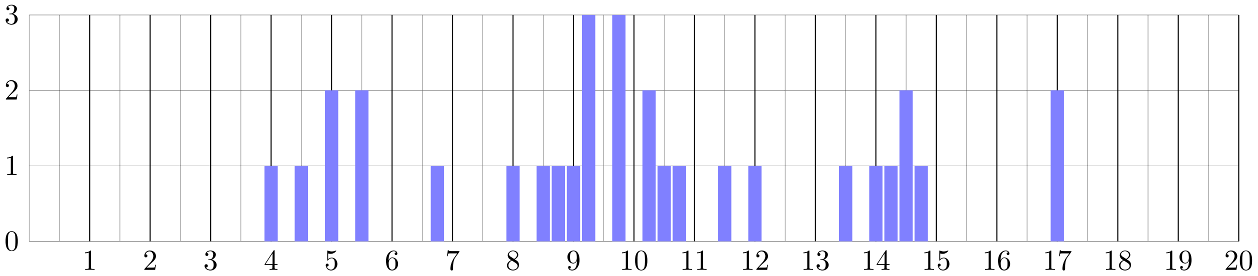
Devoir sur table n° 4 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **122 points**.

Moyenne : 10,07. **Écart-type :** 3,62.

Premier quartile : 8,25. **Médiane :** 9,75. **Troisième quartile :** 12,75.

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Il ne fait pas sérieux d'adultérer les termes définis par l'énoncé. On parle de corps de nombreS (pluriel).
2. On n'écrit pas : « soit $(x, y) \in A^2$ tels que... » Un *couple*, c'est au singulier.

Imprécisions mathématiques.

3. Dans de nombreux raisonnements *corrects* impliquant l'existence d'un polynôme annulateur non nul ou d'une relation de dépendance linéaire non triviale, vous oubliez l'essentiel : préciser que le polynôme introduit est NON NUL ou les scalaires de la relation de dépendance linéaire NON TOUS NULS.
4. Lorsqu'on veut seulement montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie, sans se soucier de la valeur exacte de la dimension, il suffit de trouver une *famille génératrice* finie ou de l'inclure dans un espace vectoriel qu'on sait être de dimension finie. Ainsi l'inclusion $\mathbb{Q}[\zeta] \subseteq \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (\zeta^i)_{0\leqslant i\leqslant d}$ suffisait pour conclure : nul besoin de vérifier l'inclusion réciproque, ni la liberté de $\mathcal{B}$.
5. L'énoncé introduisait une notation de commodité pour les racines carrées de nombres négatifs (et qui est presque sans dommage lorsqu'on raisonne dans un cadre purement algébrique), pour laquelle l'identité $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ est en général fausse : observer ce que donnerait l'identité $\sqrt{(-1)^2} = \left(\sqrt{-1}\right)^2$. Cependant le passage de $D = r^2D'$ à $\sqrt{D} = \sqrt{r^2D'} = \pm r\sqrt{D'}$ a rarement soulevé des interrogations.
6. Quelques copies ont travaillé avec les éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ sous la forme $P(\sqrt{D})$, au lieu de se contenter d'observer que tous ses éléments sont sous la forme $a + b\sqrt{D}$ (c'était admis par l'énoncé, mais on le démontre aisément en effectuant la division euclidienne de tout polynôme P par $X^2 - D$).
7. Peu d'élèves ont remarqué que ϕ est un morphisme de groupes, et que son injectivité pouvait s'étudier *via* le noyau (cela ne provoquait qu'un alourdissement de la rédaction et non un problème mathématique).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

8. J'ai plusieurs fois vu la preuve suivante que si $\mathbb{Q}[\zeta]$ est un corps de nombres, alors ζ est algébrique sur $\mathbb{Q}$: « comme $0 \in \mathbb{Q}[\zeta]$, il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que : $P(\zeta) = 0$ et donc ζ est algébrique ». Raisonnement faux puisque P peut être le polynôme nul. Notez bien que ce raisonnement n'utilise pas du tout le fait que $\mathbb{Q}[\zeta]$ soit un corps, ni qu'il soit de dimension finie : il n'a donc aucune chance de marcher.
9. Pour certains élèves, il va de soi que $\mathbb{Q}[\zeta]$ est toujours un sous-corps de $\mathbb{C}$. Non : $\frac{1}{P(\zeta)}$, qui existe effectivement dans $\mathbb{C}$ si $P(\zeta) \neq 0$, n'a en général aucune raison de s'écrire sous la forme $Q(\zeta)$ avec $Q \in \mathbb{Q}[X]$, et même le cas $\zeta = \sqrt{D}$ nécessite un petit raisonnement pour y parvenir par le calcul (multiplication par le conjugué). Pour $\zeta = \sqrt[3]{2}$, vous rencontrerez quelques difficultés au moment de mettre $\frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2 - 3\sqrt[3]{2} + 1}$ sous la forme $Q(\sqrt[3]{2}) \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ par des manipulations analogues, et pour $\zeta = \pi$ vous n'y parviendrez pas. Il y avait donc un argument non trivial à invoquer.
10. La dimension d'un espace vectoriel majore le cardinal des familles libres et minore le cardinal des familles génératrices. Il n'y a en revanche AUCUN lien entre dimension et cardinal d'une famille liée : peu importe l'espace vectoriel E, considérer la famille $(\vec{0})$ pour un exemple petit et $\left(\vec{0}\right)_{n\in\mathbb{R}}$ pour un exemple grand. Montrer que $(\zeta^i)_{0\leqslant i\leqslant d}$ était liée pour un certain entier d ne prouvait rien sur la dimension de $\mathbb{Q}[\zeta]$.

11. Beaucoup considèrent comme allant de soi qu'un morphisme de *corps* est aussi une application linéaire ($\mathbb{Q}$-linéaire dans ce sujet). Ce n'est pourtant pas dans la définition et il fallait le démontrer, quitte à ce que l'étape : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n$, soit brève (il suffit de dire que f et Id sont aussi des morphismes de groupes, prenant la même valeur en 1 puisque $f(1) = 1$, et qu'ils coïncident donc sur $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$).
12. Les sommes indexées par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ont rencontré très peu de succès. Il s'agissait à chaque fois de se ramener à une somme géométrique (c'est la présence d'une puissance de $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ qui y incitait) *via* une bijection convenable.

    Souvenez-vous que les groupes finis ont « beaucoup » de bijections compatibles avec la loi de groupe et permettant moult simplifications : $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto x+y$, $x \mapsto xy$, $x \mapsto (ax+b)(cx+d)^{-1}$ plus généralement, etc. Pour de nombreux exemples, allez voir la référence *Sommes, produits sur un groupe fini* dans mon regroupement thématique des exercices (chapitres III et IV).
13. Lorsqu'il fallait montrer que $\phi : (x \bmod q, y \bmod p) \mapsto xp + yq \bmod pq$ était bien définie, beaucoup n'ont pas compris ce qui était attendu : est-ce que l'image dépend du représentant choisi dans les classes $x \bmod q$ et $y \bmod p$?

    Cette vérification est importante : si $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est l'application $x \bmod 2 \mapsto x$, on devrait avoir $f(0 \bmod 2) = f(2 \bmod 2)$ (vu que 0 et 2 représentent la même classe), ce qui n'est visiblement pas le cas au vu de la définition de f !

    Autre exemple : si vous définissez la fonction Argument $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ comme : $z \mapsto \theta_z$, où θ_z est un réel tel que : $z = |z|e^{i\theta_z}$, il y a plusieurs images possibles pour un même z puisqu'une infinité de réels θ_z vérifient cette égalité, et on ne sait pas comment calculer l'image de -1 (obtient-on $-\pi$? π ? 3π ?). Pour une infinité d'autres exemples problématiques, il suffit d'essayer de construire une « bijection réciproque » d'une fonction qui est surjective sans être injective.

    Cette question se pose souvent lorsqu'une fonction est définie par une correspondance où chaque image n'est pas définie exactement comme une fonction de la variable de départ (ainsi, ci-dessus, l'image par ϕ de $(x \bmod q, y \bmod p)$ ne s'exprime pas exactement en fonction de $x \bmod q$ ni de $y \bmod p$), mais d'une autre quantité construite à partir de cette variable, et dont la construction fait intervenir un choix *a priori* arbitraire. C'est typiquement le cas lorsqu'on a un ensemble quotient au départ, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans la majorité des situations rencontrées en classes préparatoires, puisqu'une classe modulo n a une infinité de représentants possibles.

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— deuxième partie : questions 7 et 10 ;

— troisième partie : questions 13, 15 à 17 (à reprendre aussi après avoir vu le chapitre de réduction) ;

— quatrième partie : questions 22 et 27.