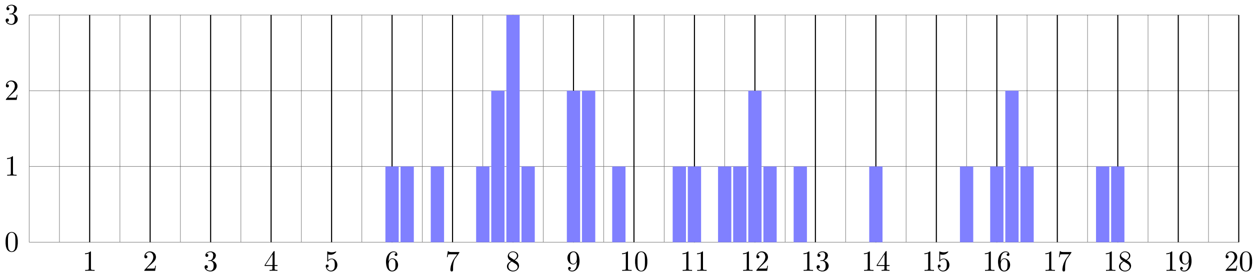
Devoir sur table n° 2 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **102 points**.
Moyenne : 11,12. **Écart-type :** 3,61.
Premier quartile : 8. **Médiane :** 10,75. **Troisième quartile :** 13,38.

Redite des devoirs précédents.

1. On ne mélange pas le langage ordinaire (en français) et le langage mathématique. Les phrases du type : « Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a... » (avec $\forall$ au lieu de « pour tout ») sont à éviter.

L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu (programme officiel).

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

2. Lorsque l'énoncé admet des résultats, exploitez-les pour alléger vos raisonnements. Trop d'élèves redémontrent (sans doute sans le remarquer, bien souvent) que Γ est effectivement définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Imprécisions mathématiques.

3. Lorsqu'on effectue une intégration par parties avec une intégrale impropre, on vérifie l'existence du terme entre crochets AVANT d'appliquer la formule (qui est fausse dans le cas contraire).
4. Beaucoup d'élèves semblent ignorer la règle de D'Alembert.
5. Le passage de : « $\lim\limits_{x\to 1^-} \bigstar = \Gamma(\alpha)$ » à : « $\bigstar \underset{x\to 1^-}{\sim} \Gamma(\alpha)$ », nécessite la mention que $\Gamma(\alpha) \neq 0$. Problème analogue avec l'équivalent $\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} \underset{t\to x}{\sim} \frac{f(x)}{(x-t)^\alpha}$.
6. Lorsque la monotonie de la fonction de changement de variable dans une intégrale n'est pas triviale, justifiez-la brièvement.
7. Lors du passage de : « ψ' bornée » à « ψ lipschitzienne », l'inégalité des accroissements finis est rarement mentionnée. D'ailleurs, certains élèves pensent que toute application continue (ou bornée) est lipschitzienne.
8. Lorsqu'on intègre $t \mapsto t-\alpha$ entre α et $\bigstar$, le choix de primitive $t \mapsto t^2/2 - \alpha t$ est rarement avisé. Choisir $t \mapsto \frac{(t-\alpha)^2}{2}$ permet d'avoir l'annulation en α.
9. Pourquoi dites-vous si souvent que $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $]0,x[$ au lieu de $[0,x[$? Certains font une étude totalement inutile en 0 et feraient mieux de regarder de près, *pour de vrai*, le domaine de continuité.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

10. Il faut mentionner la continuité sur l'intervalle d'intégration lorsqu'on étudie une intégrabilité !
11. L'application du théorème de convergence dominée à la suite $\left(f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}{}_{]0,n]}(t)\right)_{n\geqslant 1}$ fut très souvent mal faite. Trois problèmes fréquemment rencontrés : 1° aucune distinction de cas n'est faite selon que $t > n$ ou $t \leqslant n$ (l'indicatrice est là pour faire joli ?), 2° la convergence simple est rarement justifiée ou bien justifiée (notamment, on ne passe pas aux équivalents dans les fonctions, et cette subtilité fut ignorée), 3° écrire $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)$ nécessite que le logarithme existe, et donc que $t < n$.
12. Le contraire de « ϕ est positive sur I » n'est pas « ϕ est strictement négative sur I », attention ! Pour contredire un énoncé universel, il suffit d'un seul contre-exemple : il existe $t_0 \in I$ tel que $\phi(t_0) < 0$.

13. Acquérir le sens de l'analyse commence par une inspection des « termes proches » dans les majorations. Lorsqu'on compare $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\psi\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t$, il devrait être clair que $\psi(t) - \psi\left(\frac{k}{n}\right)$ n'a en général aucune raison d'être petit, et que majorer cette différence pour $t \in [0, 1]$ ne va rien donner d'intéressant... au contraire de ce qu'il se passe si $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.

    Dans la même veine, majorer $t - \frac{k}{n}$ (qui est proche de 0 pour t proche de $\frac{k}{n}$) par t (qui peut être proche de 1, donc grand, par exemple si $k \approx n$) est une idée épouvantable. Qualitativement, on est *certain* que cela ne peut pas donner une bonne majoration.

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— PREMIÈRE PARTIE : questions 2 et 4 ;

— DEUXIÈME PARTIE : question 8 ;

— TROISIÈME PARTIE : questions 20 à 22 ;

— QUATRIÈME PARTIE : questions 33 à 37.