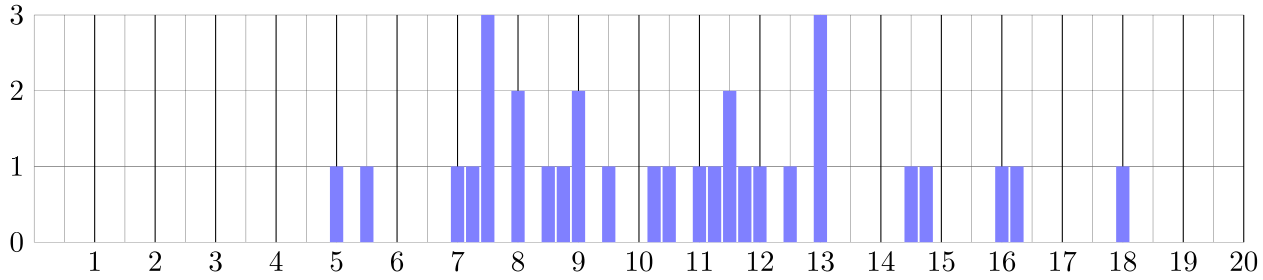
Devoir sur table n° 3 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **79 points**.

Moyenne : 10,60. **Écart-type :** 3,23.

Premier quartile : 8. **Médiane :** 10,5. **Troisième quartile :** 12,75.

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Faites attention à l'orthographe, la grammaire et la syntaxe (j'ai trop souvent lu : « un sous-groupe strictE »...), n'utilisez pas d'abréviations (« tq »...).
2. Détailler le calcul d'un produit matriciel de deux matrices d'ordre 2 est inutile : il ne sera pas lu. Si vous avez déjà effectué le calcul au brouillon, au propre mettez directement le résultat.

   Cela vaut pour tous les calculs matriciels dépourvus de raisonnement.

Imprécisions mathématiques.

3. Pour montrer qu'un ensemble est un (sous-)espace vectoriel, vous gagnerez un temps considérable si vous remarquez un sous-espace vectoriel « usuel » : un noyau, une image, ou un « Vect ». Lorsque vous montrez que c'est l'image d'une application linéaire injective, vous avez en prime une base gratuitement (en prenant l'image d'une base de l'espace de départ). Soyez efficaces.

   De même pour les groupes, anneaux et idéaux.
4. Dans la même veine que le commentaire ci-dessus : il y a un manque de réflexes algébriques pour vous dispenser de calculs (les théorèmes sont pourtant là pour ça). Par exemple : sachant que $I^4 = E$, il ne sert strictement à rien de calculer I^3 en vue d'avoir son ordre : il doit diviser 4.

   Problème analogue, lorsque vous vouliez montrer qu'un sous-groupe contenant I et J (par exemple) est le groupe tout entier : utiliser le cas particulier au programme du théorème de Lagrange (l'ordre de I divise le cardinal d'un groupe qui le contient) assure qu'un tel sous-groupe est de cardinal 4 ou 8 : il suffit de justifier qu'il a au moins cinq éléments pour conclure (et c'est le cas, vu qu'il contient $\langle I\rangle \cup \{J\}$). Vos raisonnements « à la main », s'interdisant le recours à la théorie, furent souvent laborieux.
5. Troisième illustration du même manque de réflexes algébriques : après avoir démontré avec succès que $\mathrm{N}(ZZ')E = ZZ^*$, au lieu de vous dire : « N est un produit de fonctions multiplicatives $Z \mapsto Z$ et $Z \mapsto Z^*$, ce qui devrait être très pratique pour montrer que N est multiplicative ! », vous préférez passer par un calcul affreux faisant apparaître huit ou seize termes selon la façon de s'y prendre.

   Notez bien que pour montrer que le module $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est multiplicatif, on raisonne comme pour N ici : grâce à l'expression $|z|^2 = z\bar{z}$, qui permet d'écrire $|\cdot|^2$ comme produit de deux fonctions multiplicatives. Ce n'est pas une idée neuve.
6. Enfin, songez à raisonner sur une base plutôt que sur tout élément de l'espace, pour alléger vos calculs (je pense ici à la caractérisation des éléments du centre de $\mathbb{H}$: vouloir résoudre $ZZ' = Z'Z$ en prenant Z' quelconque donnait souvent des calculs à rallonge).
7. Lorsque vous avez seulement besoin de l'égalité : $\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(\ker(f))\mathrm{card}(\mathrm{im}(f))$, et non de l'isomorphisme entre $G/\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$, vous pouvez aller beaucoup plus vite en écrivant : $G = \bigsqcup_{y\in\mathrm{im}(f)} f^{-1}(\{y\})$, et en comparant les cardinaux.
8. Dans un anneau non commutatif, il n'est pas toujours vrai qu'un inverse à droite est aussi un inverse à gauche (prendre par exemple l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $n \mapsto \max(n-1, 0)$, qui admet $n \mapsto n+1$ comme inverse à droite dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, mais elle n'en admet pas à gauche puisqu'elle n'est pas injective). Dans $\mathrm{M}_n(K)$ c'est vrai (conséquence du théorème du rang), mais il fallait indiquer cette subtilité.

9. Après avoir démontré que $\mathrm{card}(\mathrm{im}(f)) = \frac{p-1}{2}$, à quoi sert-il de justifier que $\frac{p-1}{2}$ est entier en invoquant la parité de $p-1$? Le fait que ce soit égal à un cardinal suffit à le démontrer.
10. Beaucoup d'élèves n'ont *rien* compris à l'intérêt de raisonner modulo un entier. Pour calculer $\overline{p-1}^2$, il suffit de calculer $\overline{-1}^2$, puisque $\bar{p} = \bar{0}$ (aucun intérêt de développer $(p-1)^2$ pour *ensuite* simplifier modulo p). De même lorsqu'il s'agissait de calculer $\sum\limits_{i=1}^{4} y_i^2$ modulo m_0 : remplacer y_i par $x_i - b_i m_0$, développer les carrés, regrouper les multiples de m_0 et *enfin* raisonner modulo m_0, était une perte de temps délirante !
11. Après avoir démontré : $T^2 = \mathrm{id}$, pensez à dire que T est LINÉAIRE (sauf si c'est évident vu le contexte) pour en déduire que c'est une symétrie.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

12. Démontrez les théorèmes hors programme que vous utilisez.
13. Les questions demandent parfois de démontrer plusieurs choses. Attention à ne pas les lire trop vite, ou à ne pas oublier la seconde partie de la question après avoir passé beaucoup de temps à traiter la première.
14. Accordez un soin particulier à la lecture du sujet et des notations introduites. Il me paraît inadmissible qu'un quart de la classe lise mal la définition de A^*, ne remarquant pas que son coefficient (i,j) est $\overline{a_{j,i}}$ et non $\overline{a_{i,j}}$. Cela a sapé le traitement de plusieurs questions pourtant faciles.
15. Beaucoup trop d'élèves ont utilisé à tort le fait que $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ soit de dimension 4, pour en déduire que $\mathbb{H}$ l'est aussi (ne remarquant pas que si c'était vrai, on aurait : $\mathbb{H} = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, ce qui est rapidement contredit). On voulait démontrer $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel RÉEL de dimension 4, or 4 est la dimension de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ comme espace vectoriel COMPLEXE. Sa dimension en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel égale 8.
16. Il faut bien avoir conscience que ce qui est valable dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est en général pas valable dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (sauf pour n premier où la seule bizarrerie restante est le fait que $\bar{n} = \bar{0}$), du fait que ce dernier anneau ne soit pas un anneau intègre (ni un corps, donc), qu'il possède des éléments nilpotents, etc.

    Ainsi, deux subtilités n'ont pas toujours été vues : d'une part, le fait que l'égalité $\bar{1} = -\bar{1}$ soit possible (modulo 2), ce qui justifiait que le sujet se borne à raisonner modulo un nombre premier IMPAIR ; d'autre part, le fait que $\bar{x}^2 = \bar{1}$ n'ait pas toujours pour solutions $\bar{1}$ et $-\bar{1}$ (c'est cependant vrai modulo un nombre premier, et il fallait ici comprendre pourquoi). Il y a en effet quatre solutions à cette équation dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (et plus généralement dans $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ pour tout $k \geqslant 3$, ce qui n'est pas trivial).

    Lorsque, en revanche, tout se passe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, c'est une situation remarquable qu'il convient de savoir justifier.
17. Lorsqu'il faut construire un morphisme d'anneaux (dans ce sujet : de $\mathbb{R}$-algèbres), on utilise presque toujours le fait qu'un morphisme d'anneaux préserve les solutions aux équations polynomiales, afin de déterminer les images des « générateurs » de l'anneau (ou algèbre) : si $\sum\limits_{i=0}^{d} a_i x^i = 0_A$, alors $\sum\limits_{i=0}^{d} f(a_i) f(x)^i = 0_B$ (souvent, f est K-linéaire et les coefficients a_i appartiennent à K, donc l'équation vérifiée par x et $f(x)$ est *vraiment* la même). Cela vous permet en particulier de comprendre qu'une application $f : \mathbb{R} + \mathbb{R}x \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = i$ n'a AUCUNE CHANCE d'être un morphisme d'anneaux : x et i ne sont pas solutions de la même équation polynomiale *a priori*, il ne sert donc à rien d'essayer de vérifier que f convient !

    L'objectif, pour définir f convenablement, était donc de d'abord trouver une racine carrée de -1 dans $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$: c'est un candidat naturel à l'image réciproque de i.
18. Après avoir démontré : $T^2 = \mathrm{id}$, rares sont les élèves reconnaissant une symétrie. Pas grave : on pouvait retrouver la décomposition $A = \ker(T - \mathrm{id}) \oplus \ker(T + \mathrm{id})$, mais il y eut un manque criant de méthodologie (écrire explicitement tout $x \in A$ comme somme $u + v$ d'éléments de ces deux noyaux *via* une analyse-synthèse, et en ne perdant pas de vue qu'il faut bien deux équations indépendantes puisqu'il y a deux inconnues u et v : prendre l'image par T dans l'égalité $x = u + v$ pour avoir la seconde équation).

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— DEUXIÈME PARTIE : questions 10 et 12 ;

— TROISIÈME PARTIE : questions 20 et 21.

Le corrigé de la question 16 comporte une erreur. Elle est rectifiée dans la version en ligne. J'en ai profité pour affiner la résolution d'autres questions.

L'énoncé comportait aussi une légère erreur (présente dans votre cours : pensez à la rectifier). Une sous-K-algèbre de A est un sous-K-espace vectoriel de A stable par produit ET CONTENANT L'ÉLÉMENT 1_A.