = 27 + \frac{2}{3}$, est donc très près d'être optimale dans ce cas particulier.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi pouvait-on penser à étudier la somme que j'ai utilisée dans ma minoration, plutôt que d'étudier le maximum directement ? Quel était l'intérêt ?
> — Retenir la minoration $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$, occasionnellement utile.
> — Noter qu'il y a plus intelligent que de développer comme un cochon χ_A avec la règle de Sarrus. Comment repérer les opérations qui permettent des factorisations comme je l'ai fait ?

19. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Par la question 12, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $|\lambda - a_{i,i}| \leqslant L_i$, avec $a_{i,i} < 0$ et : $|a_{i,i}| > L_i$. Ainsi le rayon de la boule fermée contenant λ est strictement plus petit que la distance entre son centre et l'origine du repère. Visuellement, on comprend parfaitement pourquoi λ doit être de partie réelle strictement négative sous ces conditions :



Démontrons-le. On a : $\mathrm{Re}(\lambda - a_{i,i}) \leqslant |\mathrm{Re}(\lambda - a_{i,i})| \leqslant |\lambda - a_{i,i}| \leqslant L_i$, et donc :

$$\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant L_i + \mathrm{Re}(a_{i,i}) = L_i + a_{i,i} = L_i - |a_{i,i}| < 0,$$

d'où le résultat : pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a : $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Peut-on alléger ou modifier l'hypothèse sur le signe des $a_{i,j}$ pour avoir des résultats semblables sur le signe des parties réelles des λ ?

20. Comme B est diagonalisable par hypothèse, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que : $B = PDP^{-1}$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D, dont on se souvient qu'ils sont les valeurs propres de B.
Soient $E \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\hat{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B+E)$. Posons : $E' = P^{-1}EP = ((e_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, de sorte que : $E = PE'P^{-1}$. Alors : $B + E = P(D + E')P^{-1}$, et le spectre étant un invariant de similitude, on a aussi : $\hat{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D + E')$. En appliquant la question 12 à la matrice $D + E'$, on a donc l'existence de $i \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$|\hat{\lambda} - (\lambda_i + e_{i,i})| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |e_{i,j}|$$

(en effet, comme D est diagonale, les coefficients non diagonaux de E' et de $D+E'$ sont les mêmes). On en déduit, par l'inégalité triangulaire renversée :

$$|\hat{\lambda}-\lambda_i| \leqslant |e_{i,i}| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |e_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} |e_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}_\infty(E').$$

On veut exprimer ce majorant en fonction de $\mathrm{N}_\infty(E)$. Pour cela, on rappelle d'une part que : $\mathrm{N}_\infty(E') = \mathrm{N}_\infty(P^{-1}EP) = \mathrm{N}_P(E)$, et d'autre part on sait par la question 7 qu'il existe $C_P \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\frac{1}{C_P}\,\mathrm{N}_\infty \leqslant \mathrm{N}_P \leqslant C_P\,\mathrm{N}_\infty$. On en déduit : $\mathrm{N}_\infty(E') = \mathrm{N}_P(E) \leqslant C_P\,\mathrm{N}_\infty(E)$, puis :

$$|\hat{\lambda}-\lambda_i| \leqslant C_P\,\mathrm{N}_\infty(E),$$

d'où le résultat en posant : $\kappa_\infty(B) = C_P$ (qui, effectivement, ne dépend que de P et donc de B) et en se souvenant que λ_i est une valeur propre de B.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Que nous enseigne le résultat obtenu, « concrètement » et qualitativement ?

— Pourquoi cette idée de passer par $E' = P^{-1}EP$? La réponse peut aussi bien être algébrique que géométrique (même si, dans mon opinion, c'est le point de vue géométrique qui rend naturelle l'idée d'un changement de base). C'est important de le comprendre pour y songer de soi-même.

— On remarque que dans l'intégralité de cette partie, nous n'avons jamais raisonné géométriquement (en introduisant un endomorphisme canoniquement associé, etc.), alors que c'est pourtant plus riche conceptuellement en général. Pourquoi était-il ici plus pertinent de raisonner matriciellement ?

Troisième partie

21. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, l'application c_j est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée par une constante $M_j \in \mathbb{R}_+$. Posons : $M = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} M_j$, et soit $t \in [0,1]$. Nous allons borner les racines de P_t à l'aide des coefficients $c_j(t)$ puis à l'aide de M. Soit $\lambda \in Z_t$. On a : $P_t(\lambda) = 0$, et donc :

$$\lambda^n = -\sum_{j=1}^{n} c_j(t)\lambda^{n-j}.$$

Supposons : $|\lambda| \geqslant 1$. On a alors, en divisant cette égalité par λ^{n-1} (qui est non nul) et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |c_j(t)||\lambda|^{1-j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} M_j \leqslant nM.$$

En prenant : $R = \max(1, nM)$, on a donc : $|\lambda| \leqslant R$, que $|\lambda|$ soit supérieur ou inférieur à 1. D'où : $\forall t \in [0,1]$, $Z_t \subseteq \mathrm{B}_f(0,R)$, ce qu'il fallait démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— En parallèle de cette résolution : revoir les exercices de travaux dirigés où nous avons établi des majorations des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients (chapitres V et VI). Très utile dans un contexte topologique où nous avons une suite ou une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ et majorée, et qu'on veut en déduire une borne sur les racines des polynômes de l'image (par exemple en vue d'utiliser la propriété de Bolzano-Weierstraß).

— Qu'est-ce qui m'a conduit à faire une distinction de cas sur $|\lambda|$? Et une division par λ^{n-1} ?

— Peut-on retrouver le résultat par une analyse qualitative ? (Croissances comparées par exemple.)

22. Comme suggéré par l'énoncé, nous allons raisonner par l'absurde. Supposons :

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists t\in[0,1],\quad (|t-t_0|<\eta\ \text{ et }:\ \forall\omega_t\in Z_t,\ |\omega_t-\omega|\geqslant\varepsilon)\,.$$

Considérons un tel ε. En particulier, en posant $\eta=\frac{1}{k}$ on obtient :

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ \exists t_k\in[0,1],\quad \left(|t_k-t_0|<\frac{1}{k}\ \text{ et }:\ \forall\omega_{t_k}\in Z_{t_k},\ |\omega_{t_k}-\omega|\geqslant\varepsilon\right).\qquad (*)$$

Notons pour tout $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ les racines de P_{t_k} ainsi : $\omega_{1,k},\dots,\omega_{n,k}$ (avec répétitions éventuelles). La suite $((\omega_{1,k},\dots,\omega_{n,k}))_{k\geqslant1}$ est à valeurs dans $\mathrm{B}_f(0,R)^n$, qui est une partie compacte de $\mathbb{C}^n$ en tant que produit fini de compacts. Elle admet donc une sous-suite convergente $\left(\left(\omega_{1,\varphi(k)},\dots,\omega_{n,\varphi(k)}\right)\right)_{k\geqslant1}$. Si l'on note $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ sa limite, alors on a d'une part, en regardant la convergence composante par composante :

$$\lim_{k\to+\infty}P_{t_{\varphi(k)}}=P_{t_0},\qquad\text{(continuité en } t_0 \text{ des } c_j)$$

et d'autre part, par continuité du produit dans l'algèbre $\mathbb{C}_n[X]$ de dimension finie :

$$\lim_{k\to+\infty}\prod_{i=1}^n(X-\omega_{i,\varphi(k)})=\prod_{i=1}^n(X-z_i).\qquad\text{(convergence des } (\omega_{i,\varphi(k)})_{k\geqslant1})$$

Or : $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $P_{t_{\varphi(k)}}=\prod_{i=1}^n(X-\omega_{i,\varphi(k)})$. Par unicité de la limite : $P_{t_0}=\prod_{i=1}^n(X-z_i)$, et on en déduit que les z_i sont exactement les racines de P_{t_0} ; l'une d'elles est égale à ω, disons par exemple : $z_1=\omega$. En prenant la limite quand $k\to+\infty$ dans $(*)$ (où l'on remplace k par $\varphi(k)$), on obtient :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad |z_i-\omega|\geqslant\varepsilon,$$

ce qui est absurde pour $i=1$ par hypothèse sur ε.
Par l'absurde, on a montré :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall t\in[0,1],\ |t-t_0|<\eta\implies\exists\omega_t\in Z_t,\ |\omega_t-\omega|<\varepsilon.$$

Remarque. Si la compacité n'a pas encore été vue en cours, ce n'est pas bien grave : on construit successivement une suite extraite convergente $\left(\omega_{1,\varphi_1(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ grâce à son caractère borné dans $\mathbb{C}$ (théorème de Bolzano-Weierstraß), puis une suite extraite convergente $\left(\omega_{2,\varphi_1\circ\varphi_2(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, etc., jusqu'à la suite extraite convergente $\left(\omega_{n,\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_n(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. L'extractrice $\varphi=\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n$ fournit alors une suite extraite convergente pour toutes les suites $(\omega_{i,k})_{k\geqslant1}$ à la fois.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Bien observer les points communs entre ce raisonnement et de nombreux autres utilisés lorsque nous sommes sur un segment ou plus généralement un compact : 1° raisonner par l'absurde pour construire une infinité de contre-exemples au prédicat à démontrer ; 2° en spécialisant une variable à l'aide d'un paramètre entier, construire une *suite* de contre-exemples ; 3° utiliser la propriété de Bolzano-Weierstraß et raisonner sur une valeur d'adhérence pour avoir une contradiction. Nous raisonnons ainsi pour avoir le théorème de Heine, la convergence d'une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence, puis plus tard dans l'année pour avoir la finitude des zéros d'une solution à une équation différentielle de Sturm-Liouville... mais les exemples ne manquent pas ! Voir aussi les exercices du chapitre préliminaire.

— Comment interpréter ce qu'on vient de démontrer en termes de « continuité des racines » ?

— Pourquoi le produit est-il continu dans $\mathbb{C}_n[X]$? Et pourquoi ai-je besoin d'invoquer cela ?

— Où intervient l'inégalité $|t_k-t_0|<\frac{1}{k}$?

23. Pour trouver une telle matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, on peut essayer de prendre $a = 0$ et $b = 1$ (de sorte que : $\mathrm{D}_1(A) = \mathrm{B}_f(0,1)$) et choisir c et d de sorte que les valeurs propres de A soient strictement supérieures à 1, par exemple égales à 2 et 3. Comme : $\chi_A = X^2 - dX - c$, cette condition est vérifiée pour : $d = 5$, et : $c = -6$ (relations coefficients-racines). Ainsi la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ convient.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Produire d'autres matrices A qui conviennent, histoire de s'assurer qu'on a compris le tâtonnement méthodique ci-dessus.

24. Soient $t \in [0,1]$ et $z \in \mathrm{G}_L(A(t))$. On a : $A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ta_{1,2} & \cdots & ta_{1,n} \\ ta_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & ta_{n-1,n} \\ ta_{n,1} & \cdots & ta_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$, et donc l'appartenance de z à $\mathrm{G}_L(A(t))$ se traduit ainsi :

$$\exists i \in [\![1,n]\!], \quad |z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |ta_{i,j}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} t|a_{i,j}|.$$

Il suffit alors d'utiliser la majoration $t \leqslant 1$ pour conclure que z appartient à $\mathrm{G}_L(A)$: d'où le résultat.

25. On a : $A(0) = D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$, et le coefficient $a_{1,1}$ (qui est une valeur propre de $D = A(0)$) est évidemment dans $\mathrm{D}_1(A) = \mathrm{B}_f(a_{1,1},0)$. D'où : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(0)) \cap \mathrm{D}_1(A) \neq \emptyset$, et donc : $0 \in E$. Ceci montre que E est non vide, d'où le résultat.

26. Soit $t \in E$. On a : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t)) \cap \mathrm{D}_1(A) \neq \emptyset$. Autrement dit : il existe une valeur propre de $A(t)$, notée λ_t, telle que : $|\lambda_t - a_{1,1}| \leqslant \varepsilon$. Au vu de ce qu'on doit démontrer, il faut justifier qu'en modifiant très légèrement t, les valeurs propres de $A(t)$ soient très légèrement modifiées de sorte à ne pas sortir de $\mathrm{D}_1(A)$: dans l'idée, il suffirait pour cela que $t \mapsto \lambda_t$ (si une telle application a un sens) soit continue. Ce qui va formaliser cette idée est la question 22 appliquée au polynôme caractéristique de $A(t)$ quand t varie, puisque cette question peut bien s'interpréter (improprement) comme un résultat de continuité des racines.
Formalisons. L'application $t \mapsto P_t = \chi_{A(t)}$ est continue sur $[0,1]$, par composition :
   - de $t \mapsto A(t)$, qui est continue sur $[0,1]$ car chaque composante de cette application est une fonction affine, et à valeurs dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$;
   - et de $A \mapsto \chi_A$, continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ car chacune de ses composantes dans $\mathbb{C}_n[X]$ est, en tant que déterminant, une application polynomiale en les coefficients de A.

On peut donc lui appliquer la question 22 avec $t_0 = t$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t' \in [0,1],\ |t' - t| < \eta \implies \exists \lambda_{t'} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t')),\ |\lambda_{t'} - \lambda_t| < \varepsilon.$$

Prenons en particulier $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $\mathrm{B}(\lambda_t, \varepsilon) \cap \mathrm{D}_j(A) = \emptyset$. Un tel ε existe, puisque λ_t appartient à $\bigcap_{j=2}^{n} (\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}_j(A))$ par hypothèse de l'énoncé ($\forall j \in [\![2,n]\!]$, $\mathrm{D}_1(A) \cap \mathrm{D}_j(A) = \emptyset$), et cet ensemble est ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts. Il existe donc bien $\varepsilon > 0$ tel que : $\mathrm{B}(\lambda_t, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=2}^{n} (\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}_j(A))$. Pour un tel ε, on a d'après le prédicat ci-dessus :

$$\forall t' \in]t-\eta, t+\eta[\cap [0,1], \quad \exists \lambda_{t'} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t')),\ |\lambda_{t'} - \lambda_t| < \varepsilon,$$

autrement dit :

$$\forall t' \in]t-\eta, t+\eta[\cap [0,1],\ \exists \lambda_{t'} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t')),\ \lambda_{t'} \in \mathrm{B}(\lambda_t, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=2}^{n} (\mathbb{C} \setminus \mathrm{D}_j(A)),$$

la dernière appartenance pouvant se réécrire : $\forall j \in [\![2,n]\!]$, $\lambda_{t'} \notin \mathrm{D}_j(A)$. Or la question 12 assure qu'un tel $\lambda_{t'}$ appartient à $\mathrm{G}_L(A(t'))$, et donc la question 24 implique qu'il appartient aussi à $\mathrm{G}_L(A)$ et donc à l'un des disques $\mathrm{D}_i(A)$. Par ce qui précède, on a nécessairement : $\lambda_{t'} \in \mathrm{D}_1(A)$. On a donc montré :

$$\exists \eta > 0,\ \forall t' \in]t-\eta, t+\eta[\cap [0,1],\ \exists \lambda_{t'} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t')) \cap \mathrm{D}_1(A),$$

et donc : $\exists \eta > 0,\ \forall t' \in]t-\eta, t+\eta[\cap [0,1]$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t')) \cap \mathrm{D}_1(A) \neq \emptyset$, c'est-à-dire : $t' \in E$. Ceci vaut pour tout $t \in E$, d'où le résultat voulu :

$$\forall t \in E,\ \exists \eta > 0, \quad]t-\eta, t+\eta[\ \cap\ [0,1] \subseteq E.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- *Dessiner* le raisonnement de cette question. Comprendre au moins informellement (dessins...) pourquoi le résultat de cette question n'a aucune chance de se généraliser simplement si l'on ne suppose plus $\mathrm{D}_1(A) \cap \mathrm{D}_j(A) \neq \emptyset$ pour $j \geqslant 2$.
- Pouvait-on déterminer ε explicitement et ainsi éviter l'argument topologique ?
- Comment interpréter topologiquement ce qu'on vient de démontrer ? Vous devez vous poser ce genre de question spontanément : plus vous avez d'informations topologiques sur un ensemble et plus vous saurez quoi en déduire.
- Bien noter comment le fait que l'inversibilité (ou la donnée de valeurs propres) soit donnée par une application polynomiale (et donc continue), à savoir le déterminant, est très riche d'implications topologiques : densité de $\mathrm{GL}_n(K)$, des matrices diagonalisables, et ici continuité des valeurs propres (improprement).

27. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_k \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t_k)) \cap \mathrm{D}_1(A)$ par hypothèse sur t_k (qui appartient à E). La suite $(\lambda_k)_{k \geqslant 1}$ est à valeurs dans $\mathrm{D}_1(A)$ qui est compact, donc par la propriété de Bolzano-Weierstraß il existe une sous-suite extraite $(\lambda_{\varphi(k)})_{k \geqslant 1}$ qui converge vers un nombre complexe $\mu \in \mathrm{D}_1(A)$. Au vu de la question posée, il serait de bon ton de montrer : $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(a))$. Pour cela, on rappelle que par hypothèse sur λ_k, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 = \chi_{A(t_k)}(\lambda_k) = \det(\lambda_k \mathrm{I}_n - A(t_k)) = (\lambda_k)^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t_k)(\lambda_k)^{n-j},$$

où les c_j sont des applications continues sur $[0,1]$ (par continuité du déterminant en tant qu'application polynomiale). Lorsqu'on écrit cette égalité en remplaçant k par $\varphi(k)$, et lorsqu'on prend la limite quand $k \to +\infty$, on obtient donc :

$$0 = \mu^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(a)\mu^{n-j} = \chi_{A(a)}(\mu),$$

donc μ est une valeur propre de $A(a)$. On a montré : $\exists \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(a)) \cap \mathrm{D}_1(A)$, donc : $a \in E$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Pourquoi cette prudence, où je décompose $\chi_{A(t_k)}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ avant de passer à la limite ? Pourquoi ne voulais-je pas écrire directement : « or $t_{\varphi(k)} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} a$ et $\lambda_{\varphi(k)} \to \mu$, donc : $\chi_{A(t_{\varphi(k)})}(\lambda_{\varphi(k)}) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \chi_{A(a)}(\mu)$ par continuité du déterminant » ?
- Même commentaire qu'à la question précédente : qu'a-t-on démontré, topologiquement parlant ?
- Encore une invocation de la propriété de Bolzano-Weierstraß. Qu'est-ce qui pouvait inciter à y recourir ici ? Quel raisonnement naïf aimerait-on faire *a priori*, et qui rencontre rapidement un obstacle sans l'usage d'une sous-suite convergente ?

28. Soit A une partie à la fois ouverte et fermée dans $[0,1]$. Alors $[0,1] \setminus A$ est fermé dans $[0,1]$, de sorte que l'application $\mathbb{1}_A$ soit continue sur $[0,1]$ (en effet, toutes les images réciproques possibles de fermés dans $\{0,1\}$ sont fermées dans $[0,1]$:

$$\mathbb{1}_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad \mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) = [0,1] \setminus A, \quad \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A, \quad \mathbb{1}_A^{-1}(\{0,1\}) = [0,1] \text{).}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, $\mathbb{1}_A([0,1])$ doit être un intervalle ; or $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ et les seuls intervalles de $\mathbb{R}$ inclus dans $\{0,1\}$ sont les singletons. On en déduit : $\mathbb{1}_A([0,1]) = \{0\}$, ou : $\mathbb{1}_A([0,1]) = \{1\}$. Dans le premier cas $A = \emptyset$ et dans le second : $A = [0,1]$. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Est-ce que ce raisonnement ne vous rappelle pas un résultat du cours ? Comment l'ai-je épuré en tenant compte du contexte du devoir ?

29. La question 26 démontre que E est un ouvert relatif de $[0,1]$, tandis que la question 27 démontre que E est un fermé relatif de $[0,1]$. Donc : $E \in \{\emptyset, [0,1]\}$. Or E est non vide par la question 25, donc : $E = [0,1]$. Autrement dit :

$$\forall t \in [0,1], \quad \exists \lambda_t \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A(t)) \cap \mathrm{D}_1(A).$$

C'est en particulier le cas pour $t = 1$. Comme : $A(1) = D + B = A$, on a l'existence d'une valeur propre λ de A appartenant à $\mathrm{D}_1(A)$: d'où le résultat.

Autre démonstration. On note que pour démontrer le résultat voulu, il suffit de montrer que 1 appartient à E : on a démontré plus que nécessaire. Pour avoir : $1 \in E$, il suffit de poser : $t_0 = \sup(E)$, et de noter d'une part que t_0 appartient à E par la question 27 (en effet E est fermé dans $[0,1]$), et d'autre part que $t_0 < 1$ est impossible par la question 26 (en effet, il existe $\eta > 0$ tel que $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\cap [0,1]$ soit dans E ; en prenant n'importe quel élément de $]t_0, t_0 + \eta[\cap [0,1]$, qui est non vide si $t_0 < 1$, on a notre contradiction).

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** On observera, dans ces dernières questions, une belle illustration selon laquelle on peut ramener l'étude d'une matrice quelconque à celle d'une matrice diagonale autrement que par l'algèbre (réduction), mais aussi par des arguments topologiques : construction d'un chemin liant A à une matrice diagonale D, et utiliser la connexité pour passer d'un résultat valable localement – en D et en tout voisinage – à un résultat global, qui est donc en particulier valable en A.
> L'avantage est que là, la matrice A n'a pas à être diagonalisable ; mais il faut malgré tout que les hypothèses permettent d'invoquer un argument de connexité : on ne peut pas être gagnant sur tous les fronts.

30. Ce qu'on vient de démontrer pour $\mathrm{D}_1(A)$ vaut bien entendu pour les autres disques : s'ils ne rencontrent aucun autre disque, alors ils contiennent au moins une valeur propre de A.

Or les disques $\mathrm{D}_1(A)$ et $\mathrm{D}_3(A)$ se rencontrent mais les disques $\mathrm{D}_2(A)$ et $\mathrm{D}_4(A)$ n'en rencontrent aucun autre (figure de la question 10 à l'appui). On a donc la certitude que ces deux disques contiennent une valeur propre de A.

La figure de la question 10 montre que tous les disques contiennent une valeur propre, mais dans le cas des disques $\mathrm{D}_1(A)$ et $\mathrm{D}_3(A)$ cela ne pouvait pas se déduire du raisonnement de cette partie.