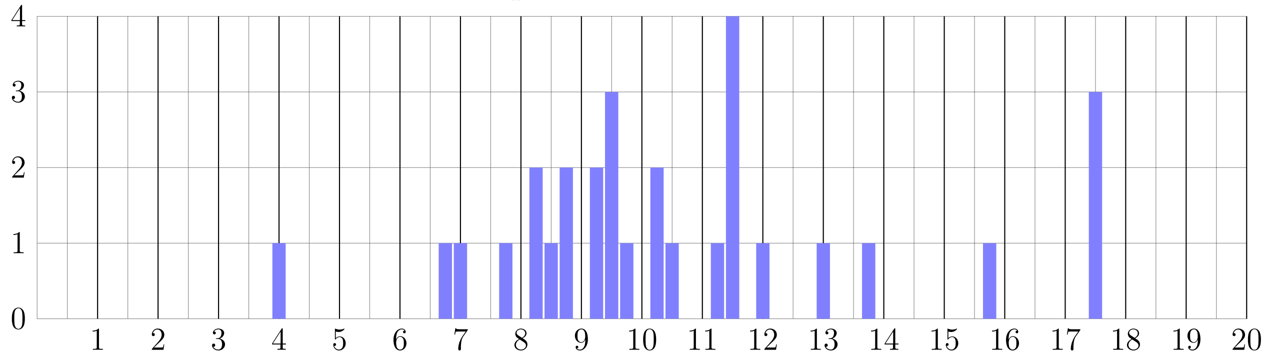
Devoir sur table n° 5 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **58 points**.

Moyenne : 10,67. **Écart-type :** 3,20.

Premier quartile : 8,75. **Médiane :** 10. **Troisième quartile :** 11,5.

Redite des devoirs précédents.

1. Un vecteur propre de A associé à λ est un vecteur NON NUL vérifiant $AX = \lambda X$. Oubli trop fréquent et durement sanctionné aux concours (à bon droit ! on passe à côté de l'essentiel sinon !).

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

2. Pour les démonstrations d'unicité, j'ai vu beaucoup de raisonnements par l'absurde. Or l'unicité d'un objet x vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ s'écrit ainsi : « $\forall y \in \bigstar$, y vérifie $\mathcal{P} \Rightarrow x = y$ », ce qui est un raisonnement direct plus commode à rédiger. Supposer qu'il existe y *distinct* de x vérifiant $\mathcal{P}$, et trouver une contradiction, surcharge bien souvent la rédaction.

   Attention cependant à ne pas faire de cette observation une règle générale : parfois, il FAUT raisonner par l'absurde pour que la démonstration d'unicité marche.

3. Même si vous aviez parfaitement compris les similitudes et différences entre applications semi-linéaires et linéaires, il fallait en convaincre le correcteur : sinon, comment peut-il distinguer l'élève qui n'a pas remarqué qu'on n'est pas dans la situation classique de celui qui l'a remarqué ? Il fallait donc détailler *au moins la première fois* chaque raisonnement (en apparence classique) avec les applications semi-linéaires, comme le fait de pouvoir co-diagonaliser dès qu'on a une base de vecteurs co-propres.

4. Pour la démonstration de : $\det(\mathrm{I}_n + A\overline{A}) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, ayez conscience que le correcteur n'a pas la moindre idée des centaines d'exercices que vous aurez vus durant l'année, et qu'un laconique « $\overline{A}$ et I_n commutent donc on a... » ne lui évoquera rien. Je n'ai moi-même pas fait le lien immédiatement...

Imprécisions mathématiques.

5. J'ai trop souvent vu : « on a : $u(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \mu(\overline{\lambda}\vec{x} + \vec{y})$, or c'est égal à $\mu(\lambda\vec{x} + \vec{y})$ si et seulement si λ est réel »... Le μ est là pour faire joli ? Soyez plus regardants lorsque vous étudiez un cas d'égalité avec un produit de plusieurs facteurs en commun dans les deux membres que vous comparez.

6. Lorsqu'une matrice *réelle* A a une valeur propre *réelle* λ, elle admet nécessairement des vecteurs propres *réels* : d'une part c'est dans la définition d'une valeur propre, et d'autre part c'est une conséquence directe de l'invariance du rang par extension de corps : le rang de $A - \lambda\mathrm{I}_n$ est le même selon qu'on la voie dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, donc par le théorème du rang : $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(A - \lambda\mathrm{I}_n)) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(A - \lambda\mathrm{I}_n))$. Ainsi il existe des vecteurs propres complexes si et seulement s'il en existe des réels.

   Cette observation aurait évité bien des contorsions à des élèves trop scrupuleux.

7. Lorsque vous dites qu'une matrice nilpotente n'est pas diagonalisable, c'est faux : c'est une matrice nilpotente NON NULLE qui ne l'est pas (vous oubliez vraiment la non nullité partout en algèbre linéaire...).

   Par ailleurs, si j'ai mis ce résultat en exemple et non en théorème, il y a une raison : c'est à démontrer (comme tous les résultats mis en exemple, sauf ceux exagérément faciles comme le fait que les endomorphismes de polynôme minimal de degré 1 sont les homothéties).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

8. Lorsqu'il fallait *définir* la matrice représentative d'une application semi-linéaire u, j'ai trop souvent vu « soit $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(u)$... » Mais n'est-ce pas ce qu'on veut définir, justement ?! Cet objet n'a *a priori* aucun sens pour une application non linéaire.

   On voit d'ailleurs que quelques élèves n'ont pas vu cette subtilité, puisqu'ils ont cru reconnaître la même formule de changement de base pour les applications linéaires et semi-linéaires.

9. Peu d'élèves ont exploité le lien entre applications semi-linéaires et matrices, pourtant suggéré par le début du problème (c'était à peu près sa seule raison d'être). Par exemple : si u est semi-linéaire et de matrice A dans une certaine base, alors u^2 est linéaire et de matrice $A\bar{A}$.

   L'intérêt de raisonner avec les applications est pour l'utilisation des sous-espaces stables (i.e. se ramener par restriction à des sous-espaces où l'étude est plus facile). En effet, les sous-espaces stables ne se « voient pas » matriciellement puisqu'ils sont assujettis à une base d'origine. On appréciera leur emploi, dans le corrigé de ce problème, aux questions 10 et 32 par exemple (on pouvait s'en servir ailleurs mais le corrigé ne le fait pas : question 22 notamment).

   Les seuls avantages des matrices sur les applications sont : 1° la compacité dans les calculs relativement à une base (on évite la manipulation de multiples doubles sommes), 2° l'utilisation du déterminant (qui nous facilite indiscutablement la vie dans certaines considérations sur l'inversibilité ou les valeurs propres, comme le fait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire soient sur sa diagonale).

10. Je m'étonne du faible ratio de copies exploitant l'hypothèse que A est triangulaire pour en déduire que les valeurs propres sont sur sa diagonale (de même pour $\bar{A}$ et $A\bar{A}$). C'est même ainsi que j'ai motivé l'attrait de la triangulation dans le cours (après avoir démontré le critère de triangulation).

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

- PREMIÈRE PARTIE : question 10 ;
- DEUXIÈME PARTIE : questions 17 et 23 ;
- TROISIÈME PARTIE : questions 30 à 32.