Devoir sur table n° 5

(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Ce devoir est une adaptation de l'épreuve de Mathématiques I du Concours Commun Mines-Ponts, filière MP, année 2021. Les deux premières parties sont une retranscription quasiment exacte de l'énoncé d'origine (j'ai seulement enlevé une indication qui me semblait excessivement généreuse dans la question 14). J'ai rajouté une troisième partie pour tenir compte de la durée de l'épreuve (trois heures pour l'énoncé original) et pour vous donner l'opportunité de montrer votre compréhension fine des sous-espaces stables (en particulier caractéristiques).

Avoir dans ce sujet des notions légèrement différentes de celles du cours (éléments co-propres) mais partageant néanmoins un certain nombre de résultats en commun, permettait de valoriser votre connaissance ou compréhension du cours d'algèbre linéaire.

Je n'ai pas eu le temps de développer ce commentaire.

2 Corrigé

Première partie

Premières propriétés.

1. Si $\vec{x}$ est un vecteur co-propre associé à deux nombres complexes μ_1 et μ_2, il vient : $(\mu_1 - \mu_2)\vec{x} = \vec{0}$. Or : $\vec{x} \neq \vec{0}$ par hypothèse, donc : $\mu_1 = \mu_2$. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Et si $\vec{x} = \vec{0}$? Obtient-on la même chose pour une application semi-linéaire que pour une application linéaire ?

2. Si μ est une valeur co-propre et $\vec{x}$ un vecteur co-propre associé, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad u\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}\vec{x}\right) = e^{\frac{i\theta}{2}}u(\vec{x}) = e^{\frac{i\theta}{2}}\mu\vec{x} = e^{i\theta}\mu\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}\vec{x}\right),$$

or : $e^{-\frac{i\theta}{2}}\vec{x} \neq \vec{0}$, donc $e^{i\theta}\mu$ est également valeur co-propre et $e^{-\frac{i\theta}{2}}\vec{x}$ est un vecteur co-propre associé.
Remarque. On observe donc qu'il peut y avoir une infinité de valeurs co-propres même en dimension finie, au contraire de ce que l'on observe pour les valeurs propres.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi les (nombreux) arguments démontrant qu'il y a un nombre fini de valeurs propres en dimension finie pour un endomorphisme, ne s'adapteraient pas aux valeurs co-propres ?
> — Comment ai-je pu penser au vecteur $e^{-\frac{i\theta}{2}}\vec{x}$?

3. Il est clair que E_μ est un sous-ensemble non vide de E stable par addition.
On remarque que E_μ n'est *a priori* pas stable par multiplication externe : si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\vec{x} \in E_\mu$, alors :
$$u(\lambda\vec{x}) = \overline{\lambda}u(\vec{x}) = \overline{\lambda}\mu\vec{x} = \mu(\overline{\lambda}\vec{x}).$$
Cela donne : $\lambda\vec{x} \in E_\mu$, si et seulement si : $\overline{\lambda}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, ou : $\mu = 0$. Le premier cas se produit si et seulement si λ est réel ou $\vec{x} = \vec{0}$. Or μ est supposé être une valeur co-propre, donc il existe des vecteurs $\vec{x}$ non nuls dans E_μ et pour de tels vecteurs on doit donc avoir : $\lambda \in \mathbb{R}$, pour que la stabilité par multiplication externe soit assurée.
On en déduit que E_μ est un espace vectoriel complexe si et seulement si $\mu = 0$ (si $\mu \neq 0$, n'importe quel choix de λ non réel et de $\vec{x} \neq \vec{0}$ met en défaut la stabilité par multiplication externe). C'est en revanche un espace vectoriel réel dans tous les cas.
Remarque. On peut noter qu'une application semi-linéaire est $\mathbb{R}$-linéaire, de sorte que E_μ soit simplement le noyau de $u-\mu\mathrm{Id}_E$ vu comme application $\mathbb{R}$-linéaire : c'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Puisque la composée de deux morphismes de groupes additifs reste un morphisme de groupe additif, on doit seulement déterminer si l'on a : $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall\vec{x} \in E$, $u \circ v(\lambda\vec{x}) = \lambda(u \circ v)(\vec{x})$. Or :
$$\forall\lambda \in \mathbb{C},\ \forall\vec{x} \in E, \quad u \circ v(\lambda\vec{x}) = u(\overline{\lambda}v(\vec{x})) = \overline{\overline{\lambda}}(u \circ v)(\vec{x}) = \lambda(u \circ v)(\vec{x}),$$
donc $u \circ v$ est linéaire.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Quel est le rapport entre la question des morphismes de groupes additifs et la question posée ?

Matrice associée à une application semi-linéaire.

5. Soit $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j}$ la i^{e} coordonnée de $u(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Soient $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k$ et $\vec{y} = u(\vec{x})$. On a par semi-linéarité :
$$\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}u(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{x_j}a_{i,j}\vec{e}_i,$$
donc la i^{e} coordonnée de $\vec{y}$ dans $\mathcal{B}$ est : $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}\overline{x_j}$. Ceci donne matriciellement : $Y = A\overline{X}$.
6. Soient $\vec{x} \in E$ et $\vec{y} = u(\vec{x})$. Notons X (resp. X') et Y (resp. Y') les matrices colonnes représentant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans la base $(\vec{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (resp. $(\vec{f}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$). On a d'après la question précédente : $Y = A\overline{X}$, et : $Y' = B\overline{X'}$. Or par la formule de changement de base : $Y = SY'$ et $X = SX'$, donc :
$$SY' = Y = A\overline{X} = A\overline{SX'} = A\bar{S}\bar{X}',$$
où l'on utilise abondamment le fait que la conjugaison complexe soit un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$. Comme S est inversible, cela implique : $Y' = \left(S^{-1}A\overline{S}\right)\overline{X'}$.
Comme on a aussi : $Y' = B\overline{X'}$, on en déduit : $\left(B - S^{-1}A\overline{S}\right)\overline{X'} = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Ce raisonnement vaut pour tout $\vec{x} \in E$, donc aussi pour tout vecteur colonne X'. En prenant X' successivement égal aux vecteurs de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il vient que toutes les colonnes de $B - S^{-1}A\overline{S}$ sont nulles donc que $B - S^{-1}A\overline{S}$ est nulle. On en déduit : $B = S^{-1}A\overline{S}$, d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Se convaincre que l'évaluation en les vecteurs de la base canonique donne bien la nullité des colonnes. Pouvait-on raisonner avec des endomorphismes pour conclure ?
> — Traduire d'autres relations matriciellement. Par exemple, si u et v sont semi- linéaires, a-t-on une relation entre les matrices de u, v et $u \circ v$? C'est éventuellement utile pour faire des allers-retours dans ce sujet entre applications et matrices.

Exemples.

7. Si $X = \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et $\mu \in \mathbb{C}$, alors :
$$A\overline{X} = \mu X \iff \left\{ \begin{array}{rcr} \overline{\omega} & = & -\mu z \\ \overline{z} & = & \mu\omega \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} \omega & = & -|\mu|^2\omega \\ \overline{z} & = & \mu\omega \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} 1 & = & -|\mu|^2 \\ \overline{z} & = & \mu\omega \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcr} \omega & = & 0, \\ z & = & 0. \end{array} \right.$$
Le premier cas est impossible puisque $-|\mu|^2$ est négatif ou nul, donc nécessairement : $A\overline{X} = \mu X \iff X = 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{C})}$. La matrice A n'admet donc pas de valeur co-propre.
8. Si A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, alors il existe un vecteur réel non nul X tel que : $AX = \lambda X$. Or : $X = \overline{X}$, de sorte que : $A\overline{X} = \lambda X$. D'où le résultat : si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de la matrice réelle A, alors elle est également valeur co-propre.

Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$.

9. Soit X un vecteur co-propre de A associé à μ. De : $A\overline{X} = \mu X$, on tire immédiatement :
$$A\overline{A}X = A\overline{A\overline{X}} = A\overline{\mu X} = \bar{\mu}A\overline{X} = \bar{\mu}\mu X = |\mu|^2 X,$$
d'où le résultat.
10. Supposons d'abord $A\overline{X}$ et X liés. Comme : $X \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $A\overline{X} = \alpha X$, donc α est valeur co-propre de A. D'après la question précédente on a donc : $A\overline{A}X = |\alpha|^2 X$, mais on a aussi par hypothèse : $A\overline{A}X = \lambda X$. On en déduit : $\lambda X = |\alpha|^2 X$, et donc $\lambda = |\alpha|^2$ car $X \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$. Il en résulte qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\alpha = \sqrt{\lambda}e^{i\theta}$. Comme α est une valeur co-propre de A, il en découle d'après la question 2 que $\sqrt{\lambda} = \alpha e^{-i\theta}$ est également valeur co-propre de A.
Supposons désormais $A\overline{X}$ et X linéairement indépendants. Il est naturel de chercher un vecteur co-propre associé à $\sqrt{\lambda}$ dans le plan engendré par ces deux vecteurs ce qui revient à chercher un vecteur co-propre de la forme $Y = A\overline{X} + \alpha X$. Or : $A\overline{Y} = \lambda X + \overline{\alpha}A\overline{X}$. On constate que $\alpha = \sqrt{\lambda}$ convient.
Autre démonstration dans le cas libre. Soit $u : \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'application semi-linéaire de matrice A dans la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On vérifie facilement, grâce à l'hypothèse $A\overline{A}X = \lambda X$, que le plan P engendré par les deux vecteurs $A\overline{X}$ et X est stable par u (comme u n'est pas linéaire, attention à ne pas aller trop vite : le fait que la stabilité d'un sous-espace se résume à vérifier la stabilité sur une famille génératrice n'est plus un résultat de cours) et que la matrice de $v : \left\{ \begin{array}{rcl} P & \to & P \\ \vec{x} & \mapsto & u(\vec{x}) \end{array} \right.$ dans la base $\left(A\overline{X}, X\right)$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Or cette matrice est réelle et admet $\sqrt{\lambda}$ comme valeur propre donc, d'après la question 8, le réel $\sqrt{\lambda}$ est valeur co-propre de v et donc de u.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi est-il « naturel » de chercher un vecteur co-propre dans le plan engendré par X et $A\overline{X}$? Éventuellement se poser la question plus tard dans l'année, lorsque nous verrons que les endomorphismes symétriques permettent de produire des plans stables à l'aide de leurs vecteurs propres.
> — Pourquoi, pour toute matrice carrée A, existe-t-il une application semi-linéaire dont la matrice dans une base donnée est A ?

11. Il découle immédiatement des deux questions précédentes que μ est valeur co-propre de A si et seulement si μ^2 est valeur propre de $A\overline{A}$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Vérifier que cet énoncé (et le raisonnement des deux questions précédentes) est en cohésion avec l'exemple de la question 7.
> — Est-ce que les résultats que vous connaissez sur les éléments propres d'une matrice, conjointement au résultat de cette question, permettent d'en déduire des résultats généraux sur les éléments co-propres ? Se poser éventuellement la question plus tard.

Cas d'une matrice triangulaire supérieure.

12. Soit A triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux (et donc les valeurs propres aussi) sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Alors $\overline{A}$ est aussi triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$, donc la matrice $A\overline{A}$ l'est aussi, de coefficients diagonaux $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2$. Ainsi si λ est valeur propre de A alors $|\lambda|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$. D'après la question 11 ci-dessus, $|\lambda|$ est valeur co-propre de A, donc λ également d'après la question 2 (vu que $\lambda = |\lambda|e^{i\vartheta}$ où ϑ est un argument de λ si $\lambda \neq 0$; le cas $\lambda = 0$ est trivial), donc $\lambda e^{i\theta}$ est valeur co-propre de A pour tout réel θ toujours d'après la question 2 : d'où le résultat.

13. Si μ est valeur co-propre de A alors $|\mu|$ également d'après la question 2 (même raisonnement que ci-dessus) donc $|\mu|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$. Or $A\overline{A}$ est une matrice triangulaire supérieure, donc la valeur propre $|\mu|^2$ figure sur sa diagonale. Or les coefficients diagonaux de $A\overline{A}$ sont aussi, par le raisonnement de la question précédente, les nombres complexes de la forme $|\lambda|^2$ où λ est valeur propre de A. Il existe donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que : $|\lambda|^2 = |\mu|^2$. Cette égalité implique l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $\lambda = \mu e^{i\theta}$, et $\mu e^{i\theta}$ est donc valeur propre de A.

    En résumé, on a montré dans ces deux questions que si A est triangulaire :

    - pour toute valeur propre λ de A, le nombre $\lambda e^{i\theta}$ est valeur co-propre de A pour tout réel θ ;
    - pour toute valeur co-propre μ de A, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de A.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Relier la résolution de ces deux questions à un commentaire formulé dans le cours et dans *Méthodes* : l'intérêt de la triangulation est surtout qu'elle « révèle » les valeurs propres d'une matrice (même si, à proprement parler, nous ne triangulons pas ici).

14. On observe que i est l'unique valeur propre de A. D'après ce qu'on vient de démontrer ci-dessus, $1 = ie^{-\frac{\pi}{2}}$ est valeur co-propre de A et pour tout $X = \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ on a, en posant $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$, $c = \mathrm{Re}(\omega)$ et $d = \mathrm{Im}(\omega)$:

$$A\overline{X} = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} i\bar{z} + \bar{\omega} & = & z \\ i\bar{\omega} & = & \omega \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b + c & = & a \\ a - d & = & b \\ d & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a - b - c & = & 0 \\ c - d & = & 0 \end{array} \right.$$

On en déduit : $E_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right)$. Par exemple $X = \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur co-propre de A associé à 1.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Au vu de ce qu'on a démontré dans l'une des questions précédentes, pourquoi pouvait-on savoir *a priori* qu'on « doit » passer par la forme algébrique de z et ω pour mener jusqu'au bout l'explicitation de tous les vecteurs co-propres ?

Une caractérisation des valeurs co-propres.

15. Posons : $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, avec μ_1 et μ_2 réels. Soit $Z \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On pose : $X = \frac{1}{2}\left(Z + \overline{Z}\right) \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et : $X = \frac{1}{2i}\left(Z - \overline{Z}\right) \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors, par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} A\overline{Z} = \mu Z &\iff (B + iC)(X - iY) = (\mu_1 + i\mu_2)(X + iY) \\ &\iff BX + CY + i(CX - BY) = \mu_1 X - \mu_2 Y + i(\mu_1 Y + \mu_2 X) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} BX + CY & = & \mu_1 X - \mu_2 Y \\ CX - BY & = & \mu_2 X + \mu_1 Y \end{array} \right. \end{aligned} \qquad (S)$$

Supposons donc μ valeur co-propre. Alors $|\mu|$ l'est aussi d'après la question 2, suivant un argument plusieurs fois utilisé. En reportant dans (S) ci-dessus avec $\mu_1 = |\mu|$ et $\mu_2 = 0$ (et Z un vecteur

co-propre aussi), il vient : $D\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = |\mu|\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, et comme $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ on en déduit que $|\mu|$ est valeur propre de D.
Réciproquement, supposons que $|\mu|$ soit valeur propre de D. Alors (S) implique que $|\mu| = |\mu| + i0$ est valeur co-propre de A (en prenant $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ un vecteur propre de D associé à $|\mu|$ et $Z = X + iY$) donc μ aussi d'après la question 2.
On a donc démontré que μ est valeur co-propre de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $|\mu|$ est valeur propre de $D \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** S'interroger sur l'intérêt de caractériser les vecteurs co-propres ainsi. Pourquoi est-ce préférable à la caractérisation donnée avec $A\overline{A}$ par exemple ?

Deuxième partie

Une relation d'équivalence.

16. D'après la question 6, les matrices A et B sont en relation si et seulement si elles repèrent la même application semi-linéaire dans deux bases différentes. Par la formule du changement de base, on montre alors aisément qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Puisqu'il ne s'agit pas d'une matrice représentative d'une application linéaire, comme on en manipule classiquement, vérifier la véracité de ce que j'affirme.
> — Proposer une vérification purement algébrique que $\approx$ est une relation d'équivalence.

Indépendance des vecteurs co-propres.

17. D'après la question 9 la famille $\left(X_1, X_2, \ldots, X_k\right)$ est une famille de vecteurs propres de $A\overline{A}$ associés aux valeurs propres $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \ldots, |\mu_k|^2$ qui sont deux à deux distinctes, donc cette famille est libre.
On en déduit que s $A\overline{A}$ admet n valeurs propres distinctes positives ou nulles, alors par la question 10 la matrice A admet n valeurs co-propres de modules distincts : ils forment donc une famille libre par ce qu'on vient de démontrer, de cardinal maximal ; c'est donc une base de vecteurs co-propres de A. Nous allons en déduire que u est co-diagonalisable.
Soit u l'application semi-linéaire de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans lui-même, dont la matrice dans la base canonique est A. Sa matrice dans une base de vecteurs co-propres est une matrice diagonale D, donc d'après la question 6 il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A = SD\bar{S}^{-1}$: d'où le résultat, A est co-diagonalisable.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi cette hypothèse de positivité des valeurs propres ? S'assurer de l'avoir bien comprise.
> — Bien se convaincre que pour une application semi-linéaire aussi, il est vrai que la matrice est diagonale quand elle représente l'application dans une base de vecteurs co-propres.

Quelques propriétés.

18. On trouve facilement : $A\overline{A} = \mathrm{I}_n$.
19. Comme A admet un nombre fini de valeurs propres, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $-e^{-2i\theta}$ ne soit pas valeur propre de A, et pour un tel θ la matrice $A + e^{-2i\theta}\mathrm{I}_n$ est inversible, donc $S(\theta) = e^{i\theta}\left(A + e^{-2i\theta}\mathrm{I}_n\right)$ l'est aussi. Or on sait en outre que l'on a : $A\overline{A} = \mathrm{I}_n$, donc :
$$A\overline{S(\theta)} = e^{-i\theta}A\overline{A} + e^{i\theta}A = e^{-i\theta}\mathrm{I}_n + e^{i\theta}A = S(\theta),$$
d'où : $A = S(\theta)\overline{S(\theta)}^{-1}$. En résumé, cette question et la précédente démontrent que $A\overline{A} = \mathrm{I}_n$ si et seulement s'il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que : $A = S\overline{S}^{-1}$, c'est-à-dire si et seulement si A est co-semblable à I_n.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Observer comment interpréter la non inversibilité comme l'annulation d'un déterminant, ou comme la donnée d'une valeur propre, permet de montrer des résultats d'inversibilité pour des énoncés du type : « montrer qu'il existe ★ tel que ♠ soit inversible ». Stratégie fréquemment rencontrée.

Une condition nécessaire.

20. Notons : $S^{-1}A\overline{S} = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Il vient immédiatement : $A\overline{A} = SD\overline{D}S^{-1}$. Ainsi $A\overline{A}$ est semblable à $D\overline{D} = \operatorname{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$ donc $A\overline{A}$ est bien diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles. En outre le rang de A est égal à celui de D (puisque le rang est invariant par équivalence) donc au nombre de λ_i non nuls, qui est aussi le nombre de $|\lambda_i|^2$ non nuls et donc égal au rang de $D\overline{D}$, puis à celui de $A\overline{A}$ (par invariance par similitude). D'où le résultat.

Une condition suffisante.

21. On a : $B\overline{B} = \left(S^{-1}A\overline{S}\right)\left(\overline{S}^{-1}\overline{A}S\right) = S^{-1}A\overline{A}S = \Lambda$. Or Λ est réelle, donc : $B\overline{B} = \overline{B}B = \Lambda$. Il vient alors : $B\Lambda = B\left(B\overline{B}\right) = B\left(\overline{B}B\right) = \left(B\overline{B}\right)B = \Lambda B$. D'où le résultat : Λ et B commutent.

22. Notons : $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,k} \end{pmatrix}$, avec : $\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2,\ B_{i,j} \in \mathrm{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{C})$. L'égalité $B\Lambda = \Lambda B$ équivaut à :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 B_{1,1} & \cdots & \lambda_k B_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 B_{k,1} & \cdots & \lambda_k B_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{1,1} & \cdots & \lambda_1 B_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k B_{k,1} & \cdots & \lambda_k B_{k,k} \end{pmatrix}$$
Plus précisément, le bloc en position (i,j) est égal à $\lambda_j B_{i,j}$ dans le membre de gauche et à $\lambda_i B_{i,j}$ dans le membre de droite. Comme les λ_i sont distincts, cette égalité implique la nullité des matrices $B_{i,j}$ pour tous i et j distincts. En posant : $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $B_i = B_{i,i}$, on a donc bien :
$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & B_k \end{pmatrix}.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Vérifier les détails omis : pourquoi cette expression des deux produits matriciels par blocs ?
> — Peut-on déduire la forme de B par un argument sur les sous-espaces propres stables ? Si oui, voyez-vous pourquoi je n'ai pas voulu procéder ainsi ici ? Si non, alors pourquoi n'est-ce pas possible ici, alors qu'on procède souvent aussi pour avoir des matrices diagonales par blocs ? (voire diagonales tout court)

23. On identifie les blocs dans l'égalité : $B\overline{B} = \Lambda$. On obtient : $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $B_i\overline{B_i} = \lambda_i \mathrm{I}_{n_i}$. Si : $\lambda_i > 0$, alors : $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}B_i\right)\left(\overline{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}B_i}\right) = \mathrm{I}_{n_i}$ on en déduit par la question 19 que $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}B_i$ est co-semblable à I_{n_i} et donc que B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i}\mathrm{I}_{n_i}$.
Or par hypothèse : $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k \geqslant 0$, donc ceci est valable pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, et si $\lambda_k > 0$ alors c'est également vrai pour $i = k$. Montrons que c'est encore vrai pour $i = k$ même si $\lambda_k = 0$. En effet, dans ce cas on a :
$$\operatorname{rg}(A\overline{A}) = \operatorname{rg}(\Lambda) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i, \quad \text{et :} \quad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rg}(B_i).$$
Or pour tout $i \leqslant k-1$, la matrice B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i}\mathrm{I}_{n_1}$ et donc : $\operatorname{rg}(B_i) = n_i$. Comme par hypothèse $A\overline{A}$ et A ont même rang, on en déduit :
$$\sum_{i=1}^{k-1} n_i = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rg}(B_i) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i + \operatorname{rg}(B_k)$$

et donc : $\mathrm{rg}(B_k) = 0$, c'est-à-dire : $B_k = 0_{\mathrm{M}_{n_k}(\mathbb{C})}$. La matrice nulle est bien trivialement co-semblable à la matrice $\sqrt{\lambda_k}\mathrm{I}_{n_k}$ puisqu'elle est également nulle si $\lambda_k = 0$.
Ainsi B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i}\mathrm{I}_{n_i}$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. Déduisons-en que B est co-semblable à une matrice diagonale. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, soit $S_i \in \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{C})$ telle que : $B_i = S_i(\sqrt{\lambda_i}\mathrm{I}_{n_i})\overline{S_i}^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} S_1(\sqrt{\lambda_1}\mathrm{I}_{n_1})\overline{S_1}^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & S_k(\sqrt{\lambda_k}\mathrm{I}_{n_k})\overline{S_k}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & S_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\mathrm{I}_{n_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_k}\mathrm{I}_{n_k} \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} S_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & S_k \end{pmatrix}}^{-1}, \end{aligned}$$

donc B est co-semblable à une matrice diagonale, et comme la relation de co-similitude est une relation d'équivalence par la question 16, la matrice A est également co-semblable à une matrice diagonale. D'où le résultat : les trois propriétés de l'énoncé constituent une condition nécessaire et suffisante de co-diagonalisibilité.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Vérifier que la relation de « co-similitude » préserve effectivement le rang. Préserve-t-elle d'autres propriétés comme la relation de similitude ? (trace, déterminant, relations entre puissances, etc.)

Exemples.

24. Après calcul : $A\overline{A} = \mathrm{I}_2$, donc la condition est clairement satisfaite : A est co-diagonalisable. En revanche cette matrice n'admet qu'une seule valeur propre (à savoir i) donc elle est diagonalisable seulement si $\pi_A = X - i$, c'est-à-dire seulement si : $A = i\mathrm{I}_2$. Ce n'est pas vérifié, donc A n'est pas diagonalisable.
Ensuite : $B\overline{B} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et les valeurs propres de cette matrice ne sont pas réelles (elles sont égales à $2i$ et $-2i$). La matrice B N'est PAS co-diagonalisable. Elle est en revanche diagonalisable, puisque $\chi_B = (X-1)^2 + 1 = (X - 1 - i)(X - 1 + i)$ est scindé et à racines simples.
Ensuite : $C\overline{C} = C^2 = 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{C})}$. C'est une matrice de rang nul alors que C est de rang 1, donc d'après le critère de co-diagonalisation la matrice C N'est PAS co-diagonalisable. Par le même argument que pour la matrice A, on montre que C n'est pas diagonalisable (il n'y a qu'une seule valeur propre et C n'est pas une matrice d'homothétie).
Enfin : $D\overline{D} = 2\mathrm{I}_2$ et le critère de co-diagonalisation est clairement vérifié, donc D est co-diagonalisable (en plus d'être diagonalisable, puisque $\chi_D = (X - (1+i))(X - (1-i))$ est scindé à racines simples).
En résumé :

	diagonalisable	co-diagonalisable
A		x
B	x	
C		
D	x	x

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Trouver d'autres façons de montrer ou contredire la diagonalisation, notamment : peut-on y parvenir sans calculer de polynôme caractéristique ?
- En s'inspirant de ces quatre exemples, peut-on produire facilement des matrices qui sont diagonalisables et co-diagonalisables ? ou ni l'un ni l'autre ? ou avec exactement une des deux propriétés ?

Troisième partie

25. On a : $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ -\overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n + A\overline{A} & -A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Le déterminant étant multiplicatif, on a donc :

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\right) \det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ -\overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n + A\overline{A} & -A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\right).$$

Or le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs se calcule en faisant le produit des déterminants des blocs diagonaux, donc :

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ -\overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\right) = \det(\mathrm{I}_n)^2 = 1,\ \det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n + A\overline{A} & -A \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\right) = \det(\mathrm{I}_n + A\overline{A})\det(\mathrm{I}_n) = \det(\mathrm{I}_n + A\overline{A}).$$

On en déduit le résultat demandé :

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\right) = \det(\mathrm{I}_n + A\overline{A}).$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Impérativement comprendre le raisonnement qui put me mener au produit matriciel du raisonnement : ce n'est pas trouvé à tâtons. Penser en termes d'opération sur les colonnes ou lignes. Vous vous assurerez que vous avez bien compris en proposant un autre produit matriciel qui mène au même résultat.

26. Soit u l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$. Notons $\mathcal{B}_c = (E_1, \dots, E_{2n})$ la base canonique de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. Par définition de u, les colonnes de $\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix}$ sont les images par u des vecteurs $E_1, \dots, E_n$; plus précisément, R donne les n premières coordonnées de $u(E_1), \dots, u(E_n)$, tandis que T donne les n dernières ; description analogue pour S et U. On en déduit que la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}_1 = (E_{n+1}, \dots, E_{2n}, E_1, \dots, E_n)$ est : $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. En appliquant la formule du changement de base entre $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_1$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{où :} \quad P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \end{pmatrix}.$$

Ainsi les matrices $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$ sont semblables.

Pour montrer que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$, on utilise cette fois la formule du changement de base avec u, entre la base $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_2 = (E_1, \dots, E_n, -E_{n+1}, \dots, -E_{2n})$, de sorte que :

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{où :} \quad P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix},$$

d'où le résultat.

Autre approche. On peut passer de $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$ en faisant successivement $C_2 \leftarrow -C_2$ et $L_2 \leftarrow -L_2$. Cela revient matriciellement à multiplier à gauche et à droite par la matrice de dilatation par blocs $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$: on retombe sur l'égalité ci-dessus (puisque cette matrice est égale à son inverse).

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont effectivement des bases ?
> — Bien comprendre la matrice de u dans les nouvelles bases proposées, et se convaincre qu'on aurait pu les trouver de soi-même sans procéder au hasard. Il peut être utile, à cet effet, de se demander ce que donne la formule du changement de base pour un endomorphisme quelconque, lorsqu'on permute uniquement deux vecteurs d'une base donnée, puis (après avoir gagné en aisance) en prenant une permutation quelconque de ces vecteurs. De même quand on multiplie par une constante non nulle l'un des vecteurs.
> — Observer qu'on pouvait aussi traiter cette question en démontrant d'abord une relation de similitude entre les matrices $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u & t \\ s & r \end{pmatrix}$ d'ordre 2, puis en adaptant cette relation de similitude à des blocs. Cette idée fonctionne régulièrement.

27. Le polynôme caractéristique de A_0 est à coefficients réels si et seulement si : $\chi_{A_0} = \overline{\chi_{A_0}}$. C'est ce que nous allons démontrer. Par définition de A_0 :

$$\overline{\chi_{A_0}} = \overline{\begin{vmatrix} X\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n & A \\ -\overline{A} & X\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} (X-1)\mathrm{I}_n & \overline{A} \\ -A & (X-1)\mathrm{I}_n \end{vmatrix}, \qquad (*)$$

sachant que le déterminant d'une matrice complexe conjuguée $\overline{M}$ est le conjugué du déterminant de M, du fait que le déterminant soit un polynôme en les coefficients de M et que la conjugaison complexe soit un automorphisme de corps.

Or des matrices semblables ont même déterminant. Par conséquent, la question précédente implique successivement (on prend $(R,S,T,U) = ((X-1)\mathrm{I}_n, \overline{A}, -A, (X-1)\mathrm{I}_n)$ pour justifier la première égalité, puis $(R,S,T,U) = ((X-1)\mathrm{I}_n, -A, \overline{A}, (X-1)\mathrm{I}_n)$ pour la seconde) :

$$\begin{vmatrix} (X-1)\mathrm{I}_n & \overline{A} \\ -A & (X-1)\mathrm{I}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (X-1)\mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & (X-1)\mathrm{I}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (X-1)\mathrm{I}_n & A \\ -\overline{A} & (X-1)\mathrm{I}_n \end{vmatrix}.$$

Cette égalité, combinée à $(*)$, donne :

$$\overline{\chi_{A_0}} = \begin{vmatrix} (X-1)\mathrm{I}_n & A \\ -\overline{A} & (X-1)\mathrm{I}_n \end{vmatrix} = \det(X\mathrm{I}_{2n} - A_0) = \chi_{A_0},$$

d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Se convaincre que l'indéterminée X n'est pas affectée par la conjugaison complexe (et que cela ne voudrait rien dire).
> — Se convaincre qu'il n'est pas gênant de poser $R = (X-1)\mathrm{I}_n$ alors que R est à coefficients complexes (au contraire de $(X-1)\mathrm{I}_n$) dans la question précédente.

28. Il est clair qu'on a : $\forall (Z, Z') \in (\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C}))^2$, $\Omega(Z+Z') = \Omega(Z) + \Omega(Z')$, et de plus, pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{\lambda Y} \\ \overline{\lambda X} \end{pmatrix} = \overline{\lambda}\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right),$$

d'où le résultat : Ω est semi-linéaire. Montrons la seconde identité de l'énoncé. Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, on a :

$$\Omega \circ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{\overline{X}} \\ -\overline{\overline{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ -Y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

donc : $\Omega \circ \Omega = -\mathrm{Id}_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, d'où le résultat.

Déduisons-en que Ω n'admet pas de vecteur co-propre : si l'on note A la matrice de l'application semi-linéaire dans la base canonique, alors $A\bar{A}$ est la matrice de $\Omega \circ \Omega$ dans la base canonique d'après la question 5. Donc l'identité ci-dessus équivaut matriciellement à : $A\bar{A} = -\mathrm{I}_{2n}$. On en déduit que $A\bar{A}$ n'admet pas de valeur propre positive ou nulle, et donc d'après la question 9 la matrice A n'admet pas de vecteur co-propre et donc Ω non plus.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi la matrice de $\Omega \circ \Omega$ est-elle $A\overline{A}$ et non A^2 ? Pourquoi un vecteur co-propre pour A en implique un pour Ω ? Bien observer les résultats de la première partie du problème pour le comprendre.

— Si la démonstration ci-dessus ne vous convainc pas : trouver une autre démonstration en partant d'une égalité du type $\Omega(Z) = \lambda Z$ et en voyant qu'une telle égalité est impossible sauf si $\lambda = 0$. Se convaincre alors que votre démonstration équivaut à celle proposée dans ce corrigé.

29. Montrons par l'absurde que la famille $(Z, \Omega(Z))$ est libre sur $\mathbb{C}$. Comme Z est non nul, une relation de dépendance linéaire entre ces deux vecteurs impliquerait que $\Omega(Z)$ est proportionnel à Z, et donc Z serait un vecteur co-propre de Ω : absurde car Ω n'en admet pas par la question précédente. Ceci prouve par l'absurde que la famille $(Z, \Omega(Z))$ est libre sur $\mathbb{C}$.

Pour montrer la stabilité de $P = \mathrm{Vect}(Z, \Omega(Z))$: soit $X \in P$. On peut l'écrire : $X = \alpha Z + \beta\Omega(Z)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors par semi-linéarité et d'après l'identité $\Omega^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$, on a :

$$\Omega(X) = \overline{\alpha}\Omega(Z) + \overline{\beta}\Omega(\Omega(Z)) = \overline{\alpha}\Omega(Z) - \overline{\beta}Z \in P$$

d'où le résultat : le plan P est stable par Ω.

Remarque. Attention au fait que Ω n'est pas linéaire. On ne peut donc pas invoquer directement le résultat du cours selon lequel la stabilité d'un sous-espace vectoriel se résume à la vérifier sur une base. Néanmoins, comme on le voit ci-dessus, la démonstration de ce résultat de cours s'adapte sans peine aux applications semi-linéaires.

30. Pour alléger les notations, posons $P = \mathrm{Vect}(Z, \Omega(Z))$ et $F = E \cap P$. On nous demande de montrer que $F = \{0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$, ce qui revient à dire que F est un espace vectoriel de dimension nulle.

Or $F \subseteq P$ et P est de dimension 2 (une famille libre et génératrice est $(Z, \Omega(Z))$), donc : $\dim(F) \leqslant 2$. En particulier :

$$\dim(F) \in \{0,1,2\}.$$

Mais on ne peut pas avoir $\dim(F) = 2$, sinon on aurait $F \subseteq P$ et $\dim(F) = \dim(P)$, et donc : $F = P$. C'est impossible, parce que par hypothèse de l'énoncé Z appartient à P mais n'appartient pas à E, donc il n'appartient pas à $F = E \cap P$ non plus. Par l'absurde, $\dim(F) \neq 2$. Il reste comme possibilités : $\dim(F) = 1$, ou $\dim(F) = 0$. Nous allons montrer par l'absurde que le premier cas est impossible.

Supposons qu'on a $\dim(F) = 1$. Soit Z un vecteur non nul qui engendre F. Comme F est une droite vectorielle stable par Ω (en tant qu'intersection de deux sous-espaces stables : facile à vérifier), on a $\Omega(Z) \in F$, or $F = \mathrm{Vect}(Z)$: on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\Omega(Z) = \lambda Z$ (on retrouve, dans le cas de Ω, un résultat déjà connu pour les applications linéaires : une droite stable est engendrée par un vecteur co-propre). Or Ω n'admet pas de vecteur co-propre d'après la question 28 : contradiction. Par l'absurde, on ne peut donc pas avoir $\dim(F) = 1$. La seule possibilité restante est $\dim(F) = 0$, et donc :

$$F = E \cap \mathrm{Vect}(Z, \Omega(Z)) = \left\{0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\right\}.$$

31. Rappelons qu'on a montré dans la question 27 que χ_{A_0} est à coefficients réels, donc les racines λ et $\overline{\lambda}$ ont même ordre de multiplicité dans χ_{A_0}. Autrement dit : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)$, $\alpha_\lambda = \alpha_{\overline{\lambda}}$. Ainsi :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A_0), \quad F_{\overline{\lambda}} = \ker\left(\left(A_0 - \overline{\lambda}\mathrm{I}_{2n}\right)^{\alpha_{\overline{\lambda}}}\right) = \ker\left(\left(A_0 - \overline{\lambda}\mathrm{I}_{2n}\right)^{\alpha_\lambda}\right).$$

Ensuite, pour traiter cette question, suivons l'indication de l'énoncé. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. On a :

$$f \circ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{Y} - A\overline{X} \\ -\overline{AY} + \overline{X} \end{pmatrix},$$

or :

$$\Omega\left(f\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -A \\ \overline{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(\begin{pmatrix} X - AY \\ \overline{A}X + Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -(A\overline{X} + \overline{Y}) \\ \overline{X} - \overline{AY} \end{pmatrix},$$

donc : $f \circ \Omega = \Omega \circ f$. Une récurrence facile montre alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k \circ \Omega = \Omega \circ f^k$. Par conséquent, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, que l'on note $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, et pour tout $Z \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} P(f)\left(\Omega(Z)\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k\left(\Omega(Z)\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k \Omega\left(f^k(Z)\right) = \sum_{k=0}^{d} \Omega\left(\overline{a_k} f^k(Z)\right) &= \Omega\left(\sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} f^k(Z)\right) \\ &= \Omega\left(\overline{P}(f)(Z)\right), \end{aligned}$$

où l'on a noté : $\overline{P} = \sum\limits_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^k$. Ainsi :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad P(f) \circ \Omega = \Omega \circ \overline{P}(f). \qquad (*)$$

Montrons à présent que si : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_0)$, alors : $\Omega(F_\lambda) \subseteq F_{\overline{\lambda}} = \ker\left(\left(f - \overline{\lambda}\mathrm{I}_{2n}\right)^{\alpha_\lambda}\right)$, c'est-à-dire montrons :

$$\forall Z \in F_\lambda, \quad \left(f - \overline{\lambda}\mathrm{I}_{2n}\right)^{\alpha_\lambda}\left(\Omega(Z)\right) = 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}.$$

Pour cela, on prend $P = \left(X - \overline{\lambda}\right)^{\alpha_\lambda}$ dans l'égalité $(*)$ (de sorte que : $\overline{P} = (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$), et on a donc pour tout $Z \in F_\lambda$:

$$\begin{aligned} \left(f - \overline{\lambda}\mathrm{I}_{2n}\right)^{\alpha_\lambda}\left(\Omega(Z)\right) = P(f)(\Omega(Z)) = \Omega(\overline{P}(f)(Z)) = \Omega\left(\left(f - \lambda\mathrm{I}_{2n}\right)^{\alpha_\lambda}(Z)\right) &\overset{[Z \in F_\lambda]}{=} \Omega\left(0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\right) \\ &= 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}, \end{aligned}$$

donc : $\Omega(Z) \in F_{\overline{\lambda}}$. Comme cela vaut pour tout $Z \in F_\lambda$, cela nous fournit une première inclusion : $\Omega(F_\lambda) \subseteq F_{\overline{\lambda}}$. Ensuite, en échangeant les rôles de λ et $\overline{\lambda}$, on obtient : $\Omega(F_{\overline{\lambda}}) \subseteq F_{\overline{\overline{\lambda}}} = F_\lambda$. En prenant l'image par Ω dans cette relation d'inclusion, on en déduit :

$$\Omega^2(F_{\overline{\lambda}}) \subseteq \Omega(F_\lambda) \subseteq F_{\overline{\lambda}}$$

et comme, d'après la question 28, on a : $\Omega^2(F_{\overline{\lambda}}) = -\mathrm{Id}_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}(F_{\overline{\lambda}}) = F_{\overline{\lambda}}$, on en déduit : $F_{\overline{\lambda}} \subseteq \Omega(F_\lambda) \subseteq F_{\overline{\lambda}}$, c'est-à-dire :

$$F_{\overline{\lambda}} = \Omega\left(F_\lambda\right),$$

d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Peut-on généraliser ce qu'on a démontré ici, pour obtenir un énoncé proche de celui connu pour les endomorphismes, et du type : « si f et g commutent, alors ★ est stable par f » ? Ce résultat de cours en tête permet aussi de comprendre pourquoi, même sans l'indication de l'énoncé, on pouvait songer à comparer $f \circ \Omega$ et $\Omega \circ f$ et à en déduire une relation entre $P(f) \circ \Omega$ et $\Omega \circ \overline{P}(f)$.

32. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0) \cap \mathbb{R}$. Alors $F_\lambda = F_{\overline{\lambda}}$, et donc la question précédente montre que F_λ est stable par Ω. La question 30 permet d'en déduire que F_λ est en somme directe avec tout plan vectoriel de la forme : $P_Z = \mathrm{Vect}\left(Z, \Omega(Z)\right)$, où $Z \notin F_\lambda$. Nous pourrions utiliser ce résultat pour construire un

supplémentaire G de F_λ dans $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ qui est de dimension paire ; dans l'idée, il serait engendré par une famille de la forme $(Z_1, \Omega(Z_1), \dots, Z_k, \Omega(Z_k))$. De l'égalité : $F_\lambda \oplus G = \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, on déduirait :

$$\dim(F_\lambda) = 2n - \dim(G) = 2(n-k),$$

et que F_λ est de dimension paire.

Voilà pour l'idée. Seulement, pour éviter une construction par récurrence un peu fastidieuse (notamment concernant la justification propre que la construction se termine), je vais plutôt faire un raisonnement par l'absurde qui, à défaut d'être constructif comme ci-dessus, sera plus direct : supposons qu'il existe des sous-espaces vectoriels E de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stables par Ω et de dimension *impaire* ; parmi ces sous-espaces vectoriels, on en choisit un de la plus grande dimension possible. Comme $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension paire, on a nécessairement $E \neq \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, donc il existe $Z \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$, et d'après la question 30 les sous-espaces E et $P_Z = \mathrm{Vect}(Z, \Omega(Z))$ sont en somme directe. Par conséquent, $E' = E \oplus P_Z$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω (parce que E et P_Z le sont), de dimension $\dim(E) + 2$, qui est impaire puisque $\dim(E)$ l'est, et strictement supérieure à $\dim(E)$: cela contredit la maximalité de la dimension de E. Par l'absurde, il n'existe donc pas de sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et de dimension impaire. Or F_λ est stable par Ω, donc il doit être de dimension paire : d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Obtenir le résultat voulu par la première idée que je développe, notamment pour comprendre l'aspect « fastidieux » évoqué et que j'ai voulu éviter.

— Vérifier qu'une somme directe de deux sous-espaces stables est effectivement stable.

— En se souvenant de la démonstration du principe de récurrence, comprendre qu'en fait mon raisonnement par l'absurde EST un raisonnement par récurrence déguisé ; songer qu'une telle façon de procéder permet d'éviter certaines récurrences parfois longuettes à bien rédiger (je fais mention de ce lien entre raisonnement par l'absurde sur un élément maximal et le raisonnement par récurrence dans le corrigé du devoir des vacances d'été).

— Est-ce que F_λ lui-même admet une base de la forme $(Z_i, \Omega(Z_i))_i$? À quoi vous ferait penser une telle base ?

33. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres *réelles* de A_0, et $\mu_1, \overline{\mu_1}, \dots, \mu_\ell, \overline{\mu_\ell}$ les valeurs propres complexes non réelles de A_0. On sait que le déterminant d'une matrice à coefficients complexes est égal au produit de ses valeurs propres, comptées autant de fois que leurs ordres de multiplicité :

$$\det(A_0) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A_0)} \lambda^{\alpha_\lambda} = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{\alpha_{\lambda_i}} \times \prod_{i=1}^{\ell} \mu_i^{\alpha_{\mu_i}} \times \prod_{i=1}^{\ell} \overline{\mu_i}^{\alpha_{\overline{\mu_i}}}.$$

Or, comme on l'a vu dans la question 31, des valeurs propres conjuguées ont des ordres de multiplicité égaux. Donc : $\forall i \in [\![1, \ell]\!]$, $\alpha_{\overline{\mu_i}} = \alpha_{\mu_i}$. De plus, on sait que l'on a $\alpha_{\lambda_i} = \dim(F_{\lambda_i})$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, et d'après la question précédente cette dimension est toujours paire : pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il existe donc $k_i \in \mathbb{N}$ tel que : $\dim(F_{\lambda_i}) = 2k_i$. On déduit de tout ce qui précède :

$$\det(A_0) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{2k_i} \times \prod_{i=1}^{\ell} (\mu_i \overline{\mu_i})^{\alpha_{\mu_i}} = \prod_{i=1}^{k} \left(\lambda_i^{k_i}\right)^2 \times \prod_{i=1}^{\ell} |\mu_i|^{2\alpha_{\mu_i}} \in \mathbb{R}_+$$

en tant que produit de réels positifs (un réel au carré est en effet positif) : d'où le résultat.