Devoir sur table n° 2

(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Ce devoir est une adaptation du sujet de Mathématiques I du Concours Centrale-Supélec (on pouvait s'en douter, vu le nombre de questions !), année 2009, filière MP. J'ai simplement enlevé une erreur d'énoncé, changé la formulation de certaines questions de la dernière partie pour y enlever toute notion topologique (il y était question d'endomorphismes *continus*), et rajouté deux questions dans la première partie permettant de m'assurer que je pourrai tous vous évaluer sur l'utilisation des théorèmes d'interversion du chapitre d'intégration (il y a d'autres questions qui le permettent, mais elles sont reléguées plus loin dans le sujet).

Une bonne partie du sujet est sur les intégrales eulériennes, à savoir la **fonction** Γ (déjà bien étudiée en cours et en travaux dirigés) et la **fonction** $\mathrm{B} : (x,y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$. Outre les propriétés déjà connues et rappelées dans l'énoncé, on démontre ces deux relations :

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)},$$

qui sont deux des trois formules les plus importantes impliquant la fonction Γ et non vues ensemble (la dernière étant le produit de Weierstraß de la fonction Γ). La seconde formule est appelée **formule des compléments**. Elle est parfois employée lorsqu'on écrit l'équation fonctionnelle de la fonction ζ.

Il est bon d'avoir vu au moins une démonstration d'une de ces deux formules dans sa vie de préparationnaire ! Il en existe de nombreuses autres. La première passe souvent par une approximation de Γ par des fonctions puissances (ou des intégrales de fonctions puissances), ce qui est plutôt bien vu puisque $\mathrm{B}(x,y)$ est une intégrale de produit de fonctions puissances.

J'ai voulu me faire plaisir en rajoutant une question où l'on obtient le **produit de Weierstraß** du sinus :

$$\sin(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{k\pi}\right)\left(1+\frac{x}{k\pi}\right) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Identité amusante, que l'on aurait obtenue immédiatement si l'on avait été en droit de factoriser le « polynôme de degré infini » $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ à l'aide de ses racines. **Le théorème de préparation de Weierstraß**, très largement au-dessus du programme des classes préparatoires, nous explique comment factoriser plus généralement des fonctions *holomorphes*.

Je voulais initialement vous la faire utiliser afin de reproduire, en termes rigoureux, la démonstration originale de l'identité : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, obtenue grâce aux relations coefficients-racines dans le sinus vu comme « polynôme de degré infini ». Mais en voulant rendre une telle démonstration rigoureuse, et dans les clous du programme, et accessible à ce stade de l'année, il fallait poser un problème d'interversion proprement. Il aurait allongé le sujet (avec un peu plus de temps, j'aurais peut-être pu trouver une démonstration plus efficace) et l'aurait détourné de sa préoccupation première. J'ai donc laissé tomber, à regret. J'explique néanmoins dans les grandes lignes comment faire, à la fin de la troisième partie.

L'opérateur d'Abel. C'était la motivation première du sujet : introduire un opérateur qui généralise la notion de primitive (pour la dérivée c'est plus compliqué, et le sujet ne veut donc pas en parler ; voir le sujet

X-ENS de PSI, année 2021, pour voir ce qu'il en est). C'est-à-dire : de la même manière qu'on peut intégrer une fonction continue une, deux, etc., n fois, avec n entier, de sorte qu'on puisse parler de ses primitives d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}$: y aurait-il un sens de parler de primitive d'ordre α avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$? On peut avoir d'autres exigences, par exemple : en intégrant « à moitié » deux fois, on obtient une primitive d'ordre 1 (donc une primitive « tout court »). On parle d'**intégrale fractionnaire** pour ce type de généralisation.

D'habitude, le nom associé à ces intégrales est Cauchy, ou Riemann, ou Liouville... Je ne sais pas pourquoi le sujet parle d'Abel. Bref.

Pour prolonger une fonction, un opérateur, etc., il y a deux idées qui reviennent souvent : 1° la densité (mais ce n'est pas ce qui sert ici, puisque $\mathbb{N}$ n'est certainement pas dense dans $\mathbb{R}_+$), 2° montrer que la fonction f à prolonger est égale à une fonction g qui, elle, est définie sur un domaine plus grand. C'est ainsi notamment que la fonction Γ permet de prolonger toutes sortes d'identités faisant intervenir des factorielles, coefficients binomiaux, etc. Exemple simple : si l'on note $I : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f\right)$ l'application linéaire qui, à une fonction, associe son unique primitive s'annulant en 0, alors on a facilement : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $I^n(x \mapsto x^k)(x) = \dfrac{x^{k+n}}{(k+1)\cdots(k+n)} = \dfrac{k!}{(k+n)!}x^{k+n}$. Le membre de droite de cette égalité est prolongeable sur $\mathbb{R}_+$ grâce à la fonction Γ. Plus précisément :

$$I^n(x \mapsto x^k)(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n+1)}x^{k+n}.$$

Il est donc tentant de définir $I^\alpha(x \mapsto x^k)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, comme étant égal à $x \mapsto \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^{k+\alpha}$, et on étend ensuite la définition à toute application polynomiale par linéarité. Si I^α est (uniformément) continue, en un sens qui vous est pour le moment obscur, cela permet même de définir cette application linéaire sur l'espace des fonctions continues sur un segment par densité : voir un exercice du chapitre préliminaire.

Le prolongement choisi par le sujet suit une idée proche mais différente, qui permet de directement définir I^α en toute fonction continue sur $[0,1]$. En effet, une récurrence permet de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall f \in \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \forall x \in [0,1], \quad I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

En remplaçant n par un réel α, on obtient une généralisation des primitives. Remarquer une légère différence avec le choix du sujet, même si elle ne change pas grand'chose (on s'y ramène aisément).

L'objectif principal de la quatrième partie est de montrer que la composition se « comporte comme on pense ». Notamment, on aimerait intuitivement avoir, comme pour des exposants entiers : $I^\alpha \circ I^\beta = I^{\alpha+\beta}$, et on démontre (par densité comme ce fut dit plus haut) que c'est vrai pour $\beta = 1-\alpha$, à une constante près : $I^\alpha \circ I^{1-\alpha} = I$ (qui est appelé P comme « primitive » dans le sujet).

Certains efforts sont également menés pour montrer : $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$. Je ne suis pas certain de l'intention derrière le concepteur du sujet, lorsqu'il fait démontrer cette identité. L'analyste spectral pourrait interpréter cette inversibilité en disant que A_α n'admet pas de valeur spectrale, mais vous ne savez pas (et ne le saurez pas davantage cette année) ce que c'est. Je pense qu'il voulait simplement tester la capacité du candidat à démontrer une convergence de série de fonctions, ou lui faire généraliser une identité qu'il a pu croiser ailleurs. On verra en effet des identités analogues cette année. Notamment, que pour toute matrice A « assez petite » ou nilpotente, on a : $(\mathrm{I}_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$, où pour le moment le sens de cette somme reste mystérieux pour vous. Il y a des identités analogues en d'autres circonstances, par exemple dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour calculer l'inverse de $\bar{1} - \bar{k}$ avec $\bar{k}$ nilpotent. Je parle de l'intérêt de ces généralisations dans ma *Présentation des chapitres de MP*, et de la raison pour laquelle elles sont souvent possibles.

Néanmoins je parle de cette identité pour vous soumettre une petite curiosité. Puisque A_α est une généralisation de l'opérateur primitive I, est-ce que cela voudrait dire que I vérifie une identité analogue ? Vous savez intégrer depuis un certain temps, et pourtant vous n'avez jamais rien manipulé de tel que $(\mathrm{Id} - I)^{-1}$, et l'intérêt ne doit pas vous paraître flagrant... Pour en comprendre l'intérêt, je vous laisse méditer sur cette « démonstration » non rigoureuse que l'équation différentielle $y' = y$, avec la condition initiale $y(0) = 1$, admet une unique solution (et que cette solution est l'exponentielle : cela peut servir de définition). Après intégration, l'équation précédente équivaut à : $y = 1 + \int y$. Et donc : $(\mathrm{Id} - I)\, y = 1$ (le membre de droite est la fonction constante égale à 1). On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{\mathrm{Id} - I} 1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I^n(1)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Techniques mobilisées dans ce problème. Vous avez eu :

— plusieurs **intégrales à paramètres** dont la **continuité** fut à démontrer (la fonction Γ, puis $\alpha \mapsto \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha)$, mais aussi $A_\alpha f$) ;

— une application du **théorème de convergence dominée** pour obtenir la formule de Gauß vérifiée par la fonction Γ ;

— deux approximations par des **sommes de Riemann**, dans deux situations très distinctes : la première avec une intégrale sur $\mathbb{R}_+$, et la seconde dans le cas d'une fonction de classe C^1 (pour laquelle on veut donc améliorer le terme d'erreur $\underset{n\to+\infty}{o}(1)$ entre la somme de Riemann et l'intégrale : on obtient du $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$) ;

— deux **raisonnements par densité** (dans $\mathbb{R}$ puis avec le théorème d'approximation de Weierstraß), qui se rajoutent aux deux raisonnements du DS n° 1 : vous avez maintenant de quoi prendre de la hauteur sur cette approche !

— en fin de problème, plusieurs raisonnements du type « $(\spadesuit)_n$ CVU $\Longrightarrow$ $(\clubsuit)_n$ CVU (ou CVS) », *via* des arguments que vous interpréterez plus tard comme des arguments de continuité sur un espace de fonctions.

Le reste était moins nouveau. Il y eut de nombreux calculs plutôt banals avec des intégrales (intégration par parties, formule du changement de variable)... Mais le fait d'avoir eu des exercices plutôt théoriques et difficiles cette année, ne doit pas vous faire occulter la pratique calculatoire. Si vous avez coincé sur ces questions, une révision est attendue.

Ce qu'on retiendra en bref. Continuité des intégrales à paramètres. Lien entre les fonctions Γ et B, formule des compléments. Produit de Weierstraß du sinus. Approximations par des sommes de Riemann : cas d'une intégrale sur une demi-droite, et d'une somme de Riemann de fonction de classe C^1. Raisonnements par densité dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Importance de la continuité dans ces raisonnements.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1 et 4 ;

— DEUXIÈME PARTIE : questions 5 et 10 ;

— TROISIÈME PARTIE : questions 12 à 13.(c), question 16, question 18, questions 20 et 21 ;

— QUATRIÈME PARTIE : questions 24 et 27, questions 36 et 37.

2 Corrigé

Première partie

1. Posons : $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto f(x,t)$ est *continue*, positive et non identiquement nulle sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, par positivité et propriété de séparation de l'intégrale : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t > 0$. Montrons à présent que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ grâce au théorème de continuité sous le signe intégrale :
   - pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$;
   - pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;
   - pour tout segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$|f(x,t)| \leqslant \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1, \\ t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leqslant 1, \end{cases} \qquad \text{(hypothèse de domination)}$$
   et il reste à montrer que l'application :
   $$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geqslant 1, \\ t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leqslant 1, \end{cases} \end{cases}$$
   manifestement continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$, est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: comme l'énoncé rappelle que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, en particulier $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et donc aussi au voisinage de 0 et $+\infty$. Pour $x = a$ et $x = b$, cela donne l'intégrabilité de $t \mapsto t^{b-1}e^{-t}$ sur $[1,+\infty[$ et celle de $t \mapsto t^{a-1}e^{-t}$ sur $]0,1]$: d'où le résultat, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (nous vous renvoyons à votre cours si vous voulez plus de détails).

   D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où le résultat.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Bien comprendre la nécessité de se ramener à un segment : qu'est-ce qui coince si on ne le fait pas ? Comprendre aussi le choix des majorations de t^{x-1} selon que $t \geqslant 1$ ou $t \leqslant 1$: pourquoi donc ?

2. On a, d'après les rappels de l'énoncé : $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Comme Γ est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$, d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]1,2[$ tel que : $\Gamma'(c) = 0$.

   De plus, pour tout $x > 0$ on a : $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$. C'est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, donc : $\forall x > 0,\ \Gamma''(x) > 0$. Donc Γ' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. On en déduit que Γ' est strictement positive sur $]c,+\infty[$ et Γ strictement croissante sur cet intervalle, donc à plus forte raison sur $[2,+\infty[$: d'où le résultat.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Pourquoi ne montre-t-on pas que Γ' est positive strictement par une minoration de l'intégrale $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$?

3. Comme $(\Gamma(n))_{n\geqslant 1} = ((n-1)!)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ et que Γ est croissante au voisinage de $+\infty$, la fonction Γ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On peut donc limiter l'étude à $\gamma > 1$, le cas $\gamma \leqslant 1$ étant trivial (dans ce cas γ^x tend vers 0 ou 1 quand $x \to +\infty$, et est donc négligeable devant $\Gamma(x)$ qui tend vers l'infini).

   Soit $x \geqslant 2$. On a : $0 \leqslant \dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)} \leqslant \dfrac{\gamma^{\lfloor x \rfloor + 1}}{\Gamma(\lfloor x \rfloor)} = \gamma^2 \dfrac{\gamma^{\lfloor x \rfloor - 1}}{(\lfloor x \rfloor - 1)!}$. Comme la partie entière tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et que la quantité $\dfrac{\gamma^{\lfloor x \rfloor - 1}}{(\lfloor x \rfloor - 1)!}$ tend vers 0 par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\gamma^x}{\Gamma(x)} = 0$, c'est-à-dire : $\gamma^x \underset{x\to+\infty}{=} o(\Gamma(x))$. D'où le résultat.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Je parle de croissances comparées. C'est-à-dire ? Qu'est-ce que je compare ? Se convaincre de l'affirmation que $\frac{\gamma^{\lfloor x \rfloor - 1}}{(\lfloor x \rfloor - 1)!}$ converge vers 0. Ne pas passer par la formule de Stirling, c'est inutilement compliqué.

4. Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions :

$$\left(f_n : t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}{}_{]0,n]}(t)\right)_{n\geqslant 1}.$$

Étudions sa convergence simple. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a $t < n$ et donc : $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}e^{-t}$ (ainsi on n'a pas à se préoccuper du cas où $f_n(t)=0$) ; de plus :

$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\left(-\frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -t,$$

et donc, par continuité de l'exponentielle : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$. On en déduit :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t}t^{x-1},$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$.
Ainsi :

— pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'application f_n est manifestement continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$;

— la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$, qui est également continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$;

— pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $t\in]0,n[$, on a par concavité du logarithme : $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leqslant e^{n\cdot\left(-\frac{t}{n}\right)} = e^{-t}$, et pour tout $t\geqslant n$ on a bien sûr : $0\leqslant e^{-t}$, donc :

$$\forall (n,t)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}_+^*,\quad |f_n(t)|\leqslant e^{-t}t^{x-1}, \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après les rappels de l'énoncé.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \Gamma(x),$$

et comme $f_n(t)=0$ pour tout $t>n$, on a en vérité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t$, tandis que pour tout $t\leqslant n$ on a $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$. On peut donc réécrire ce passage à la limite ainsi :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t,$$

d'où la première égalité. Pour en déduire la seconde : soit $\ell\in\mathbb{N}$. Intégrons par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^\ell t^{x-1}\mathrm{d}t$, en dérivant $t\mapsto\left(1-\frac{t}{n}\right)^\ell$ et en intégrant $t\mapsto t^{x-1}$. Le terme entre crochets est bien défini, puisque : $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(1-\frac{t}{n}\right)^\ell\frac{t^x}{x} = 0$ (on a en effet $x>0$). Par la formule de l'intégration par parties :

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^\ell t^{x-1}\mathrm{d}t = \left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^\ell\frac{t^x}{x}\right]_0^n + \int_0^n\frac{\ell}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{\ell-1}t^x\mathrm{d}t = \frac{\ell}{nx}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{\ell-1}t^x\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Déduisons-en, par récurrence sur $\ell\in\mathbb{N}$, que la proposition suivante est vraie pour tout $\ell\in\mathbb{N}$:

$$\mathrm{P}_\ell : \text{« } \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^\ell t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{\ell!\,n^x}{\prod\limits_{k=0}^{\ell}(x+k)}.\text{ »}$$

Pour $\ell = 0$, c'est immédiat parce que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^n t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{n^x}{x} = \frac{0!n^x}{\prod_{k=0}^{0}(x+k)}$. Considérons donc $\ell \in \mathbb{N}$, et supposons P_ℓ. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la relation $(*)$:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{\ell+1} t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{\ell+1}{nx}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{\ell} t^{x}\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \frac{\ell+1}{nx}\frac{\ell!n^{x+1}}{\prod_{k=0}^{\ell}(x+1+k)} = \frac{(\ell+1)!n^x}{x\prod_{k=1}^{\ell+1}(x+k)} = \frac{(\ell+1)!n^x}{\prod_{k=0}^{\ell+1}(x+k)},$$

d'où $\mathrm{P}_{\ell+1}$.

Par principe de récurrence, on a P_ℓ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. En particulier, pour $\ell = n$, on a : $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$. Quand on prend la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} t^{x-1}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

Remarque. Cette dernière identité est la formule de Gauß.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Bien observer comment est pris en compte le cas $t > n$ dans l'étude de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ (c'est souvent négligé).
- Pourquoi prends-je $t \in]0, n[$ lorsque j'utilise la concavité du logarithme ?
- Aurait-on pu écrire : $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$? Si non, pourquoi ? Si oui, pourquoi ne l'ai-je pas fait ?
- Pourquoi ai-je procédé ainsi pour le calcul de l'intégrale $\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$? Pourquoi ai-je remplacé l'exposant n par ℓ ? Et pourquoi l'ai-je seulement fait dans l'exposant, tout en laissant $\frac{t}{n}$ comme il est ? Comment ai-je conjecturé la proposition P_ℓ ? Se convaincre que la réponse à toutes ces questions est naturelle.
- À quoi peut bien servir la formule de Gauß, par rapport à la forme intégrale de la fonction Γ ? Réponse pas facile, qui nécessite sans doute de l'avoir vue mise en œuvre quelques fois.

Deuxième partie

5. On raisonne par l'absurde. Supposons que ϕ n'est pas positive sur $[t_0, +\infty[$. Soit alors $t_1 \geqslant t_0$ tel que : $\phi(t_1) < 0$; par décroissance de ϕ, pour tout $t \in [t_1, +\infty[$ on a : $\phi(t) \leqslant \phi(t_1) \leqslant 0$, donc :
$$\int_{t_1}^{+\infty}|\phi(t)|\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t \geqslant -\int_{t_1}^{+\infty}\phi(t_1)\mathrm{d}t = +\infty,$$
donc ϕ n'est pas intégrable sur $[t_1, +\infty[$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Par l'absurde, on a montré que ϕ est positive sur $[t_0, +\infty[$.
Autre démonstration. L'application ϕ étant décroissante sur $[t_0, +\infty[$, elle admet une limite en $+\infty$; comme ϕ est intégrable au voisinage de $+\infty$, cette limite est nulle ; par décroissance, ϕ est positive sur $[t_0, +\infty[$.
6. Pour tout entier $n \geqslant \frac{t_0}{h} + 1$ et tout $t \in [(n-1)h, nh] \subseteq [t_0, +\infty[$, on a : $\phi(t) \geqslant \phi(nh)$. Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{(n-1)h}^{nh}\phi(nh)\mathrm{d}t = h\phi(nh) \geqslant 0$, d'où le résultat.
7. Comme ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\phi$ converge et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)$ également. On déduit de la question précédente, et du théorème de comparaison des séries à termes positifs, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}h\phi(nh)$, ce qu'il fallait démontrer.

8. Pour tout entier $n \geqslant \frac{t_0}{h} + 1$, pour la même raison qu'à la question 6, on a :

$$h\phi(nh) \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\mathrm{d}t \leqslant h\phi((n-1)h).$$

Soit n_0 la partie entière de $\frac{t_0}{h} + 2$. En sommant l'encadrement ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh) \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{(n-1)h}^{nh} \phi(t)\mathrm{d}t = \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi((n-1)h) = \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh),$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh) - h\phi((n_0-1)h) \leqslant \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh)$, donc :

$$0 \leqslant \sum_{n=n_0-1}^{+\infty} h\phi(nh) - \int_{(n_0-1)h}^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t \leqslant h\phi((n_0-1)h).$$

Passons à l'étude sur $[0,(n_0-1)h]$, où l'on utilise l'uniforme continuité (comme pour les sommes de Riemann sur un segment, dont on reconnaît là une généralisation). Limitons-nous à $h \in]0,1]$, de sorte que : $[0,(n_0-1)h] \subseteq [0,t_0+1]$. Comme ϕ est continue sur le segment $[0,t_0+1]$, elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver $\eta \in]0,1]$ tel que $\forall (t,u) \in [0,t_0+1]^2$, $|t-u| \leqslant \eta \Longrightarrow |\phi(t)-\phi(u)| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $h \in]0,\eta]$, tout $n \in [\![0,n_0-2]\!]$ et tout $t \in [nh,(n+1)h]$, on a : $|t-nh| \leqslant h \leqslant \eta$, donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh)\right| = \left|\sum_{n=0}^{n_0-2} \int_{nh}^{(n+1)h} (\phi(t)-\phi(nh))\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-2} \int_{nh}^{(n+1)h} |\phi(t)-\phi(nh)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-2} \varepsilon h \\ &= (n_0-1)\varepsilon h \\ &\leqslant (t_0+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme :

$$\int_0^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \left(\int_0^{(n_0-1)h} \phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{n_0-2} h\phi(nh)\right) + \left(\int_{n_0-1}^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=n_0}^{+\infty} h\phi(nh)\right),$$

on déduit de ce qui précède, pour tout $h \in]0,\eta]$:

$$\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \leqslant (t_0+1)\varepsilon + h\phi((n_0-1)h).$$

On est près de conclure. Comme ϕ est continue sur le segment $[0,t_0+1]$, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes. Or : $(n_0-1)h \in [0,t_0+1]$; donc : $0 \leqslant h\phi((n_0-1)h) \leqslant h\|\phi_{|[0,t_0+1]}\|_\infty \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. On peut donc trouver $h_1 > 0$ tel que pour tout $h \in]0,h_1]$, on ait : $|h\phi((n_0-1)h)| \leqslant \varepsilon$. Finalement, pour tout $h \in]0,\min(h_0,h_1)]$, on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh)\right| \leqslant (t_0+2)\varepsilon.$$

On peut conclure : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t$, ce qu'on voulait démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comparer cette démonstration avec celle faite en travaux dirigés sous d'autres hypothèses. Noter les points communs (selon qu'on soit près ou loin de l'infini). Constater que la majoration epsilonesque est moins difficile à avoir ici : pourquoi ?

— On a vu en exercice que si ϕ est décroissante, positive et intégrable, alors $\phi(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$. Aurait-on pu l'exploiter ici, pour l'étude au voisinage de l'infini ?

9. L'application g_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$). Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $g_\alpha'(t) = e^{-t}t^{\alpha-2}(-t+\alpha-1)$. Donc g_α' est négative sur $[\alpha-1,+\infty[$ et g_α est décroissante sur cet intervalle. Les hypothèses nécessaires à l'application des questions 5 à 8 sont donc satisfaites par g_α. On en déduit, pour tous $x \in]0,1[$ et $h = -\ln(x) > 0$:
$$h\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = (-\ln(x))\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln(x))) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} g_\alpha(t)\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)$$
par composition de limites. D'où le résultat.

10. On étudie la convergence absolue de la série $\sum_{n\geqslant 0} n^{\alpha-1}x^n$. La convergence étant triviale pour $x = 0$, supposons : $x \neq 0$. On peut appliquer la règle de D'Alembert, puisque la série est à termes strictement positifs (du moins à partir de $n \geqslant 1$). On a :
$$\frac{(n+1)^{\alpha-1}x^{n+1}}{n^{\alpha-1}x^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x,$$
donc d'après la règle de D'Alembert : si $x < 1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} n^{\alpha-1}x^n$ converge, tandis qu'elle diverge si $x > 1$. D'où le résultat.

11. Pour tout $x \in]0,1[$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln(x)) = (-\ln(x))^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n = (-\ln(x))^{\alpha-1}S_\alpha(x).$$
D'après la question 9, on a donc : $(-\ln(x))^\alpha S_\alpha(x) = -\ln(x)g_\alpha(-n\ln(x)) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \Gamma(\alpha) \neq 0$ (question 1), et on en déduit :
$$S_\alpha(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha)}{(-\ln(x))^\alpha} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha},$$
d'où le résultat.

Troisième partie

12. La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue sur $]0,1[$. Équivalente en 0^+ à $t \mapsto t^{\alpha-1}$, elle est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $\alpha - 1 > -1$, si et seulement si : $\alpha > 0$. Équivalente en 1^- à $t \mapsto (1-t)^{\beta-1}$, elle est intégrable sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$ si et seulement si $\beta - 1 > -1$, si et seulement si : $\beta > 0$. Elle est donc intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si α et β sont strictement positifs.

Remarque. Le changement de variable $u = 1-t$ permet d'obtenir l'intégrabilité sur $\left[\frac{1}{2},1\right[$ à l'aide de celle sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

13. (a) Cette égalité est obtenue avec le changement de variable affine $u = 1-t$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Pourquoi pouvait-on penser à ce changement de variable ?

(b) Suivant l'indication de l'énoncé, on pose : $u = \dfrac{t}{1-t}$, ce qui équivaut à : $t = \dfrac{u}{u+1}$. Ce changement de variable est licite parce que $u \mapsto \dfrac{u}{1+u}$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,1[$ (sa dérivée est en effet $u \mapsto \dfrac{1}{(1+u)^2}$). On a :
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u, \quad \text{et} : \quad t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha+\beta-2} = u^{\alpha-1}\frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}},$$
donc :
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\frac{1}{(1+u)^{\alpha+\beta-2}}\frac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}u,$$
d'où le résultat.

(c) On intègre par parties, en dérivant $t \mapsto t^{\alpha-1}$ et en intégrant $t \mapsto (1-t)^{\beta-1}$. On vérifie l'existence du terme entre crochets :

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha}\frac{-(1-t)^{\beta}}{\beta} = \lim_{t\to 1} t^{\alpha}\frac{-(1-t)^{\beta}}{\beta} = 0,$$

ces calculs de limites étant valables parce que α et β sont strictement positifs. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t &= \left[t^{\alpha}\frac{-(1-t)^{\beta}}{\beta}\right]_0^1 + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta}\mathrm{d}t\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta}\mathrm{d}t\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1-t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On en déduit : $\mathrm{B}(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\beta}(\mathrm{B}(\alpha,\beta) - \mathrm{B}(\alpha+1,\beta))$, puis :

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi l'idée d'intégrer par parties était naturelle ?

— Après la première intégration par parties, se demander pourquoi il aurait été vain de réintégrer par parties en vue d'obtenir les bons exposants de t et $1-t$. Comprendre alors pourquoi on a procédé comme ci-dessus pour y remédier, et aussi si on aurait pu utiliser cette idée dès le début (avant d'intégrer par parties). Pourquoi ne l'ai-je pas fait ?

14. On suppose que pour tous réels $\alpha > 2$ et $\beta > 2$, on a : $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Montrons que cela implique le résultat pour tous réels α et β strictement positifs. Soit $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)\\
&= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\mathrm{B}(\alpha+2,\beta)\\
&= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\mathrm{B}(\beta,\alpha+2)\\
&= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}\mathrm{B}(\beta+1,\alpha+2)\\
&= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha+1+\beta}{\alpha+1}\frac{\alpha+\beta+2}{\beta}\frac{\alpha+\beta+3}{\beta+1}\mathrm{B}(\beta+2,\alpha+2).
\end{aligned}$$

Comme $\alpha+2$ et $\beta+2$ sont strictement supérieurs à 2, on a par hypothèse :

$$\mathrm{B}(\beta+2,\alpha+2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+4)} = \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Après substitution et simplification, on trouve : $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. Ainsi l'identité pour $(\alpha,\beta) \in]2,+\infty[^2$, implique celle pour $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Se convaincre que l'idée de réitérer l'équation fonctionnelle n'est pas tordue et au contraire naturelle : ne pas perdre de vue ce qu'on veut faire : comment se ramener de réels strictement positifs à des réels strictement supérieurs à 2 ?

15. Comme $\alpha-1$ et $\beta-1$ sont strictement plus grands que 1, l'application $\psi_{\alpha,\beta}$ est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$, donc sa dérivée est bornée par le théorème des bornes atteintes. Donc $\psi_{\alpha,\beta}$ est lipschitzienne par l'inégalité des accroissements finis.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Peut-on expliciter une constante de Lipschitz ici ?

16. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour traiter cette question, il est utile de remarquer que $u_n(\alpha,\beta)$ est une somme de Riemann, ce qui incite à écrire : $u_n(\alpha,\beta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1} \mathrm{d}t$, comme à chaque fois que l'on fait une comparaison fine entre une somme de Riemann et l'intégrale vers laquelle elle converge. On a alors :
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) - u_n(\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha,\beta}(t) - \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}t.$$
Comme, pour tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a : $\left|\psi_{\alpha,\beta}(t) - \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant A_{\alpha,\beta}\left|t-\frac{k}{n}\right| = A_{\alpha,\beta}\left(t-\frac{k}{n}\right)$, on peut écrire :
$$\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha,\beta}(t) - \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} A_{\alpha,\beta}\left(t-\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}t = A_{\alpha,\beta}\frac{1}{2n^2}.$$
D'où le résultat demandé :
$$|\mathrm{B}(\alpha,\beta) - u_n(\alpha,\beta)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(\psi_{\alpha,\beta}(t) - \psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant n\frac{A_{\alpha,\beta}}{2n^2} = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** J'affirme que remarquer que $u_n(\alpha,\beta)$ est une somme de Riemann incite à utiliser la relation de Chasles pour faire apparaître des intervalles d'intégration de longueur $\frac{1}{n}$: quel rapport ? Pourquoi est-ce une incitation naturelle ? Trois moyens de répondre à ces questions : 1° se souvenir du sens CONCRET du terme général d'une somme de Riemann, 2° raisonner *qualitativement* pour comprendre ce qu'on cherche à comparer, quand on calcule $\mathrm{B}(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\beta)$, 3° regarder les démonstrations antérieures où l'on a comparé des sommes de Riemann à des intégrales.
> Je vous invite notamment à comparer ce raisonnement à celui où l'on a fait un développement asymptotique des sommes de Riemann lorsqu'on intègre une fonction de classe C^k : ce qu'on fait ici est en effet très proche. On retiendra l'idée que « plus on a de la régularité, et plus on majore finement une "différence petite" au sens de *L'art de la majoration.* »

17. Soit $x \in [0,1[$. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{\alpha-1}x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{\beta-1}x^n$ convergent (absolument), donc leur produit de Cauchy $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge aussi et on a :
$$S_\alpha(x)S_\beta(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\beta-1}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$
avec, par définition d'un produit de Cauchy :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha-1}x^k(n-k)^{\beta-1}x^{n-k} = n^{\alpha+\beta-2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1} x^n = n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n.$$
On en déduit : $S_\alpha(x)S_\beta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}u_n(\alpha,\beta)x^n$, d'où la première identité demandée.

Ensuite : $S_\alpha(x)S_\beta(x) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}\left(u_n(\alpha,\beta) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)\right)x^n$. Avec la majoration de la question 16, on obtient :

$$|S_\alpha(x)S_\beta(x) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}\,|u_n(\alpha,\beta) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)|\,x^n \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2}x^n = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

En multipliant par $(1-x)^{\alpha+\beta}$, on a :

$$\left|(1-x)^\alpha S_\alpha(x)(1-x)^\beta S_\beta(x) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)\right| \leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x)(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x).$$

Comme α, β, $\alpha+\beta$ et $\alpha+\beta-1$ sont tous supérieurs à 1, on peut utiliser la question 11 :

$$(1-x)^\alpha S_\alpha(x)(1-x)^\beta S_\beta(x) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

et par cette même question, on a :

$$\frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x)(1-x)^{\alpha+\beta-1}S_{\alpha+\beta-1}(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}(1-x)\Gamma(\alpha+\beta-1) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0,$$

donc la majoration ci-dessus donne, quand $x \to 1^-$:

$$0 \leqslant |\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)| \leqslant 0,$$

c'est-à-dire : $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - \mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha,\beta) = 0$. D'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- En fin de compte, pourquoi tenait-on à se ramener au cas où $\alpha > 2$ et $\beta > 2$?
- En parcourant les dernières questions, se demander ce qu'on y gagnait à raisonner avec les sommes de Riemann pour démontrer cette identité. Si on avait voulu démontrer ce résultat mais en restant avec les expressions intégrales, de quel analogue d'un résultat sur les séries aurait-on eu besoin ?
- Pouvait-on démontrer l'identité de cette question avec la formule de Gauß ? Après tout, elle fut obtenue en écrivant Γ à l'aide d'une intégrale qui ressemble beaucoup à la fonction B, et s'y ramène même après changement de variable !
- Remarquer une analogie entre cette formule et l'identité : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. (Se souvenir que la fonction Γ interpole la factorielle.)

18. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a : $1-\alpha \in]0,1[$, donc $\mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha)$ existe et on a : $\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$. La continuité de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ ayant été établie à la question 1, on en déduit que $\alpha \mapsto \Gamma(1-\alpha)$ est continue sur $]0,1[$ par composition, et donc $\alpha \mapsto \mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)$ est continue sur $]0,1[$ en tant que produit de fonctions continues. D'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Se dire que lorsqu'on demande de montrer la continuité d'une intégrale à paramètre dans un sujet, ce n'est jamais anodin ! À quoi cela peut bien servir ? Il y a la réponse quelques questions plus loin, mais aussi dans les exercices de travaux dirigés. S'en souvenir !

19. D'abord, remarquons que les hypothèses assurent que l'on a bien : $\frac{2p+1}{2q} \in]0,1[$. Ensuite, d'après la question 13.(b), on a : $B\left(\dfrac{2p+1}{2q}, 1-\dfrac{2p+1}{2q}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{(2(p-q)+1)/2q}}{1+t}\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t = u^{2q}$, licite parce que $u \mapsto u^{2q}$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ permet alors d'obtenir le résultat voulu :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1-\frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2(p-q)+1}}{1+u^{2q}}2qu^{2q-1}\mathrm{d}u = 2q\int_0^{+\infty}\frac{u^{2p}}{1+u^{2q}}\mathrm{d}u.$$

20. On décompose en éléments simples $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$. On remarque que l'on a :

$$X^{2q}+1 = \prod_{k=0}^{q-1}(X-z_k)\prod_{k=0}^{q-1}(X+z_k).$$

On a en effet, pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$, $(\pm z_k)^{2q} = e^{i(2k+1)\pi} = -1$, ce qui fournit $2q$ racines distinctes de $X^{2q}+1$.

Comme $A = X^{2p}$ est de degré strictement inférieur à celui de $B = X^{2q}+1$, la partie entière de $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ est nulle. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$ s'écrit donc :

$$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{a_k}{X - z_k} + \frac{b_k}{X + z_k} \right),$$

où les a_k et les b_k sont des nombres complexes définis par : $a_k = \dfrac{A(z_k)}{B'(z_k)}$, et : $b_k = \dfrac{A(-z_k)}{B'(-z_k)}$. Or : $B' = 2qX^{2q-1}$, et : $z_k^{2q} = -1$; donc : $B'(z_k) = -\dfrac{2q}{z_k}$, et : $B'(-z_k) = \dfrac{2q}{z_k}$; d'où le résultat.

Autre démonstration. On va retrouver cette décomposition en éléments simples *via* la formule d'orthogonalité dont je parle dans *Méthodes*, *Calculer la somme d'une série convergente*. Soit $x \in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x^{2p}}{1+x^{2q}} = \frac{x^{2p}}{1-(-x^{2q})} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2p} \left(-x^{2q}\right)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-i\pi}\right)^n x^{2p+2qn} \\
&= e^{\frac{2i\pi p}{2q}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{i\pi}{2q}}\right)^{2p+2qn} x^{2p+2qn} \\
&= e^{\frac{2i\pi p}{2q}} \sum_{n=0}^{+\infty} {}_{2p+2q\mathbb{N}}(n) \left(e^{-\frac{i\pi}{2q}} x\right)^n \\
&= e^{\frac{2i\pi p}{2q}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{2q-1} e^{-\frac{2i\pi(n-2p)k}{2q}} \left(e^{\frac{i\pi}{2q}} x\right)^n \\
&= \frac{e^{\frac{2i\pi p}{2q}}}{2q} \sum_{k=0}^{2q-1} e^{\frac{2i\pi 2pk}{2q}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{i\pi(2k+1)}{2q}} x\right)^n \\
&= \frac{e^{\frac{2i\pi p}{2q}}}{2q} \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{e^{\frac{2i\pi 2pk}{2q}}}{1 - e^{-\frac{i\pi(2k+1)}{2q}} x} \\
&= -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{e^{\frac{i\pi(2k+1)(2p+1)}{2q}}}{x - e^{\frac{i\pi(2k+1)}{2q}}} \\
&= -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{z_k^{2p+1}}{x - z_k}.
\end{aligned}$$

(L'énoncé définit z_k pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, mais j'ose espérer que l'usage de la même notation pour $k \in [\![q,2q-1]\!]$ ne vous choque pas.) Pour reconnaître le résultat voulu, il suffit de remarquer : $\forall k \in [\![q,2q-1]\!]$, $z_k = -z_{k-q}$, et de faire un changement d'indice. On utilise alors l'injectivité sur $\mathbb{C}(X)$ de $R \mapsto (x \mapsto R(x))$, qui est vraie parce que $]-1,1[$ est infini.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Y avait-il une façon intelligente et rapide de trouver la factorisation de $X^{2q}+1$, sans que les z_k ne soient fournis par l'énoncé ?
- Pour s'assurer qu'on a compris la formule d'orthogonalité utilisée : l'exploiter pour des décompositions analogues (celle de ce sujet ne s'y prêtait pas trop : l'apparition du signe moins compliquait la simplification).

21. Soit $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. L'application $F : t \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left((t - \mathrm{Re}(c))^2 + (\mathrm{Im}(c))^2\right) + i \arctan\left(\dfrac{t - \mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)}\right)$ est manifestement dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de fonctions dérivables (on a en outre, comme $c \notin \mathbb{R}$:

$(t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2 \geqslant (\mathrm{Im}(c))^2>0)$, et on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{t-\mathrm{Re}(c)}{(t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2}+\frac{i}{\mathrm{Im}(c)}\frac{1}{1+\left(\dfrac{t-\mathrm{Re}(c)}{\mathrm{Im}(c)}\right)^2}\\&=\frac{t-\mathrm{Re}(c)}{(t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2}+i\frac{\mathrm{Im}(c)}{(\mathrm{Im}(c))^2+(t-\mathrm{Re}(c))^2}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t-c}=\frac{t-\bar{c}}{|t-c|^2}=\frac{t-\mathrm{Re}(c)}{(t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2}+i\frac{\mathrm{Im}(c)}{(t-\mathrm{Re}(c))^2+(\mathrm{Im}(c))^2}=F'(t),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Déduisons-en l'expression intégrale demandée. Pour tout entier k entre 0 et $q-1$, une primitive de $t\mapsto \dfrac{1}{t-z_k}-\dfrac{1}{t+z_k}$ est la fonction :

$$\begin{aligned}\omega_k : t\mapsto&\left(\frac{1}{2}\ln\left((t-\mathrm{Re}\,(z_k))^2+(\mathrm{Im}\,(z_k))^2\right)+i\arctan\left(\frac{t-\mathrm{Re}\,(z_k)}{\mathrm{Im}\,(z_k)}\right)\right)\\&-\left(\frac{1}{2}\ln\left((t+\mathrm{Re}\,(z_k))^2+(-\mathrm{Im}\,(z_k))^2\right)+i\arctan\left(\frac{t+\mathrm{Re}\,(z_k)}{-\mathrm{Im}\,(z_k)}\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(t-\mathrm{Re}\,(z_k))^2+(\mathrm{Im}\,(z_k))^2}{(t+\mathrm{Re}\,(z_k))^2+(\mathrm{Im}\,(z_k))^2}\right)+i\left(\arctan\left(\frac{t-\mathrm{Re}\,(z_k)}{\mathrm{Im}\,(z_k)}\right)+\arctan\left(\frac{t+\mathrm{Re}\,(z_k)}{\mathrm{Im}\,(z_k)}\right)\right),\end{aligned}$$

et donc, d'après la question précédente, la fonction $\omega=-\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1}z_k^{2p+1}\,\omega_k$ est une primitive de $t\mapsto \dfrac{t^{2p}}{1+t^{2q}}=-\dfrac{1}{2q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1}z_k^{2p+1}\left(\frac{1}{t-z_k}-\frac{1}{t+z_k}\right)$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t=\lim_{+\infty}\omega-\omega(0).$$

Calculons cette limite. Comme : $\mathrm{Im}\,(z_k)=\sin\left(\pi\dfrac{2k+1}{2q}\right)>0$, les arc tangentes de l'expression de ω_k ci-dessus tendent vers $\dfrac{\pi}{2}$, et le terme logarithmique tend manifestement vers $\dfrac{1}{2}\ln(1)=0$, donc : $\forall k\in[\![0,q-1]\!]$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\omega_k(t)=i\pi$. De plus, on a directement : $\omega_k(0)=0$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t=-\frac{i\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1}z_k^{2p+1}=-\frac{i\pi}{2q}e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}\sum_{k=0}^{q-1}\left(e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}\right)^k,$$

et comme : $e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}\neq 1$ (en effet : $0<\frac{2p+1}{2q}\leqslant\frac{2(q-1)+1}{2q}<2$), simplifier cette somme géométrique donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t&=-\frac{i\pi}{2q}e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}\frac{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}q}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{q}}-1}\\&=-\frac{i\pi}{2q}e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}\frac{e^{i\pi(2p+1)}-1}{e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}\left(e^{i\pi\frac{2p+1}{2q}}-e^{-i\pi\frac{2p+1}{2q}}\right)}\\&=-\frac{i\pi}{2q}\frac{-2}{2i\sin\left(\pi\frac{2p+1}{2q}\right)}\\&=\frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\pi\frac{2p+1}{2q}\right)},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-c}$ n'est pas $t \mapsto \ln(|t-c|)$?
> — Se demander comment on aurait pu trouver une primitive si l'énoncé ne l'avait fournie. Ce problème reviendra chaque fois qu'on aura besoin d'un logarithme complexe.

22. On a démontré que pour tout α de la forme $\alpha = \dfrac{2p+1}{2q}$, avec p et q des entiers tels que : $0 < p < q$, on a :
$$\mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = 2q\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$
On aimerait étendre cette identité à tout réel $\alpha \in]0,1[$, ce qui encourage à raisonner par densité. Justifions déjà que l'ensemble :
$$D = \left\{ \frac{2p+1}{2q} \mid (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < p < q \right\}$$
est dense dans $]0,1[$. Cela revient à démontrer que pour tout $(x,y) \in]0,1[^2$ tel que : $x < y$, il existe $u \in D$ tel que : $x < u < y$. Pour cela, soit q un entier naturel suffisamment grand pour que : $2q(y-x) > 2$, par exemple : $q = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$. Il existe alors un entier naturel impair entre $2qx$ et $2qy$ (puisqu'un intervalle de longueur supérieure à 2 contient au moins deux entiers consécutifs), qu'on note $2p+1$; on a nécessairement $0 < p < q$, sinon $\frac{2p+1}{2q}$ serait hors de l'intervalle $]0,1[$, donc : $\frac{2p+1}{2q} \in D$, et par construction de $2p+1$ on a : $2qx < 2p+1 < 2qy$, donc : $x < \frac{2p+1}{2q} < y$. Ceci démontre que tout intervalle ouvert non vide de $]0,1[$ contient un élément de D, et donc D est dense dans $]0,1[$.
Ceci étant démontré, pour étendre l'identité ci-dessus à tout réel de $]0,1[$: soit $\alpha \in]0,1[$, et soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans D qui converge vers α (il en existe par densité). Comme $\alpha \mapsto \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha)$ et $\alpha \mapsto \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ sont continues sur $]0,1[$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} B(u_n,1-u_n) = B(\alpha,1-\alpha), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi u_n)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$
Or le fait que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit à valeurs dans D implique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(u_n,1-u_n) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi u_n)}$. Donc, par unicité de la limite :
$$\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},$$
et cela vaut pour tout $\alpha \in]0,1[$: d'où le résultat. Cette identité, conjointement au résultat de la question 17, donne enfin la formule des compléments :
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)\Gamma(\alpha+(1-\alpha)) = \mathrm{B}(\alpha,1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Comparer ma démonstration de densité avec celle de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
> — Plus tard (chapitre VI), on pourra se demander si D rentre dans la catégorie des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$ denses.
> — Prendre du recul sur les dernières questions, afin de comprendre tout ce qui pouvait naturellement interroger : pourquoi passer par les réels de la forme $\frac{2p+1}{2q}$ d'abord ? Quelle simplification cela permettait ? Pourquoi nous a-t-on demandé de démontrer la continuité de $\alpha \mapsto \mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)$? Qu'est-ce qui, dans la construction du sujet, pouvait naturellement nous faire penser à raisonner par densité ?

23. Soit $x \in]0,\pi[$. On applique la question précédente avec $\alpha = \frac{x}{\pi} \in]0,1[$, puis la question 4. On obtient :
$$\frac{\sin(x)}{\pi} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{x}{\pi}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{\pi}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{\pi}+k\right)}{n^{\frac{x}{\pi}}n!} \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{x}{\pi}+k\right)}{n^{1-\frac{x}{\pi}}n!}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{x}{\pi}+k\right)\prod_{k=1}^{n+1}\left(-\frac{x}{\pi}+k\right)}{(n!)^2 n} &= \frac{\frac{x}{\pi}\left(-\frac{x}{\pi}+(n+1)\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k\pi}+1\right)\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{x}{k\pi}+1\right)}{n}\\ &= \frac{x}{\pi}\frac{n+1-\frac{x}{\pi}}{n}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Lorsqu'on prend la limite quand $n \to +\infty$, on obtient donc :

$$\frac{\sin(x)}{\pi} = \frac{x}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

d'où le résultat après multiplication par π.

Remarque. Cette identité est à l'origine de la première méthode de calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, historiquement due à Euler. Pour ce faire, il nota que grâce aux relations coefficients-racines avec $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, on a :

$$x\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = x\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^2}{k^2\pi^2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right).$$

Mais on a aussi : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Par unicité de la partie régulière du développement limité du sinus : $-\frac{1}{6} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}$, puis : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque. Il s'avère que le produit de Weierstraß du sinus est aussi valable pour $x \in \mathbb{C}$ quelconque (où le sinus est défini sur $\mathbb{C}$ grâce aux formules d'Euler), même si les méthodes de ce problème ne permettent pas de le démontrer. On peut alors obtenir la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ en écrivant, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\sin(x)\sin\left(\frac{x}{i}\right) = \frac{x^2}{i}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{x^2}{i}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^4}{k^4\pi^4}\right).$$

Or, encore grâce aux relations coefficients-racines :

$$\frac{x^2}{i}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^4}{k^4\pi^4}\right) = \frac{x^2}{i}\left(1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^4}{k^4\pi^4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right),$$

tandis que :

$$\begin{aligned}\sin(x)\sin\left(\frac{x}{i}\right) &= x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{5!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)\cdot\frac{x}{i}\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{5!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right)\\ &= \frac{x^2}{i}\left(1-\frac{x^4}{90}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right).\end{aligned}$$

Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, on trouve : $-\frac{1}{90} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4\pi^4}$, puis : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Cette méthode se généralise à toute somme de série de Riemann d'exposant pair.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Peut-on obtenir un produit analogue pour d'autres fonctions usuelles ? Cosinus, tangente...
- Est-ce que généralement, toute fonction peut se factoriser grâce à ses racines (éventuellement en nombre infini) ? Chercher des exemples et contre-exemples (ne pas chercher loin).
- Qu'est-ce qui aurait été compliqué à rendre rigoureux, dans le raisonnement ci-dessus ?
- Pour s'assurer qu'on a compris, essayer d'obtenir d'autres sommes de série de Riemann d'exposant pair. Pourquoi ne parvient-on pas à obtenir $\zeta(3)$ par cette méthode, par exemple ?

Quatrième partie

24. Soit $x \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est continue sur $[0, x[$ et on a :

$$\int_0^x \left|\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{\|f\|_\infty}{(x-t)^\alpha} \mathrm{d}t = \|f\|_\infty \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(x-t)^\alpha} < +\infty,$$

la dernière inégalité étant vraie parce qu'on reconnaît une intégrale de Riemann d'exposant $\alpha < 1$, donc l'application $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[0, x[$, donc sur $]0, x[$.

25. Pour tout $x \in]0,1]$, le changement de variable affine $u = \frac{t}{x}$ donne le résultat. Le résultat reste trivialement valable pour $x = 0$ parce que $1 - \alpha > 0$.

26. Comme $x \mapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[0,1]$, il suffit de montrer la continuité de l'intégrale à paramètre $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t$. Posons : $\forall (t,x) \in [0,1[\times [0,1]$, $g(x,t) = \dfrac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$. Alors :
    - pour tout $x \in [0,1]$, l'application $t \mapsto g(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,1[$;
    - pour tout $t \in [0,1[$, l'application $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$;
    - pour tout $(t,x) \in [0,1[\times [0,1]$, on a :

    $$|g(x,t)| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{(1-t)^\alpha}, \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

    et la fonction $t \mapsto \dfrac{\|f\|_\infty}{(1-t)^\alpha}$ est bien sûr intégrable sur $[0,1[$ car $\alpha < 1$.

    Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, l'application $A_\alpha f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$, donc : $A_\alpha f \in E$.

27. Par linéarité de l'intégrale, A_α est linéaire. D'après la question précédente, A_α est donc un endomorphisme de E.
    Soit $f \in E$. On a pour tout $x \in [0,1]$:

    $$|A_\alpha f(x)| \leqslant x^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\|f\|_\infty}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t = \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \|f\|_\infty.$$

    Cette majoration étant indépendante de $x \in [0,1]$, par propriété de la borne supérieure on a : $\|A_\alpha f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha} \|f\|_\infty$, ce qu'il fallait démontrer.
    Remarque. On a le cas d'égalité lorsque f est la fonction constante égale à 1.

28. Nous allons démontrer le résultat voulu par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour $n = 1$, on reprend la méthode de majoration de la question précédente. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

    $$|A_\alpha(x)| \leqslant x^\beta \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^\alpha} = x^\beta \|f\|_\infty \frac{1}{\beta} = x^\beta \|f\|_\infty \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)},$$

d'où l'initialisation. Passons à l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose : $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant x^{n\beta} \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty$. Soit $x \in [0,1]$. Alors :

$$\left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| = x^\beta \left|\int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t\right| \leqslant x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t \leqslant x^\beta x^{n\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left|A_\alpha^{n+1} f(x)\right| &\leqslant x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \mathrm{B}(n\beta+1, 1-\alpha) \|f\|_\infty \\ &= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \mathrm{B}(n\beta+1, \beta) \|f\|_\infty \\ &= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \frac{\Gamma(n\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\|_\infty \qquad \text{(q. 17)} \\ &= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta+1)} \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

donc la majoration est vraie aussi au rang $n+1$. Par principe de récurrence, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall x \in [0,1]$, $|A_\alpha^n f(x)| \leqslant x^{n\beta} \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty$. En majorant x par 1 on a ensuite, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \|A_\alpha^n f\|_\infty \leqslant \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** J'affirme que si la majoration à démontrer par récurrence avait été : $\|A_\alpha^n f\|_\infty \leqslant \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty$, vous auriez échoué. Pourquoi ? Cela permet de comprendre comment l'énoncé fut construit.

29. Soit $\gamma > 0$. Alors :

$$\gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{(\gamma\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = \frac{1}{(\gamma\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}} \frac{\left((\gamma\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}\right)^{n\beta+1}}{\Gamma(1+n\beta)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après la question 3 (en remplaçant γ par $(\gamma\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}$). D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Pourquoi cette transformation saugrenue de $(\gamma\Gamma(\beta))^n$?

30. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in [0,1]$, on a : $|\lambda^n A_\alpha^n f(x)| \leqslant |\lambda|^n \dfrac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty$, d'après la question 28. Or la question précédente permet d'écrire, en prenant $\gamma = 2|\lambda| > 0$:

$$|\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2|\lambda|)^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

et la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |\lambda|^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|_\infty$ aussi puis $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n A_\alpha^n f(x)$ converge également (absolument) par comparaison. On en déduit la convergence simple de la suite de fonctions $\left(f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda^k A_\alpha^k f(x)\right)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,1]$, vers la fonction $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k A_\alpha^k f$. Montrons la convergence uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f_n(x) - g(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda^k A_\alpha^k f(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda^k A_\alpha^k f(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k \frac{(\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(1+k\beta)} \|f\|_\infty.$$

Cette majoration est indépendante de $x \in [0,1]$. Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n - g\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda|^k \frac{(\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(1+k\beta)} \|f\|_\infty.$$

Le majorant est le reste d'une série convergente, d'après ce qu'on a montré plus haut. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$, donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers g. D'où le résultat.

Remarque. Plus tard, on pourra avoir la convergence uniforme *via* la majoration de $\|\lambda^n A_\alpha^n f\|_\infty$ par le terme général d'une série convergente, en démontrant ce qu'on appelle la convergence *normale*. Ce sera beaucoup plus rapide que le raisonnement plus haut.

31. Notons d'abord que g est une limite uniforme de fonctions continues, donc elle est continue. Ainsi il y a bien un sens d'évaluer $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)$ en g.
Pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) = \sum_{n=0}^{N} \left(\lambda^n A_\alpha^n f(x) - \lambda^{n+1} A_\alpha^{n+1} f(x)\right) = f(x) - \lambda^{N+1} A_\alpha^{N+1} f(x), \qquad (\dagger)$$

puisqu'on reconnaît une somme télescopique. Le membre de droite converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, puisque $(\lambda^n A_\alpha^n f(x))_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (c'est le terme général d'une série convergente, par la question précédente). Étudions la limite du membre de gauche. Par la question précédente, la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers g. Justifions que la suite $\left((\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)g$. Posons pour abréger : $U = \mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$. Par la question 27, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\left| U \sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) - Ug(x) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) - g(x) - \lambda A_\alpha \left(\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) - g(x) \right) \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) - g(x) \right| + \left| \lambda A_\alpha \left(\sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) - g(x) \right) \right| \\
&\leqslant \underbrace{\left\| \sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f - g \right\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\frac{|\lambda| \left\| \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f - g \right\|_\infty}{(1-\alpha)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \qquad (q.\,27),
\end{aligned}$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} U \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) = Ug(x)$.
En résumé, l'égalité $(\dagger)$ donne, quand $N \to +\infty$:

$$\forall x \in [0,1], \quad (\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) \sum_{n=0}^{N} \lambda^n A_\alpha^n f(x) = f(x),$$

c'est-à-dire : $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha)g = f$. D'où le résultat.

32. D'après la question précédente, on a : $(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n = \mathrm{Id}_E$. On montrerait par des calculs en tous points analogues que l'on a : $\forall f \in E$, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right)(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) f = f$, c'est-à-dire : $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right)(\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha) = \mathrm{Id}_E$. Donc $\mathrm{Id}_E - \lambda A_\alpha$ est inversible dans E, d'inverse : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$.

33. Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$A_\alpha e_n(x) = x^\beta \int_0^1 \frac{(xt)^n}{(1-t)^\alpha} \mathrm{d}t = x^{\beta+n} \mathrm{B}(n+1,\beta) \overset{(q.\,17)}{=} x^{\beta+n} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)},$$

donc : $A_\alpha e_n = \mathrm{B}(n+1,\beta) e_{n+\beta} = \dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} e_{n+\beta}$ en prolongeant la définition des e_k à $k \in [0,+\infty[$. Le résultat précédent reste vrai pour tout $n \in [0,+\infty[$.

34. On trouve :

$$\begin{aligned}(A_{1-\alpha} \circ A_\alpha)e_n &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} A_{1-\alpha}(e_{n+\beta}) \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)} \frac{\Gamma((n+\beta)+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma((n+\beta)+1+(1-\beta))} e_{(n+\beta)+1-\beta} \\ &= \Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} e_{n+1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}{n+1} e_{n+1} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{e_{n+1}}{n+1}, \qquad (q.\,22)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

35. Les applications $f \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} Pf$ et $A_{1-\alpha} \circ A_\alpha$ sont linéaires et coïncident sur $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ par la question précédente, donc elles coïncident aussi sur $\mathrm{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; or il s'agit de l'espace vectoriel des applications polynomiales, d'où le résultat.

36. Pour tout $f \in E$, l'application Pf est bien continue sur $[0,1]$ en tant que primitive d'une fonction continue (elle est même de classe C^1), et de plus P est linéaire, donc P est un endomorphisme de E. Soit $f \in E$. Alors :

$$\forall x \in [0,1], \quad |Pf(x)| \leqslant \int_0^x |f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \|f\|_\infty x \leqslant \|f\|_\infty,$$

donc : $\|Pf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.
Remarque. On a le cas d'égalité en prenant $f = 1$.

37. On a montré que B_α et $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha} P$ coïncident sur l'ensemble des fonctions polynômiales sur $[0,1]$. Cela encourage à raisonner par densité. Soit $f \in E$. Par le théorème d'approximation de Weierstraß, il existe une suite $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ d'applications polynomiales sur $[0,1]$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f. Alors, par la question 35 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P\psi_n(x) = B_\alpha \psi_n(x). \qquad (\ddagger)$$

On va calculer la limite quand $n \to +\infty$ de chaque membre de l'égalité. Le membre de gauche converge vers $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} Pf(x)$ par la question précédente, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant |P\psi_n(x) - Pf(x)| = |P(\psi_n - f)(x)| \leqslant \|\psi_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et pour le membre de droite on utilise la question 27. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$ on a :

$$0 \leqslant |B_\alpha \psi_n(x) - B_\alpha f(x)| = |A_{1-\alpha}\left(A_\alpha(\psi_n - f)\right)(x)| \leqslant \frac{\|A_\alpha(\psi_n - f)\|_\infty}{\alpha} \leqslant \frac{\|\psi_n - f\|_\infty}{\alpha(1-\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\psi_n f(x) = Pf(x)$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty} B_\alpha \psi_n f(x) = B_\alpha f(x)$. Passer à la limite dans $(\ddagger)$ implique donc, par unicité de la limite :

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} Pf(x) = B_\alpha f(x).$$

C'est-à-dire : $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} Pf = B_\alpha f$. Ceci vaut pour tout $f \in E$, donc : $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} P = B_\alpha$.

Remarque. On a en vérité montré davantage plus haut : il y a convergence *uniforme* de $(B_\alpha\psi_n)_{n\geqslant 0}$ vers $B_\alpha f$ (et de même avec $(P\psi_n)_{n\geqslant 0}$). Cela découle du caractère lipschitzien de B_α, qui implique sa continuité sur E (cette remarque sera plus claire lorsque nous ferons de la topologie). La topologie permettrait d'ailleurs de dire directement que les deux fonctions B_α et $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}P$ sont égales en tant qu'applications continues qui coïncident sur une partie dense.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Comme à chaque raisonnement par densité : se demander ce qui pouvait inciter à y penser. Noter aussi, à chaque fois, le rôle joué par la densité (pourquoi ?)

38. Comme P est à valeurs dans $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{C})$ (une primitive d'une fonction continue est de classe C^1), l'application $D\circ P$ est bien définie et donc $D\circ B_\alpha$ aussi (en effet B_α et P sont proportionnels par la question précédente). Comme : $D\circ P = \mathrm{Id}_E$, et : $P = \dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}B_\alpha$, par linéarité on a le résultat : $D\circ B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{Id}_E$.
39. La question précédente montre que la composition $D\circ B_\alpha$ est injective, donc B_α est injective. On en déduit que la composition $A_{1-\alpha}\circ A_\alpha = B_\alpha$ est injective, donc A_α est injective : d'où le résultat.