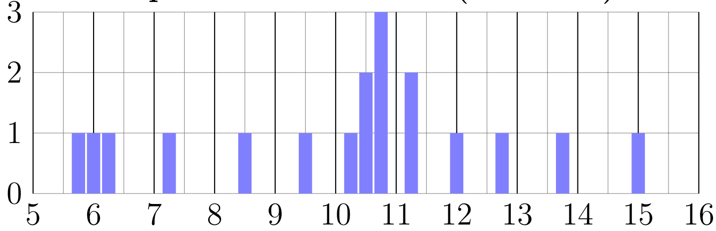
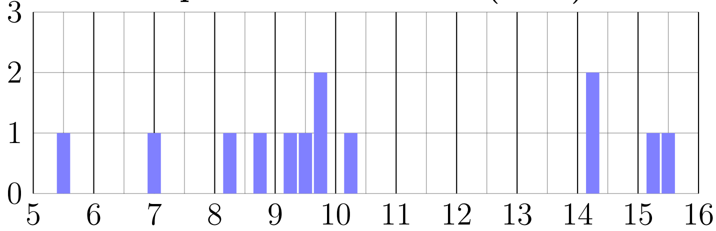
Devoir sur table n° 11 – Compte rendu

Répartition des notes (Centrale).



Barème initial sur **68 points**.
Moyenne : 10,15. **Écart-type :** 2,59.
Premier quartile : 8,75. **Médiane :** 10,625.
Troisième quartile : 11,25.

Répartition des notes (ENS).



Barème initial sur **239 points**.
Moyenne : 10,56. **Écart-type :** 3,23.
Premier quartile : 8,75. **Médiane :** 9,75.
Troisième quartile : 14,25.

Redite des devoirs précédents.

1. Dire « $S^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$ donc $\frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(S^{-1})$ » est faux si on ne précise pas que X est NON NUL. C

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

2. Cessez d'écrire « théorème spectralE », vous me provoquez des ulcères.
3. Parenthésez vos expressions : $\sum_i (u_i - 1)$ et $\sum_i u_i - 1$ ne sont pas la même chose. Même lorsqu'il semble ne pas y avoir ambiguïté ($\sum_i (u_i - v_i)$), parenthésez par confort pour le correcteur : plus on laisse de part interprétative dans une rédaction et moins la lecture est fluide (libre à lui de le sanctionner comptablement, surtout s'il y a un barème dédié au soin).
4. Plusieurs élèves font de longs calculs et relèguent à plus tard (parfois à la page suivante) les explications. Pourquoi pas, mais indiquez *clairement* (par un symbole par exemple) que les explications viennent plus tard. Autrement, votre raisonnement est obscur dans un premier temps et cela laisse une impression désagréable. ENS
5. Plus particulièrement en début de problème, et à plus forte raison lorsqu'il s'agit d'utiliser pour la première fois une notion *définie dans l'énoncé* (ici : la connexité d'un graphe), soignez votre rédaction. Sinon, comment être certain que vous avez compris comment l'utiliser ? ENS

Imprécisions mathématiques.

6. Je vous recommande de trouver une démonstration de l'égalité $\mathrm{Sp}(S^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(S)\}$ n'utilisant pas le théorème spectral. En effet vous pouvez avoir besoin de cette égalité y compris pour des matrices non diagonalisables (elle reste vraie). C
7. La notion d'endomorphisme *induit* est-elle bien comprise ? Notamment, que la seule chose qui le distingue d'une banale *restriction* est l'espace d'arrivée ? Il n'est pas possible de prétendre que l'endomorphisme induit par $v \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ sur E_λ est $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ (au lieu de $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_{E_\lambda}$). Dire que cet endomorphisme induit est $\sqrt{\lambda}p_\lambda$ est tout aussi étonnant – même si là, l'incompréhension est peut-être plutôt du côté du sens des projecteurs spectraux – puisque p_λ coïncide avec l'identité quand on le restreint à son image E_λ (comme tout projecteur). C
8. La codiagonalisation des endomorphismes diagonalisables qui commutent n'est pas au programme : il faut la redémontrer. C
9. Quand on montre qu'une matrice est symétrique (définie) positive, n'oubliez pas la symétrie. C
10. Beaucoup d'élèves ont sauté la décomposition OS explicite d'une matrice A d'ordre 3. Il suffisait pourtant de mettre en pratique la construction que vous aviez proposée de O et S, en diagonalisant $A^\top A$ dans une base orthonormée. C
11. Certains ont prétendu que $A \mapsto \sqrt{A^\top A}$ (notation abusive) est continue car polynomiale en A. On a en effet montré que $\sqrt{A^\top A}$ est un polynôme en $A^\top A$, mais les coefficients dudit polynôme dépendent des valeurs propres de A (*via* les polynômes interpolateurs de Lagrange associés) : est-ce que ces valeurs propres varient continûment avec A ? Problème ardu (voir DST n° 6). C

12. Lorsque les racines d'une équation caractéristique (liée à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2) ont une forme exponentielle connue $\rho e^{\pm i\theta}$ et qu'on cherche les suites *réelles* vérifiant la relation de récurrence associée, il est certes possible de les écrire $u_n = \rho^n\left(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\right)$. Cependant, si vous devez trouver α et β par résolution d'un système, je trouve préférable d'écrire u_n avec les exponentielles, car $e^{\pm 2i\theta}$ et $e^{\pm i\theta}$ se simplifient par des opérations sur les lignes très basiques (au contraire de $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$ et $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$). C
13. Une isométrie, en plus de conserver la norme, doit être LINÉAIRE. ENS

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

14. Quelques élèves pensent que « définie » et « définie positive » sont synonymes : non, il est faux de penser que si $X^\top AX = 0$ implique toujours $X = 0$, alors A est définie positive : elle peut être définie négative (prendre $A = -\mathrm{I}_n$). C
15. Beaucoup d'élèves oublient le rôle décisif des bases ORTHONORMÉES en géométrie. Par exemple, l'équivalence « v autoadjoint $\iff$ $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(v)$ symétrique » devient FAUSSE si $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée, or vous avez été plusieurs à vous en servir pour l'existence d'une racine carrée de u. C

    De même, l'égalité $\sum\limits_{i=1}^n x_i^2 = \|\vec{x}\|^2$ est vraie dans une base ORTHONORMÉE (omission fréquente), et l'égalité $\left\langle \sum\limits_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \sum\limits_{i=1}^n y_i\vec{e}_i \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$ peut s'invoquer directement sans refaire le calcul. ENS
16. La démonstration de l'unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique positive suit au fond la même stratégie que celle des exercices de travaux dirigés montrant « $A^3 = B^3 \implies A = B$ » et « $\exp(A) = \exp(B) \implies A = B$ » (à chaque fois avec A et B réelles et diagonalisables) : on montre que A et B commutent (l'interpolation de Lagrange intervient à chaque fois pour écrire l'une comme un polynôme en l'autre) et sont codiagonalisables. En les écrivant $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$, on arrive à utiliser l'hypothèse pour conclure que $D = D'$. À revoir éventuellement. C
17. Même si vous ne parveniez pas à retrouver comment se démontre l'unicité de la racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif, vous pouviez au moins montrer l'existence (qui, je vous l'ai dit, ne nécessite pas de raisonner sur les endomorphismes : c'est pour l'unicité que c'est essentiel). Elle est triviale dès qu'on a écrit la matrice de u dans une base orthonormée de vecteurs propres (il suffit de mettre des racines carrées sur la diagonale : c'est intuitif) et il m'étonne d'avoir vu cette question être sautée par plusieurs copies. C
18. Quand on vous fait montrer qu'un endomorphisme est un polynôme en un autre, c'est souvent pour vous faire démontrer des relations de commutation plus tard : rares sont ceux y ayant pensé pour passer de $BS^2 = S^2B$ à $BS = SB$ (on a montré que S est un polynôme en S^2). C
19. Beaucoup de choses indiquent une mécompréhension du sens des projecteurs spectraux. Si $(p_i)_i$ est une famille de projecteurs associés à une décomposition $E = \bigoplus_i F_i$ (non nécessairement des projecteurs spectraux), il faut bien comprendre que l'égalité $f = \sum_i f_i \circ p_i$ ne dit RIEN DE PLUS que $f_{|F_i} = f_i$ (on sait que pour définir une application linéaire sur E, il suffit de la définir sur les F_i, et l'égalité précédente dit *comment* passer des restrictions à l'application sur E). En particulier, pour tout i et tout $\vec{x} \in F_i$ on a $f(\vec{x}) = f_i(\vec{x})$. C'est tout ce que dit cette égalité ! C

    Rappelons pourquoi c'est la même chose : si $E = \bigoplus_i F_i$, on peut écrire $\vec{x} = \sum_i \vec{x}_i$ avec $\vec{x}_i \in F_i$ pour tout i. Par linéarité : $f(\vec{x}) = \sum_i f(\vec{x}_i) = \sum_i f_i(\vec{x}_i)$. Or par définition $\vec{x}_i$ est la projection de $\vec{x}$ sur F_i parallèlement aux autres F_j (donc à $\bigoplus_{j\neq i} F_j$), d'où : $f(\vec{x}) = \sum_i f_i(p_i(\vec{x}))$.

    En particulier, si f est diagonalisable, l'égalité $f = \sum_\lambda \lambda p_\lambda$ (les p_λ sont les projecteurs spectraux) est simplement la traduction de deux faits : 1° on a $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda$, donc f est caractérisé par son expression sur les E_λ ; on a $f = \sum_\lambda f_{|E_\lambda} \circ p_\lambda$, 2° or $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in E_\lambda$, d'où le résultat.

    Ce n'est d'ailleurs pas nouveau : si p et s sont un projecteur et une symétrie ayant les mêmes caractéristiques géométriques, alors l'égalité $s = p - (\mathrm{Id} - p) = 2p - \mathrm{Id}$ est une décomposition spectrale (pourquoi ?) et la traduction *immédiate* de la définition d'une symétrie (pourquoi ?).

Toute cette discussion implique plusieurs choses : 1° l'endomorphisme induit par $v = \sum_\lambda \sqrt{\lambda} p_\lambda$ sur E_λ est $\sqrt{\lambda}\mathrm{Id}$, c'est immédiat ; 2° l'égalité $f^2 = \sum_\lambda \lambda^2 p_\lambda$ découle du fait trivial que si $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in E_\lambda$, alors $f^2(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in E_\lambda$; 3° en écrivant $v = \sum_\lambda \sqrt{\lambda} p_\lambda$, on dit très concrètement que $v(\vec{x}) = \sqrt{\lambda}\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in E_\lambda$, et comme $E_\lambda \neq \{\vec{0}\}$ cela démontre sans calcul que $\sqrt{\lambda}$ est valeur propre de v (on n'a fait qu'un effort de traduction) : nul besoin de le démontrer en introduisant une base de vecteurs propres ; 4° la matrice de v dans une base adaptée à $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda$ est une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont de la forme $\sqrt{\lambda}\mathrm{I}_d$. Plus généralement, avec les notations ci-dessus : si $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ est une base adaptée à $E = \bigoplus_i F_i$ et si F_i est stable par f, alors $\mathrm{M}_\mathcal{B}(f)$ est diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(f_i)$ (normal, vu que f_i est la restriction de f à F_i).

Tout ce que je viens de dire là ne doit pas faire l'objet d'une démonstration : c'est du cours et *cela se voit à l'œil nu sur l'écriture de v*. Il faut en avoir conscience pour efficacement utiliser un endomorphisme décrit avec des projecteurs associés une décomposition.

20. Je trouve incompréhensible le nombre extraordinairement faible d'élèves sachant exprimer une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à l'aide des racines de l'équation caractéristique (même si la détermination des coefficients, ensuite, nécessitait un peu d'habileté). Rappelons que même en cas d'oubli, les méthodes pour retrouver l'explicitation de telles suites ne manquent pas (lemme des noyaux, mise sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, passage par une série entière génératrice). C

21. Lorsqu'il fallait expliciter la matrice A telle que $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=j}^{n} m_{i,j} = \mathrm{tr}(AM)$ pour tout M, certains élèves ont simplifié le membre de droite puis « identifié » pour en déduire $a_{j,i}$; mais pourquoi peut-on identifier ? Vous deviez pour cela rappeler l'unicité de la matrice A à convenir, ou dire : « pour que A convienne, il *suffit* d'avoir $a_{i,j} = \cdots$ » C

22. Presque tout le monde prétend que si $\mathcal{B}$ est une base de E et W un sous-espace vectoriel de E, alors W est engendré par une famille extraite de $\mathcal{B}$. C'est une bêtise extraordinaire contredite par des dessins triviaux dans le plan (votre résultat impliquerait en outre qu'il n'y a que $2^{\dim(E)}$ sous-espaces vectoriels de E : vous savez bien qu'il y en a une infinité si K est infini). ENS

    Vous aviez besoin, dans votre raisonnement, de l'existence d'un vecteur non nul dans $W \cap F_k$ avec W quelconque : souvenez-vous que la théorie de la dimension permet de démontrer des existences. En particulier, si W et F_k sont tous deux « gros », la formule de Grassmann assure que $\dim(W \cap F_k) > 0$. J'en fais mention dans le document de révisions que je vous ai rédigé durant les vacances : revoyez ce genre de raisonnement, surtout dans le cas d'une intersection (et vous avez des intersections dès que vous voulez des vecteurs vérifiant des conditions simultanées). Exemple concret à revoir éventuellement : tout hyperplan de $\mathrm{M}_n(K)$ contient au moins une matrice inversible. Plus proche du programme de 2e année : tout sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(K)$ constitué uniquement de matrices nilpotentes est de dimension au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ (raisonner par contraposée et considérer l'intersection avec un sous-espace vectoriel que vous connaissez très bien et ne contenant que des matrices diagonalisables).

23. Revoyez le principe de conjugaison dans S_n, qui est la CLÉ (partout en algèbre mais surtout ici) pour se ramener à des permutations vérifiant exactement ce que vous voulez (dans le cadre de ce devoir : transformer toute permutation $\sigma \in A_4$ en une permutation paire fixant 4). ENS

24. Personne n'a remarqué que le caractère bijectif de $x \mapsto Ax + b$ de $\mathbb{Z}^p$ dans $\mathbb{Z}^p$ ne va absolument pas de soi, même pour $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{Z})$ inversible. Il est par exemple faux pour $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: le vecteur (1,0) n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{Z}^p$ par cette application. C'est encore pire si l'on réduit modulo n (la matrice précédente n'est plus inversible modulo n si n est pair, et écrire $A^{-1}(y - b)$ n'a plus aucun sens). ENS

    La clé était ici un résultat pourtant classique (j'espère que vous le retiendrez désormais) : l'inverse d'une matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 est aussi à coefficients entiers. Très important pour s'assurer que $y \mapsto A^{-1}(y-b)$ envoie bien $\mathbb{Z}^p$ dans $\mathbb{Z}^p$ également, et que c'est la bijection réciproque de $x \mapsto Ax+b$!

Ces bijections sont présentes en algèbre comme en analyse (lorsqu'interviennent des sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$) et vous êtes susceptibles de retomber dessus.

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

Sujet type Centrale :

— première partie : question 2 (c'est cependant du cours), question 3, question 8 ;
— deuxième partie : question 13, question 15 ;
— troisième partie : questions 20 à 22 (très grande surprise pour moi) ;
— quatrième partie : question 26.

Sujet type ENS :

— première partie : questions 4, 10 et 11 ;
— deuxième partie : questions 13 et 17 (je pense que ma démonstration alternative est préférable car elle s'appuie sur des principes généraux) ;
— troisième partie : question 23 ;
— quatrième partie : questions 32 et 33.