

DEVOIR SUR TABLE N° 11

(corrigé, type ENS, Mathématiques D)

Table des matières

1	Commentaires	1
2	Rapport officiel de l'épreuve	2
2.1	Statistiques	2
2.2	À propos du barème	3
2.3	Remarques générales	3
2.4	Partie I	4
2.5	Partie II	5
2.6	Partie III	5
2.7	Partie IV	6
3	Corrigé	7

1 Commentaires

Ce sujet est une reproduction à l'identique de l'épreuve de Mathématiques D du concours X-ENS, année 2016, filière MP.

On étudie des graphes par des outils géométriques (structure euclidienne), là où il est plus classique de les étudier *via* des outils algébriques (matrice d'incidence).

Néanmoins l'algèbre n'est pas très loin : lorsque le graphe étudié est un *graphe de Cayley* (c'est-à-dire un graphe dont les sommets sont les éléments d'un groupe G , dont on fixe un système de générateurs S , et les arêtes partant d'un sommet $g \in G$ lient tous les sommets de la forme gs ou sg avec $s \in S$), on peut relier le graphe à des automorphismes d'un espace vectoriel grâce à une *représentation de groupe* (c'est-à-dire un morphisme $G \rightarrow \text{GL}(E)$). L'intérêt de l'approche est *toujours* la possibilité, lorsqu'on raisonne dans $\text{GL}(E)$, d'utiliser des techniques d'algèbre linéaire (réduction, théorie de la dimension) qui n'existent pas dans G (et à plus forte raison sur un graphe dépourvu de structure algébrique).

Cette étude d'une représentation de groupe est dans la partie II qui est, je pense, la partie la plus difficile du devoir (même si le rapport de jury met la partie III encore au-dessus). Cela me permet de souligner l'importance de *savoir passer à la suite* si on bute trop longtemps sur une question, même si une épreuve de six heures permet de réfléchir à davantage de tentatives avant de renoncer (et d'ailleurs, l'extrait de barème donné par le rapport de jury montre que les questions difficiles ont une solide gratification). Dans un sujet type ENS, des questions très difficiles peuvent se présenter assez tôt.

La partie IV utilise la transformation de Fourier sur le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, dont l'utilité fut déjà expliquée en quelques occasions (commentaires du devoir maison n° 4, du devoir sur table n° 4) et qui est peu ou prou la même chose que l'utilité des représentations : la transformation de Fourier permet de travailler dans \mathbb{C} qui peut être plus commode. (En fait, la transformation de Fourier est intimement liée aux représentations de groupes, mais il faut faire des mathématiques extrêmement avancées pour voir un tel lien. Il serait vain de chercher à l'expliquer avec les outils de classes préparatoires.)

On démontre (implicitement) dans ce devoir la formule d'inversion de Fourier, valable dans tout groupe fini commutatif.

Le corrigé est d'Erwan Biland et Denis Pétrequin (professeurs de Mathématiques de MP* et MP au lycée Chateaubriand de Rennes). Je n'ai retouché que quelques détails çà et là, pour de pures

considérations cosmétiques ou des compléments en remarque (surtout dans les questions de théorie des groupes : je ne vois pas pourquoi je ne me joindrais pas à la fête).

↪ Ce qu'on retiendra en bref. Lien entre extremums de $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle$ et valeurs propres (pour f autoadjoint). Théorème de Courant-Fischer. L'espace \mathbb{R}^V est engendré par les fonctions indicatrices. Générateurs du groupe alterné. Principe de conjugaison. Déterminer les morphismes d'un groupe dans un autre (commutatif) *via* le sous-groupe dérivé. Distance sur un graphe connexe. Transformation et inversion de Fourier sur un groupe fini commutatif.

↑ Questions faciles ou classiques à retravailler

- PREMIÈRE PARTIE : questions 1 à 3, question 11 ;
- DEUXIÈME PARTIE : questions 12 à 16 ;
- TROISIÈME PARTIE : questions 21, 26 et 29 ;
- QUATRIÈME PARTIE : questions 32 à 34.

2 Rapport officiel de l'épreuve

L'épreuve de six heures de mathématiques de la session 2016 concernait l'étude des spectres des graphes finis. La première partie établissait des estimations générales des valeurs propres s'appuyant entre autres sur la méthode du minimax. La deuxième partie étudiait le cas du Buckminsterfullerène, c'est-à-dire le graphe de Cayley du groupe A_5 . L'étude du spectre se ramenait essentiellement à l'étude des représentations de A_5 . La troisième partie introduisait la constante de Cheeger – ou constante isopérimétrique – et la liait au diamètre et à la deuxième valeur propre du graphe. En complément, on s'intéressait au cas où le graphe pouvait être dessiné sur une sphère. Les raisonnements étaient pour la plupart géométriques. Finalement, la quatrième partie avait pour but de construire une famille de graphes dont la deuxième valeur propre est uniformément minorée. Ces graphes, découverts par Gabber et Galil en 1980 sont les premiers exemples élémentaires de graphes expenseurs. Après des préliminaires sur la transformation de Fourier discrète, cette partie s'appuyait sur des majorations simples et des arguments combinatoires. La plupart des résultats traités dans le sujet sont tirés du livre d'Yves Colin de Verdière sur les spectres de graphes.

Le sujet était bien sûr très long et n'a été traité entièrement par aucun candidat. Les quatre parties étaient indépendantes et dans l'ordre de difficulté pouvaient être ordonnées en I, IV, II, III. Ci-dessous, on donne la notation de l'épreuve et quelques commentaires généraux, puis on détaille le traitement de chaque partie par les candidats.

2.1 Statistiques

La répartition des notes à l'épreuve de Mathématiques D est la suivante :

$0 \leq N < 4$	407	39,13%		
$4 \leq N < 8$	367	35,29%		
$8 \leq N < 12$	164	15,77%		
$12 \leq N < 16$	82	7,88%		
$16 \leq N \leq 20$	20	1,92%		
Total	1040	100%		
			Moyenne	5,83
			Note minimale	0
			Note maximale	20

2.2 À propos du barème

L'épreuve a été corrigée en attribuant très peu de points aux questions faciles et beaucoup de points aux questions difficiles et/ou longues. Le grappillage de points a donc été très sévèrement puni. À titre indicatif, sur 20 :

- les questions 2 et 6 rapportaient 0,29 point ;
- les questions 11 et 32 rapportaient 0,57 point ;
- les questions 4 et 26 rapportaient 1,14 point ;
- les questions 8 et 14 rapportaient 1,71 point ;
- la question 23 rapportait 2,28 points ;
- la question 17 rapportait 2,86 points ;
- la question 27 rapportait 3,43 points.

2.3 Remarques générales

Les élèves sont très mal à l'aise avec les groupes, et en particulier ont du mal à manipuler des groupes non commutatifs : dans les questions 12 à 14, beaucoup d'élèves composent dans le mauvais sens ; à la question 17, pour un grand nombre d'élèves, le groupe orthogonal est commutatif.

Les élèves confondent les différentes manières de noter les permutations.

Certaines confusions graves d'algèbre commutative : définition d'un endomorphisme autoadjoint ; si (e_1, \dots, e_n) est une base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel V et W en est un sous-espace, W ne possède pas forcément une base extraite de (e_1, \dots, e_n) ; si v_1, \dots, v_n sont des vecteurs propres d'un endomorphisme φ d'un espace vectoriel de dimension n et les valeurs propres correspondantes sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, il ne faut pas oublier de vérifier que v_1, \dots, v_n forment une base avant de conclure que les valeurs propres de φ sont bien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; beaucoup de candidats ne savent pas que l'adjoint est représenté par la matrice transposée.

Un nombre trop important d'élèves écrit des non-sens : par exemple, à la question 16, beaucoup de candidats appliquent T_G ou L_g à un nombre réel.

On retrouve souvent des phrases qui mettent en évidence une mauvaise compréhension des notions apprises en classe préparatoire. Par exemple :

- « φ est une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même cardinal, donc un isomorphisme ».
- « si $g \in A_5$, alors $\begin{cases} A_5 & \rightarrow & A_5 \\ h & \mapsto & g^{-1}h \end{cases}$ est un isomorphisme de groupes ».

La qualité de la rédaction est souvent très mauvaise. En particulier, un nombre important de candidats ne sait pas quantifier correctement. S'il le considère utile, à partir de la prochaine session, le jury pourra décider d'attribuer des points supplémentaires aux copies correctement rédigées et correctement quantifiées.

Beaucoup de candidats essayent de résoudre certaines questions en utilisant des questions antérieures mais oublient de vérifier les hypothèses : par exemple, pour la question 28, beaucoup de candidats utilisent la question 27 en ignorant l'hypothèse sur f .

Le jury déplore qu'un nombre trop important de candidats fait preuve de peu d'honnêteté intellectuelle et cherche à faire croire au correcteur qu'une question a été résolue en cachant le point

faible du raisonnement dans de longues explications.

2.4 Partie I

C'est la partie la plus facile et la mieux traitée par les candidats.

1. La question est en général à peu près correctement traitée, mais les explications et la rédaction sont souvent trop floues. On rappelle aux candidats qu'ils doivent particulièrement soigner leur rédaction en début de sujet. Par exemple, ici, il fallait indiquer précisément l'endroit où l'on utilisait l'équivalence :

$$\forall(x, y) \in V, \quad (x, y) \in E \iff (y, x) \in E$$

ainsi qu'écrire clairement les changements de variables réalisés. Quelques candidats croient montrer qu'un endomorphisme est autoadjoint en prouvant $\langle T_G f, f \rangle = \langle f, T_G f \rangle$. Quelques rares candidats écrivent des non-sens en appliquant par exemple l'endomorphisme T_G à un nombre réel.

2. Question très facile et très bien traitée en général. Insistons encore une fois qu'en début de sujet la rédaction doit être très soignée : on attendait en particulier que les candidats indiquent l'endroit où ils utilisaient l'orthonormalité de la base (e_1, \dots, e_n) . Certains candidats se trompent et écrivent $\|f\| = \sum_{i=1}^n f_i^2$.
3. Question facile et assez bien traitée. On attendait toujours une rédaction soignée : il fallait donc éviter dans la deuxième partie de la question de diviser par 0.
4. La plupart des candidats montrent correctement que :

$$\lambda_k \geq \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \sup_{f \in W \cap S} q_G(f).$$

Par contre, assez peu de candidats établissent correctement l'autre inégalité. Beaucoup de candidats se trompent et affirment que tout sous-espace vectoriel de dimension k de \mathbb{R}^V admet une base formée de k vecteurs parmi e_1, \dots, e_n : cela met en évidence un manque de compréhension de l'algèbre linéaire élémentaire. Par contre, le jury a été agréablement surpris par le faible nombre d'erreurs liées à la manipulation des bornes inférieures et supérieures.

5. Cette question a été moyennement traitée. Un nombre assez important de candidats oublie d'invoquer la connexité du graphe pour conclure. On s'attendait toujours à une rédaction assez précise : il fallait au moins expliquer brièvement comment la connexité intervenait et ne pas oublier de mentionner que les fonctions constantes étaient bien dans le noyau de T_G . Certaines copies cherchent à faire une récurrence sur le nombre de sommets du graphe : ça n'a été fait correctement que très rarement, puisqu'il était difficile de gérer par cette méthode l'hypothèse de connexité du graphe.
6. Question très facile et souvent bien traitée. Certaines copies utilisaient les questions 3 ou 4, ce qui compliquait inutilement la résolution de la question.
7. Question très facile et très bien traitée. Il fallait juste faire attention à indiquer que $|f(x)| > 0$ pour ne pas diviser par 0.
8. Question relativement bien traitée. Les candidats qui ne l'ont pas résolue n'ont tout simplement pas réussi à exhiber un vecteur propre associé à la valeur propre $2d_G$.
9. Première question plutôt difficile du sujet. Si beaucoup de candidats ont sauté la question, la plupart des bons candidats ont réussi à la résoudre. L'erreur la plus courante a été d'utiliser les cas d'égalité dans les inégalités de la question 7 sans se rappeler que ces dernières n'étaient valables que si l'on se plaçait sur un sommet $x \in V$ tel que $|f(x)|$ est maximal.

10. Question assez facile et moyennement traitée. Un nombre important de candidats utilise à tort la question 3 (au lieu de la question 4), sans remarquer que l'espace F_k dépend de l'ensemble des arêtes E .
11. La première partie de la question a été moyennement traitée. Les candidats qui l'ont traitée ont procédé par des méthodes assez variées, ce qui a fait plaisir au jury. La deuxième partie de la question a été en général correctement traitée.

2.5 Partie II

Dans cette partie de niveau plus élevé, les candidats ont été amenés à manipuler des groupes classiques de permutations et d'isométries en lien avec l'algèbre linéaire. La plupart des copies abordent cette partie, mais beaucoup passent directement à la partie III après la question 16. Plus difficiles, les questions à partir de la 17 étaient largement valorisées par le barème.

12. Cette question très facile a été généralement bien traitée. Elle a cependant posé des difficultés aux (trop nombreux) candidats qui ne maîtrisent pas la notation cyclique des permutations.
13. Beaucoup de confusions sur l'ordre de composition des permutations! Rappelons aussi que A_3 n'est pas un sous-ensemble de A_4 : on attendait que la restriction soit explicitée. Enfin, certains candidats associent à tout $\sigma \in A_4$ un $\tilde{\sigma}$ tel que $\tilde{\sigma}(4) = 4$, mais oublient ensuite de revenir à σ .
14. Cette question plus calculatoire a été rarement abordée et rarement réussie. L'essentiel consistait à engendrer le cycle $(1\ 2\ 3)$ avec a et b . Peu de copies y parviennent sans fautes.
15. La plupart des candidats omettent d'établir le caractère non orienté du graphe, ce qui empêche de déduire la connexité à partir de l'existence d'un chemin de l'identité à tout élément. Par ailleurs, il ne suffisait pas de rappeler que A_5 est engendré par a et b en tant que groupe pour justifier que tout élément est produit de facteurs a ou b : par exemple, \mathbb{Z} est engendré par 1 en tant que groupe additif. La pire erreur était de considérer que A_5 est commutatif.
16. Bien que facile, cette question a été assez mal réussie. La définition d'une isométrie n'est pas toujours connue. Les manipulations de fonctions, en particulier les compositions, ont donné lieu à de très nombreuses erreurs de syntaxe particulièrement inquiétantes à ce niveau.
17. Cette question difficile n'est abordée de manière substantielle que par les meilleures copies, mais même parmi celles-ci, beaucoup confondent les groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. Une autre erreur récurrente consistait à affirmer que tout morphisme d'un groupe non commutatif vers un groupe commutatif est trivial. D'excellents candidats ont cependant traité la question parfaitement.
18. Personne n'a réussi cette question qui était certainement l'une des plus délicates du sujet. Aucun point n'a été attribué aux copies qui montraient seulement la stabilité de F .
19. Cette question assez ardue n'a été abordée avec succès que par une poignée de très bons candidats. La difficulté principale consistait à gérer correctement la restriction au sous-espace F . Rares sont ceux qui ont pensé à utiliser la question 18.
20. Il semblait nécessaire d'avoir bien compris la question précédente pour réussir celle-ci.

2.6 Partie III

Cette partie, la plus « géométrique », a été assez largement abordée et souvent de manière linéaire, sans grappillage abusif. Le niveau des questions est très variable, du plus simple pour les premières au plus difficile pour les questions 27, 30 et 31. La question 27 n'a jamais été correctement traitée, les questions 30 et 31 ont reçu des réponses partielles, pour lesquelles l'intuition géométrique a été valorisée.

21. Question préliminaire purement formelle. Il est surprenant de constater qu'elle a posé des difficultés à un grand nombre de candidats, qui préfèrent de vagues explications au recours à la

définition précise de d et au raisonnement par double inégalité (pour la symétrie). Son faible coefficient n'a pas entraîné d'excessive pénalité dans ce cas, mais on ne peut que souligner la nécessité d'améliorer l'approche de ce type de raisonnement purement systématique (à l'image de la question 16).

22. L'identification de $B(A, 0)$ à A est immédiate. La preuve de l'inégalité demandait un peu de soin, pour expliciter la relation entre le bord ∂A et le complémentaire $B(A, 1) \setminus A$. Peu de copies y parviennent parfaitement, mais une majorité donne des arguments assez convaincants pour être pris en compte. Certaines copies n'hésitent cependant pas à utiliser des justifications manifestement frauduleuses, et sont de ce fait sévèrement sanctionnées.
23. Question plus difficile et moins fréquemment abordée, mais en général assez réussie. L'itération de l'inégalité obtenue dans la question précédente (sous contrainte de majoration du cardinal par $\text{card}(V)/2$) a été bien vue en général. Il s'agissait ensuite d'exploiter le résultat en l'appliquant à des boules de cardinal suffisant pour qu'elles admettent une intersection non vide, en tenant compte des problèmes liés à la division par 2 du cardinal de V . Ce dernier point mis à part, les solutions proposées étaient en général satisfaisantes.
24. Question souvent abordée et en général assez bien traitée. L'orthogonalité de f au noyau de T_G est immédiate à partir de la question 5. L'expression de $q_G(f)$ est un simple calcul, la forme de f entraîne une décomposition de $q_G(f)$ en deux sommes à supports disjoints. L'identification des termes de bord dans ces deux sommes a souvent été traitée un peu légèrement.
25. Question facile, conséquence immédiate de la question précédente et de la question 3, à condition d'utiliser correctement la définition de h_G comme borne inférieure. La question a été bien traitée en général, mais ce dernier point a été la cause de quelques erreurs.
26. Comme la question 23, cette question est moins souvent abordée mais l'est en général avec succès. Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de faire apparaître le terme $q_G(f)$, le terme complémentaire se traite alors soit directement, soit par une deuxième application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
27. Question très délicate, malgré l'indication. Elle n'a jamais été convenablement traitée.
28. Question assez simple à condition de penser à introduire la partie positive d'une fonction propre ayant suffisamment d'images positives. Bien que techniquement plus accessible que la précédente, elle n'a jamais été abordée avec assez de pertinence pour mériter une notation.
29. Question rarement abordée, bien qu'elle se déduise facilement de la partie I après choix d'une base orthonormée de \mathcal{E} . Les solutions proposées ont souvent été assez approximatives.
30. Question très rarement abordée. L'interprétation géométrique de la troisième condition semble avoir été la source principale de difficulté. Plusieurs copies ont l'intuition correcte conduisant à réaliser les points de V comme sommets d'un tétraèdre régulier, mais ne parviennent pas à déterminer les coordonnées de ces sommets. La vérification de la troisième condition est alors impossible, mais là encore certaines copies ont proposé un raisonnement intuitif (par symétrie et « valeurs intermédiaires » par exemple) qui méritait d'être pris en compte.
31. Comme la précédente, question très rarement abordée car elle nécessite une bonne visualisation géométrique de la question 29. Quelques germes de solutions essentiellement intuitifs ont été valorisés.

2.7 Partie IV

Dernière partie du sujet, elle est sans surprise la moins traitée. Demandant une certaine aisance technique, elle ne présente toutefois pas de question insurmontable (exceptée la 38). Le grappillage dans cette partie n'a été que très rarement récompensé et on ne saurait trop conseiller aux candidats d'aborder un sujet de concours de façon linéaire, la longue durée de l'épreuve autorisant une véritable immersion dans le sujet.

32. La question demande un calcul en transformée de Fourier discrète. Il était important de bien comprendre les notations pour se ramener proprement au fait que les sommes des n premières puissances d'une racine n^e de l'unité, non égale à 1, vaut 0.
33. Un changement de variable. Un argument convaincant expliquant pourquoi la transformation était bijective était attendu. Beaucoup de candidats ne font pas le lien entre l'adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien et la transposée de sa matrice écrite dans une base orthonormée.
34. Question plus difficile. Un candidat justifiant uniquement la connexité et la régularité du graphe n'était pas récompensé. Les fonctions χ_y sont des vecteurs propres de l'endomorphisme défini sur \mathcal{H}_n par la même formule que T_G ; un argument expliquant ce passage du réel au complexe était attendu. Par ailleurs, pour conclure que toutes les valeurs propres sont ainsi trouvées, il faut encore montrer que les χ_y forment une base de \mathcal{H}_n , par exemple en utilisant 32.
35. La question ne pose aucune difficulté.
36. Question délicate rarement bien traitée. On peut suivre l'indication de l'énoncé et remarquer que si f est vecteur propre de T , alors \hat{f} est vecteur propre de \hat{T} , pour la même valeur propre. Il s'agit alors essentiellement de comprendre la relation entre \hat{T} et U .
37. Une fois posé $G = |F|$, les calculs sont élémentaires.
38. Cette question n'a été correctement traitée par aucun candidat. Elle ne présente pas de difficulté conceptuelle mais nécessite de nombreuses disjonctions de cas pour conclure correctement. Une réponse couvrant une partie des cas aurait été valorisée.
39. Les inégalités ne posent pas de grosse difficulté. Il faut cependant faire attention dans l'utilisation de la question 38 où x est supposé dans $D_n \setminus \{(0, 0)\}$: deux cas sont donc à traiter.
40. Comme $\gamma(x, y) = \gamma(y, x)^{-1}$, il s'agissait d'appliquer l'inégalité arithmético-géométrique généralisée :

$$2ab = 2 \left(\lambda^{1/2} a \right) \left(\lambda^{-1/2} b \right) \leq \lambda a^2 + \lambda^{-1} b^2,$$

avec a, b, λ des réels strictement positifs.

3 Corrigé

PREMIÈRE PARTIE

Notation. Soit (V, E) un graphe et $x \in V$, on notera $E(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$ l'ensemble des voisins d'un sommet x dans le graphe.

1. L'application T_G est un endomorphisme de \mathbb{R}^V de manière claire. Montrons qu'il est autoadjoint. En effet, pour tout $(f, g) \in (\mathbb{R}^V)^2$:

$$\langle T_G f, g \rangle = \sum_{x \in V} (T_G f)(x) g(x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in E(x)} (f(x) - f(y)) g(x) = \sum_{(x, y) \in E} f(x) g(x) - \sum_{(x, y) \in E} f(y) g(x).$$

Comme le graphe est non orienté (c'est-à-dire que si $(x, y) \in E$ alors $(y, x) \in E$) :

$$\sum_{(x, y) \in E} f(y) g(x) = \sum_{(x, y) \in E} g(y) f(x).$$

On en déduit :

$$\langle T_G f, g \rangle = \sum_{(x, y) \in E} g(x) f(x) - \sum_{(x, y) \in E} g(y) f(x) = \langle f, T_G g \rangle.$$

On a bien montré que T_G est autoadjoint. Maintenant :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} (f(x) - f(y))^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} f(x)^2 + \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} f(y)^2 - \sum_{(x,y) \in E} f(x)f(y) \\
 &= \sum_{(x,y) \in E} f(x)^2 - \sum_{(x,y) \in E} f(x)f(y) && ((x,y) \in E \iff (y,x) \in E) \\
 &= \langle T_G f, f \rangle \\
 &= q_G(f),
 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. On a montré que q_G est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire $(f, g) \mapsto \langle T_G f, g \rangle$ (qui est symétrique parce que T_G est autoadjoint).

● **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**

- Si le graphe ne vérifie plus la propriété de non orientation, alors *a priori* T_G n'est plus autoadjoint. À votre avis, quel endomorphisme étudier à la place dans ce cas, pour récupérer le caractère autoadjoint ?
- Si on regarde les expressions de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, T_G et q_G , on note que si q est une forme quadratique, il semble y avoir un moyen naturel de fabriquer un endomorphisme autoadjoint f tel que $\vec{x} \mapsto \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = q(\vec{x})$: lequel ? Peut-on le justifier ?

2. Soit $f \in \mathbb{R}^V$ de la forme $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i$ où $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base orthonormée de vecteurs propres de T_G (il en existe par le théorème spectral). Comme le produit scalaire s'exprime comme le produit scalaire usuel dans une base orthonormée :

$$q_G(f) = \langle T_G f, f \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i e_i, \sum_{i=1}^n f_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i^2.$$

En particulier, si on applique cela à e_1 , on obtient : $q_G(e_1) = \lambda_1$. Or q_G ne prend que des valeurs positives d'après la formule obtenue à la question 1, donc : $\lambda_1 \geq 0$.

Remarque. On a démontré implicitement que T_G est autoadjoint positif.

● **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Cette expression de $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle$ à l'aide des valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint f est à connaître IMPÉRATIVEMENT. Mieux : même si l'énoncé n'y invite pas, vous devez *spontanément* l'écrire : elle est très utile ! (Surtout pour relier informations spectrales et produits scalaires).

3. Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $f \in F_k \cap S$. Une base de F_k est évidemment (e_{k+1}, \dots, e_n) , donc la fonction f admet une décomposition de la forme $f = \sum_{i=k}^n f_i e_i$. Dès lors :

$$q_G(f) = \sum_{i=k}^n \lambda_i f_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n f_i^2 = \lambda_k \|f\|^2 = \lambda_k$$

car pour tout $i \geq k$ on a : $\lambda_i \geq \lambda_k$.

On en déduit que λ_k est un minorant de l'ensemble $\{q_G(f) \mid f \in F_k \cap S\}$. La borne inférieure étant le plus grand minorant, on a : $\lambda_k \leq \inf_{f \in F_k \cap S} q_G(f)$.

Maintenant, dans le cas de $e_k \in F_k \cap S$, on trouve $q_G(e_k) = \lambda_k$, or : $q_G(e_k) \geq \inf_{f \in F_k \cap S} q_G(f)$. D'où l'égalité :

$$\lambda_k = \inf_{f \in F_k \cap S} q_G(f).$$

De plus, pour tout $f \in F_k$:

- si $f = 0$ alors $q_G(f) = 0 \geq 0$;
- si $f \neq 0$, on peut poser $u = \frac{f}{\|f\|} \in F_k \cap S$. D'après ce qui précède : $q_G(u) \geq \lambda_k$, et donc :

$$q_G(f) = \langle \|f\| T_G u, \|f\| u \rangle = \|f\|^2 q_G(u) \geq \lambda_k \|f\|^2.$$

● Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Comme souvent, constater qu'une égalité impliquant une borne supérieure ou inférieure passe par l'établissement d'une double inégalité : l'une s'obtenant par une majoration ou minoration des éléments de l'ensemble dont on considère la borne supérieure ou inférieure, et qui soit indépendante de ces éléments ; l'autre, en s'intéressant à la valeur en un élément particulier (parfois un passage à la limite est nécessaire, mais jamais en dimension finie).
- Illustration de l'emploi du théorème spectral pour relier informations sur le spectre et produits scalaires. Très classique.

4. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'espace vectoriel F_k est de dimension $n - (k - 1) = n - k + 1$. Pour tout $W \in \mathcal{W}_k$, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(W \cap F_k) = \dim(F_k) + \dim(W) - \dim(F_k + W) \geq (n - k + 1) + k - n = 1,$$

car $F_k + W \subseteq \mathbb{R}^V$ et donc $\dim(F_k + W) \leq n$. On en déduit qu'il existe un vecteur f_0 non nul dans $W \cap F_k$ que l'on peut même supposer unitaire. De ce fait : $\sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \geq q_G(f_0) \geq \lambda_k$ car $f_0 \in F_k$.

Ceci étant vrai pour tout $W \in \mathcal{W}_k$, on en déduit :

$$\lambda_k \leq \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \left(\sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \right).$$

Cependant, pour $W_0 = \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_k$ qui est de dimension k et $f = \sum_{i=1}^k f_i e_i \in W_0 \cap S$, on a :

$$q_G(f) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k f_i^2 = \lambda_k$$

de manière similaire au raisonnement de la question précédente. On en déduit : $\sup_{f \in W_0 \cap S} q_G(f) \leq \lambda_k$, d'où l'égalité :

$$\lambda_k = \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \left(\sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \right).$$

Remarque. C'est le théorème de Courant-Fischer. Il est valable pour tout endomorphisme autoadjoint et n'utilise pas la structure de graphe.

● Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Notons là une des rares occurrences en seconde année de l'utilisation de la théorie de la dimension pour démontrer des résultats d'existence (ici : celle d'un vecteur dans $W \cap F_k$ unitaire). Sa rareté ne doit pas faire sous-estimer son efficacité.
- Encore un exemple d'illustration de l'emploi du théorème spectral pour relier informations sur le spectre et produits scalaires. Très classique.

5. On veut montrer que si G est connexe alors $\ker(T_G)$ est constitué des fonctions constantes.

On remarque pour commencer que si f est constante alors $T_G f$ est la fonction nulle de manière évidente.

Réciproquement, soit f telle que $T_G f = 0$, on a alors en particulier : $q_G(f) = 0$, et donc que pour tout $(x, y) \in V^2$, si $(x, y) \in E$ alors $f(x) - f(y) = 0$ et donc $f(x) = f(y)$.

Maintenant soient x et y deux sommets du graphe, comme G est connexe, il existe un chemin $(x_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ avec $x_0 = x$, $x_k = y$. D'après ce qui précède, pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $f(x_i) = f(x_{i+1})$ car (x_i, x_{i+1}) est une arête du graphe et donc $f(x) = f(y)$. La fonction est bien une fonction constante.

🔹 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** On a utilisé q_G pour déterminer le noyau de T_G . Plus généralement, si f est un endomorphisme autoadjoint et si q est la forme quadratique associée à $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$, a-t-on $\ker(f) = \{\vec{x} \in E \mid q(\vec{x}) = 0\}$ (cône isotrope)? Pourquoi était-ce pertinent de passer par q_G pour avoir $\ker(T_G)$ ici?

6. La question 1 montre que les valeurs propres de T_G sont toutes positives. Or on vient de voir que T_G a un noyau non trivial de dimension 1, donc 0 est valeur propre et c'est la plus petite d'entre elles. D'où : $\lambda_1 = 0$, et comme c'est une valeur propre simple d'après la dimension du sous-espace propre associé : $\lambda_2 > 0$.
7. Soient λ une valeur propre de T_G et f un vecteur propre associé à f . On considère $x \in V$ tel que $|f(x)|$ soit maximal. Alors :

$$\begin{aligned} |\lambda f(x)| &= |(T_G f)(x)| = \left| \sum_{y \in E(x)} (f(x) - f(y)) \right| \\ &\leq \sum_{y \in E(x)} (|f(x)| + |f(y)|) \\ &\leq \sum_{y \in E(x)} 2|f(x)| && (|f(y)| \leq |f(x)|) \\ &\leq 2d_G |f(x)|. && (\text{card}(E(x)) \leq d_G \text{ par définition}) \end{aligned}$$

Comme $|f(x)| \neq 0$, on obtient : $\lambda \leq |\lambda| \leq 2d_G$.

🔹 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Sans l'indication de l'énoncé, se demander ce qui aurait pu conduire à introduire ce x qui maximise $|f(x)|$ (une piste de réflexion : on a une somme indexée par $E(x)$, or on veut justement faire apparaître $\text{card}(E(x))$; c'est naturellement possible si le terme général de la somme est constant).

8. On suppose que G est biparti et régulier et on note A, B deux parties de V telles que : $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$, et : $E \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$.

Si on considère la fonction f définie sur V par : $f = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$, alors pour tout $x \in A$ on a :

$$(T_G f)(x) = \sum_{y \in E(x)} (f(x) - f(y)) = \sum_{y \in E(x)} (1 - (-1)) = 2d_G,$$

car $E(x) \subseteq B$ et $\text{card}(E(x)) = d_G$. De même, pour $x \in B$ on a : $(T_G f)(x) = -2d_G$, donc : $T_G f = 2d_G f$. Finalement f est un vecteur propre associé à la valeur propre $2d_G$.

🔹 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Quelle réflexion peut mener à considérer la fonction f ? Une piste potentielle : noter que T_G est facile à calculer sur la partie génératrice $(\mathbb{1}_{\{x\}})_{x \in V}$ (je ferai mention plusieurs fois de cette famille dans les commentaires des questions de ce devoir), et que $T_G \mathbb{1}_{\{x\}}$ dépend fortement de x . Si vous avez compris comment cette réflexion peut mener à conjecturer f : 1° songer à l'avenir à éclairer la définition d'un morphisme abstrait en l'étudiant d'abord sur une partie génératrice, 2° se souvenir que F^E a une partie génératrice très simple lorsque E est fini et F a de la structure!

9. On suppose réciproquement que $2d_G$ est une valeur propre de T_G . Soient f un vecteur propre associé à la valeur propre $2d_G$ et $x_0 \in V$ tel que $|f(x_0)|$ soit maximal. On est donc dans le cas d'égalité du calcul de la question 7, ce qui permet d'affirmer successivement en remontant les inégalités que $\text{card}(E(x_0)) = d_G$, que pour tout $y \in E(x_0)$ on a : $|f(x_0)| = |f(y)|$, et que $f(y)$ est du signe opposé à celui de $f(x_0)$.

De ce fait, en utilisant que le graphe G est connexe et en considérant un chemin de x_0 vers n'importe quel sommet y , on montre que $|f|$ est constante sur le graphe et donc que tout ce qui précède s'applique à tout sommet du graphe.

En particulier, pour tout $x \in V$ on a : $\text{card}(E(x)) = d_G$ donc le graphe est régulier.

Ensuite, en posant $A = \{x \in V \mid f(x) > 0\}$ et $B = \{x \in V \mid f(x) < 0\}$, on a bien $A \cup B = V$ et $A \cap B = \emptyset$. De plus si $(x, y) \in E$ alors $f(x)$ et $f(y)$ sont de signes opposés et on en déduit : $(x, y) \in (A \times B) \cup (B \times A)$. Le graphe est bien biparti.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Ce raisonnement peut vous faire penser à un lien entre la connexité au sens des graphes et celle au sens topologique : pourquoi ?
- Si vous avez réussi à traiter la question précédente, l'analyser de près pour se convaincre que le choix de A et B dans cette question n'est pas astucieux.

10. Soit $G' = (V, E')$ un graphe vérifiant $E' \subseteq E$. Pour tout $f \in \mathbb{R}^V$ on a :

$$q_{G'}(f) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E'} (f(x) - f(y))^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} (f(x) - f(y))^2 = q_G(f).$$

De ce fait, en utilisant le théorème de Courant-Fischer démontré à la question 4, on obtient pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\lambda'_k = \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \left(\sup_{f \in W \cap S} q_{G'}(f) \right) \leq \inf_{W \in \mathcal{W}_k} \left(\sup_{f \in W \cap S} q_G(f) \right) = \lambda_k.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Les endomorphismes autoadjoints sont une mine à exercices sur les inégalités entre valeurs propres (vous en avez plusieurs dans vos feuilles d'exercices, souvent reformulées avec des traces ou déterminants). Cela découle au fond du fait que des produits scalaires sont aisés à comparer, et qu'il y a un lien entre produits scalaires et valeurs propres.
- Peut-on généraliser ? Peut-on trouver une condition suffisante simple sur f et g autoadjoints pour que leurs valeurs propres (ordonnées en sens croissant) vérifient $\lambda_{f,k} \leq \lambda_{g,k}$ pour tout k ?

11. Soit K_n le graphe complet défini par $V = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $E = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j\}$. On cherche les valeurs propres de T_{K_n} . Pour cela on exhibe la matrice de T_{K_n} dans la base $(\mathbb{1}_{\{i\}})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$(T_{K_n} \mathbb{1}_{\{i\}})(k) = \sum_{j \in E(k)} (\mathbb{1}_{\{i\}}(k) - \mathbb{1}_{\{i\}}(j)) = \sum_{j \neq k} (\mathbb{1}_{\{i\}}(k) - \mathbb{1}_{\{i\}}(j)).$$

Donc si $i \neq k$, on a : $(T_{K_n} \mathbb{1}_{\{i\}})(k) = -1$, et si $i = k$, alors : $(T_{K_n} \mathbb{1}_{\{i\}})(k) = n - 1$.

La matrice de T_{K_n} relativement à cette base est donc :

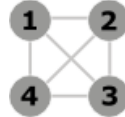
$$A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix} = nI_n - B$$

où B est la matrice de rang 1 ne comportant que des 1.

En particulier, n est une valeur propre de T_{K_n} et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$ car B est de rang 1. La dernière valeur propre de A est 0 car K_n est connexe (question 6). Finalement le spectre de T_{K_n} est $\{0, n\}$.

Maintenant, tout graphe $G = (V, E)$ est un sous-graphe du graphe complet K_n à $n = \text{card}(V)$ sommets (en définissant les sommets de K_n comme les éléments de V au lieu de $\llbracket 1, n \rrbracket$). Donc, en utilisant la question 10, on obtient que toutes les valeurs propres de T_G sont inférieures ou égales à $n = \text{card}(V)$.

FIGURE 1 – Graphe K_4 .



Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Se convaincre que $(1_{\{i\}})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est effectivement une base de \mathbb{R}^V . Une telle base est déjà apparue dans le DST n° 4 et elle aurait pu apparaître dans l'étude des variables aléatoires finies (pourquoi?). Avoir le réflexe d'y songer pour étudier un endomorphisme de F^E où F a de la structure.
- On note que A est symétrique. Était-ce prévisible ?

DEUXIÈME PARTIE

12. Notons $c = (1\ 2\ 3)$. On sait que $A_3 = \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = \{c^0, c^1, c^2\}$. Ainsi tout élément de A_3 est une puissance du cycle c , ce qui prouve que ce cycle engendre A_3 .
13. Notons $c = (1\ 2\ 3)$ et $b = (1\ 2)(3\ 4)$. Soit σ un élément quelconque de A_4 . On définit $\sigma' \in A_4$ en posant :

$$\sigma' = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma(4) = 4, \\ b\sigma & \text{si } \sigma(4) = 3, \\ bc\sigma & \text{si } \sigma(4) = 2, \\ bc^2\sigma & \text{si } \sigma(4) = 1. \end{cases}$$

Alors, dans tous les cas, $\sigma'(4) = 4$ donc σ' induit une permutation paire de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Il résulte alors de la question 12 que σ' est une puissance de c . On peut donc écrire σ comme un produit de puissances de b et c . Ceci montre que les éléments b et c engendrent A_4 .

Autre démonstration. Comme A_4 est de cardinal 12 (utiliser le principe des bergers avec le morphisme de signature $\varepsilon : S_4 \rightarrow \{1, -1\}$: étant donné que si τ est une transposition quelconque, alors $\sigma \mapsto \tau\sigma$ induit une bijection de A_4 dans $S_4 \setminus A_4$ comme on le vérifie aisément, on a :

$$24 = \text{card}(S_4) = \text{card}(\varepsilon^{-1}(\{1\})) + \text{card}(\varepsilon^{-1}(\{-1\})) = 2\text{card}(A_4),$$

d'où le cardinal de A_4 , par la version hors programme du théorème de Lagrange on sait que le cardinal de tout sous-groupe de A_4 divise 12, et est donc dans $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Or $G = \langle c, b \rangle$ est un sous-groupe de A_4 , donc son cardinal est dans cet ensemble ; de plus le cardinal de G est divisible par 3 et 2 (toujours par le théorème de Lagrange, l'ordre de c divise $\text{card}(G)$, de même pour l'ordre de b), donc le cardinal de G est divisible par 6. Tout ce qui précède montre : $\text{card}(G) \in \{6, 12\}$. Il suffit donc de montrer qu'il possède au moins sept éléments pour avoir $G = A_4$ et le résultat voulu. C'est le cas, puisque par le principe de conjugaison on a :

$$bc b^{-1} = (b(1)\ b(2)\ b(3)) = (2\ 1\ 4), \quad cbc^{-1} = (c(1)\ c(2))(c(3)\ c(4)) = (2\ 3)(1\ 4),$$

$$c^2bc^{-2} = (c^2(1)\ c^2(2))(c^2(3)\ c^2(4)) = (3\ 1)(2\ 4),$$

et ces trois éléments sont distincts de c , c^2 , id et b . D'où le résultat : c et b engendrent A_4 .

Autre démonstration. Comme A_4 est de cardinal raisonnable, on peut aussi obtenir le résultat par un recensement exhaustif. Il est inutile de vérifier que les puissances de c sont dans $\langle c, b \rangle$, ni pour id et b : il n'y a donc que huit éléments à vérifier. En fait, *via* le principe de conjugaison, nous arriverons à diminuer encore le nombre de vérifications. Voici les éléments à tester :

$$(1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3).$$

On a déjà vérifié, dans l'autre démonstration ci-dessus, que les deux doubles-transpositions ci-dessus sont dans $\langle c, b \rangle$: il reste à faire la vérification pour les 3-cycles. Toujours grâce à l'autre démonstration ci-dessus, on sait que $(2\ 1\ 4) = (1\ 4\ 2)$ est dans $\langle c, b \rangle$; c'est donc aussi le cas de $(1\ 2\ 4) = (1\ 4\ 2)^2$. On va en déduire que c'est le cas de tous les autres 3-cycles. On a :

$$(2\ 4)(1\ 3) \cdot (1\ 3\ 4) \cdot ((2\ 4)(1\ 3))^{-1} = (3\ 1\ 2) = c,$$

$$(1\ 4)(2\ 3) \cdot (2\ 3\ 4) \cdot ((1\ 4)(2\ 3))^{-1} = (3\ 2\ 1) = c^2,$$

Ainsi $(1\ 3\ 4)$ et $(2\ 3\ 4)$ s'écrivent en fonction de c , c^2 , $(2\ 4)(1\ 3)$ et $(1\ 4)(2\ 3)$, qui appartiennent tous à $\langle c, b \rangle$; il en est donc de même pour les carrés $(1\ 4\ 3)$ et $(2\ 4\ 3)$, d'où le résultat : $A_4 \subseteq \langle c, b \rangle$ et on a l'égalité.

🔴 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Apprécier deux choses, dans les démonstrations annexes que je propose : 1° comment le théorème de Lagrange permet de montrer des égalités ensemblistes avec un nombre restreint de calculs, 2° comment le principe de conjugaison permet aisément de produire des relations entre deux objets de même « structure » (deux 3-cycles par exemple).

14. La seule difficulté de cette question (mais elle n'est pas mince) est d'écrire l'élément $c = (1\ 2\ 3)$ comme produit de puissances de a et b . On calcule $ab = (1\ 3\ 5)$ et $ba = (2\ 4\ 5)$. On trouve alors, par conjugaison : $(ba)(ab)(ba)^{-1} = (1\ 3\ 2)$, puis : $((ba)(ab)(ba)^{-1})^2 = (1\ 2\ 3)$.

Soit alors σ un élément quelconque de A_5 . En posant $\sigma' = a^k \sigma$ pour un entier k bien choisi, on obtient $\sigma' \in A_5$ tel que $\sigma'(5) = 5$. Alors σ' induit une permutation paire de $\{1, 2, 3, 4\}$ donc, d'après la question précédente, σ' peut s'écrire comme un produit de puissances de b et c . On obtient alors σ comme un produit de puissances de a , b et c , c'est-à-dire de a et b d'après l'écriture de c obtenu plus haut. Ainsi les éléments a et b engendrent A_5 .

🔴 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Peut-on généraliser le résultat des deux dernières questions ? Est-ce que A_n est toujours engendré par $(1\ 2)(3\ 4)$ et un cycle de longueur paire maximale ?

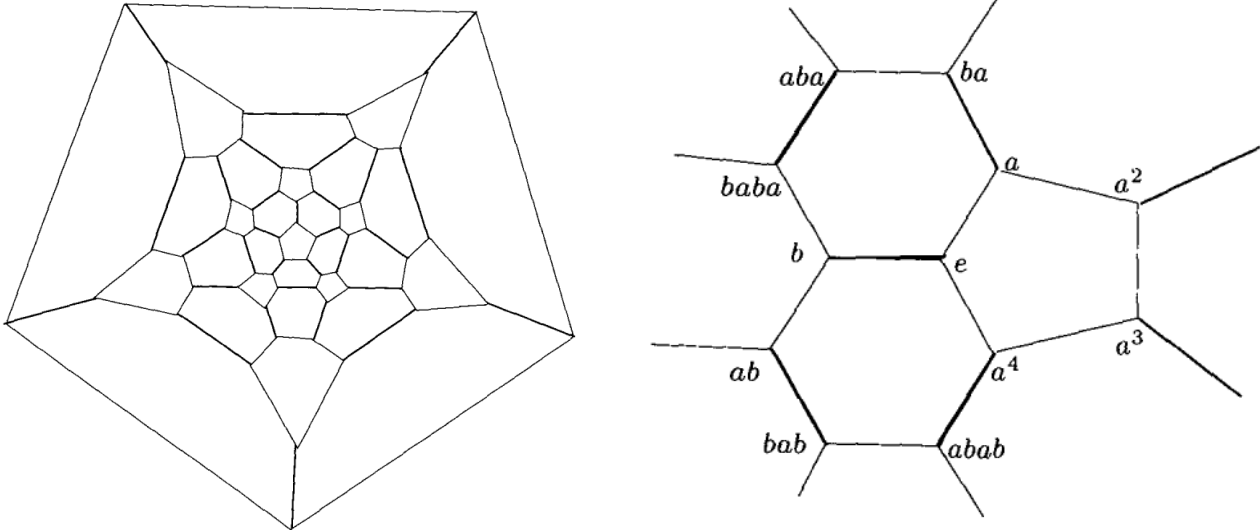
15. Montrons d'abord la connexité. On note $A = \{a, a^{-1}, b\}$. Soient g et h des éléments de $V = A_5$. On a $g^{-1}h \in A_5$ donc, d'après la question 14, il existe des éléments $u_1, \dots, u_k \in A$ tels que $g^{-1}h = u_1 u_2 \dots u_k$. Pour $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, notons $x_i = g u_1 \dots u_i$. En particulier, $x_0 = g$, $x_k = h$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$: $(x_{i-1})^{-1} x_i = u_i \in A$. Les sommets (x_0, \dots, x_k) forment donc un chemin de longueur k dans le graphe G , qui relie les sommets g et h . Ainsi le graphe G est connexe.

La régularité est immédiate ; de chaque sommet g partent exactement trois arêtes, qui le relient aux sommets ga , ga^{-1} et gb . Tous les sommets de G sont donc de valence 3.

🔴 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Réfléchir au sens concret de ce graphe, appelé *graphe de Cayley* de A_5 . Que représente *concrètement* une arête ? Ayant cela en tête, pourquoi est-il *évident* que le graphe est connexe ? (Je pense qu'il est plus facile de vouloir tout relier à l'élément neutre.)

16. L'application L_g est clairement linéaire et pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^V$, on a :

$$\|L_g f\|^2 = \sum_{x \in A_5} f(g^{-1}x)^2 = \sum_{y \in A_5} f(y)^2 = \|f\|^2,$$

FIGURE 2 – Représentation du graphe associé à A_5 .

car $x \mapsto g^{-1}x$ est une permutation de A_5 (son inverse est $x \mapsto gx$). Donc L_g est une isométrie de l'espace euclidien \mathbb{R}^V .

Pour tous $(g, h) \in (A_5)^2$, $f \in \mathbb{R}^V$ et $x \in A_5$, on a :

$$L_g L_h f(x) = L_h f(g^{-1}x) = f(h^{-1}g^{-1}x) = f((gh)^{-1}x) = L_{gh} f(x),$$

donc : $L_g \circ L_h = L_{gh}$. Étudions enfin $T_G \circ L_g$.

Pour tous $g \in A_5$, $f \in \mathbb{R}^V$ et $x \in A_5$, notons : $E(x) = \{y \in A_5 \mid (x, y) \in E\}$. On a :

$$L_g T_G f(x) = T_G f(g^{-1}x) = \sum_{y \in E(g^{-1}x)} (f(g^{-1}x) - f(y)).$$

On fait le changement d'indice $y \mapsto gy$ en remarquant que, par définition des arêtes dans le graphe G , on a : $y \in E(g^{-1}x) \iff gy \in E(x)$. On obtient :

$$L_g T_G f(x) = \sum_{z \in E(x)} (f(g^{-1}x) - f(g^{-1}z)) = \sum_{z \in E(x)} (L_g f(x) - L_g f(z)) = T_G L_g f(x),$$

donc : $L_g \circ T_G = T_G \circ L_g$.

Remarque culturelle. Il fut démontré implicitement que A_5 admet une *représentation* de groupe. C'est le nom qu'on peut donner au morphisme de groupes $A_5 \rightarrow \text{O}(\mathbb{R}^V)$ défini par $g \mapsto L_g$ (tandis que l'identité vérifiée par T_G en fait un *morphisme de représentations*). La littérature est riche sur les représentations du groupe alterné et du groupe symétrique. Il y a, pour faire simple, cinq morphismes de groupes $A_5 \rightarrow \text{GL}(E)$ avec E un \mathbb{R} -espace vectoriel, qui suffisent à obtenir toutes les représentations de A_5 . Elles proviennent toutes du groupe des rotations fixant un solide de Platon (qui sont au nombre de cinq, justement). En particulier, E est de dimension au moins 3 (on fera le lien avec l'indication de la question suivante).

Ce genre de morphisme permet de voir un groupe comme des automorphismes d'un espace vectoriel : cela permet le recours à la théorie de la dimension, à la réduction, etc., pour étudier les éléments de ce groupe. Nous l'avons illustré en travaux dirigés, puisque nous avons utilisé une représentation du groupe S_n pour montrer qu'une condition nécessaire pour qu'un ensemble de transpositions engendre S_n est qu'il y en ait au moins $n - 1$.

La représentation de cette question n'est pas une « bonne » représentation, parce que \mathbb{R}^V est de dimension $\text{card}(V) = \text{card}(A_5) = 60$. C'est très élevé.

● **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Illustration nouvelle d'un calcul de somme (ou de produit) indexé par un groupe fini, en utilisant la permutation $x \mapsto gx$ de ce groupe. C'est vu et revu !

17. Soient λ une valeur propre non nulle de l'endomorphisme T_G et $E_\lambda \subseteq \mathbb{R}^V$ le sous-espace propre associé. Comme les endomorphismes L_g et T_G commutent, on sait que pour tout $g \in A_5$ le sous-espace propre E_λ est stable par l'isométrie L_g , qui induit donc une isométrie \tilde{L}_g de E_λ . D'après la première identité de la question précédente, l'application $A_5 \rightarrow \text{O}(E_\lambda)$ définie par $g \mapsto \tilde{L}_g$ est un morphisme de groupes.

Montrons que ce morphisme est non trivial en raisonnant par l'absurde. Supposons que pour tout $g \in A_5$ et tout $f \in E_\lambda$, on a $\tilde{L}_g f = f$. Alors on obtient $f(g) = \tilde{L}_g f(g) = f(g^{-1}g) = f(\text{id})$. La fonction f est donc constante sur l'ensemble A_5 des sommets du graphe G . Mais alors, d'après la question 5, on obtient $E_\lambda \subseteq \ker(T_G)$, et donc $\lambda = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\lambda \neq 0$. Il existe donc $g \in A_5$ tel que $\tilde{L}_g \neq \text{id}_{E_\lambda}$.

La fin de la question se traiterait aisément si l'on savait que A_5 est un groupe simple non commutatif (un groupe *simple* est un groupe dont les seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et lui-même ; comme le noyau d'un morphisme est toujours un sous-groupe distingué, on arriverait à montrer que $\ker(f) = A_5$ sans difficulté). Mais il nous faut ici travailler « à la main ».

Raisonnons de nouveau par l'absurde en supposant : $\dim(E_\lambda) = 1$. Tout endomorphisme d'un espace de dimension 1 est une homothétie, donc pour tout $g \in A_5$, on a $\tilde{L}_g = \pm \text{id}_{E_\lambda}$ (en effet, comme $g \mapsto \tilde{L}_g$ est un morphisme de groupes, on a $(\tilde{L}_g)^{\text{card}(A_5)} = \tilde{L}_{g^{\text{card}(A_5)}} = \tilde{L}_{\text{id}} = \text{id}_{E_\lambda}$). Comme $a^5 = 1$, on a $(\tilde{L}_a)^5 = \text{id}$ donc $\tilde{L}_a = \text{id}$. De même, comme $(ab)^3 = 1$ (on l'a calculé à la question 14), on a $\tilde{L}_{ab} = \text{id}$. Mais alors $\tilde{L}_b = (\tilde{L}_a)^{-1} \tilde{L}_{ab} = \text{id}$. Or les éléments a et b engendrent le groupe A_5 , donc le morphisme $g \mapsto \tilde{L}_g$ est trivial, ce qui contredit le paragraphe précédent. Ainsi $\dim(E_\lambda) \geq 2$.

Raisonnons encore par l'absurde en supposant : $\dim(E_\lambda) = 2$. Pour tout $g \in A_5$, soit $\ell(g) = \det(\tilde{L}_g)$. Par le même raisonnement qu'au paragraphe précédent, le morphisme de groupe $\ell : A_5 \rightarrow \{\pm 1\}$ est trivial. Donc, pour tout $g \in A_5$, l'isométrie plane \tilde{L}_g est une rotation. En particulier, les \tilde{L}_g commutent. On calcule alors, d'une part :

$$(\tilde{L}_a \tilde{L}_b)^6 = (\tilde{L}_{ab})^6 = \tilde{L}_{(ab)^6} = \text{id}$$

car $(ab)^3 = 1$. Et, d'autre part :

$$(\tilde{L}_a \tilde{L}_b)^6 = (\tilde{L}_a)^6 (\tilde{L}_b)^6 = \tilde{L}_{a^6} \tilde{L}_{b^6} = \tilde{L}_a$$

car $a^5 = 1$ et $b^2 = 1$. Donc : $\tilde{L}_a = \text{id}$. En calculant $(\tilde{L}_a \tilde{L}_b)^3$ de deux façons différentes, on trouve de même : $\tilde{L}_b = \text{id}$. Comme précédemment, on en déduit que le morphisme $g \mapsto \tilde{L}_g$ est trivial, ce qui est une contradiction. Ainsi : $\dim(E_\lambda) \geq 3$, ce qui montre que λ est au moins une valeur propre triple.

Autre démonstration. On a vu en travaux dirigés que le groupe dérivé de S_n , c'est-à-dire le sous-groupe de S_n engendré par les éléments de la forme $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, est égal à A_n . En adaptant le raisonnement, on peut démontrer que le groupe dérivé de A_5 est aussi A_5 . Il suffit de montrer que A_5 est dans ce groupe dérivé ; comme A_5 est engendré les 3-cycles (ce ne fut pas démontré dans ce problème, mais c'est classique : revoir le cours si besoin), il suffit de montrer que tous les 3-cycles sont de la forme $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ avec $(\sigma, \tau) \in A_5$. Soit $\tau = (a \ b \ c)$ un 3-cycle. On a : $\tau^2 = (a \ c \ b)$. Soient d et e les deux éléments de $\llbracket 1, 5 \rrbracket$ distincts de a, b et c . Posons : $\sigma = (d \ e)(b \ c) \in A_5$. On a, par le principe de conjugaison :

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a) \ \sigma(b) \ \sigma(c)) = (a \ c \ b) = \tau^2,$$

donc : $\tau = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$, qui appartient au sous-groupe dérivé de A_5 : c'est donc le cas de toute permutation paire, ce qu'on voulait démontrer.

L'intérêt à cela est que si $f : A \rightarrow B$ est un morphisme de groupes avec B commutatif, alors le groupe dérivé de A doit être contenu dans $\ker(f)$ (exercice facile). Ici, avec $A = A_5$ et $B = \text{O}_1(\mathbb{R})$

qui est commutatif, cela donne directement : $A_5 \subseteq \ker(f)$, et donc $f : A_5 \rightarrow O_1(\mathbb{R})$ doit être un morphisme trivial. Comme $O_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif, cet argument serait insuffisant ; mais on remarque qu'il fut démontré ci-dessus, grâce au morphisme $g \mapsto \det(\tilde{L}_g)$, que \tilde{L}_g doit être une rotation, et le groupe spécial orthogonal est commutatif : ainsi le raisonnement ci-dessus reste valable et on conclut.

Cette façon de faire me semble présenter le double avantage de réexploiter des exercices vus cette année, et de traiter avec un seul argument (ou presque) les deux cas.

◆ **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**

- Noter qu'en imitant ce raisonnement, vous avez des informations fortes sur les valeurs propres voire la réduction des éléments dans l'image d'un morphisme $G \rightarrow GL(E)$. Lesquelles ? C'est au cœur de la théorie des représentations de groupes.
- On a introduit un morphisme $g \mapsto \det(\tilde{L}_g)$ dans ce raisonnement. Plus généralement, si l'on a une représentation du groupe S_n , c'est-à-dire un morphisme $\varphi : S_n \rightarrow O(E)$, que dire du morphisme $S_n \rightarrow \{1, -1\}$ défini par $\det \circ \varphi$? En déduire que le résultat du raisonnement ci-dessus (\tilde{L}_g est une rotation pour tout g) était prévisible.
- Revoir tout ce que j'affirme sans détailler dans « l'autre » démonstration.

18. Soient $g \in A_5$ et $x = (x_1, \dots, x_5) \in F$. Notons $\rho(g)(x) = (y_1, \dots, y_5)$. Alors les y_i sont une permutation des x_i , donc : $\sum_{i=1}^5 y_i = \sum_{i=1}^5 x_i = 0$ et $\rho(g)(x)$ est dans F . Ceci prouve que F est stable par $\rho(g)$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_5)$ la base canonique de \mathbb{R}^5 . Pour tout $g \in A_5$ et tout $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, on calcule : $\rho(g)(e_i) = e_{g(i)}$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 5 \rrbracket^2$, notons : $A(i, j) = \{g \in A_5 \mid g(i) = j\}$. L'ensemble $A(i, j)$ contient douze permutations et, si l'on choisit $k \neq i$ et $\ell \neq j$ dans $\llbracket 1, 5 \rrbracket$, exactement trois éléments de $A(i, j)$ envoient k sur ℓ .

Posons : $\alpha_{i,j} = \frac{1}{12} \sum_{g \in A(i,j)} \rho(g)$. Alors on obtient : $\alpha_{i,j}(e_i) = e_j$ et, pour tout $k \neq i$:

$$\alpha_{i,j}(e_k) = \frac{1}{4} \sum_{\ell \neq j} e_\ell.$$

Posons, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$, $\beta_{i,j} = \alpha_{i,j} - \alpha_{i,5}$. Alors $\beta_{i,j}(e_i) = e_j - e_5$ et, pour tout $k \neq i$:

$$\beta_{i,j}(e_k) = \frac{1}{4} \sum_{\ell \neq j} e_\ell - \frac{1}{4} \sum_{\ell \neq 5} e_\ell = -\frac{1}{4}(e_j - e_5).$$

Les $\beta_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires des $\rho(g)$ donc stabilisent le sous-espace F . Notons $\tilde{\beta}_{i,j}$ l'endomorphisme de F induit par $\beta_{i,j}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, notons : $e'_i = e_i - e_5$, de sorte que (e'_1, \dots, e'_4) est une base de F . D'après les calculs précédents, pour $(i, j, k) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^3$, on a :

$$\tilde{\beta}_{i,j}(e'_k) = \frac{5}{4} \delta_{i,k} e'_j,$$

où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker.

On constate alors que les $\tilde{\beta}_{i,j}$ forment une base de $L(F)$; à une constante près, il s'agit de la base de $L(F)$ naturellement associée à la base (e'_1, \dots, e'_4) de F . Comme les $\tilde{\beta}_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires des $\tilde{\rho}(g)$, il suit que la famille $(\tilde{\rho}(g))_{g \in A_5}$ engendre linéairement $L(F)$: d'où le résultat.

Remarque. L'action du groupe A_5 sur l'espace F est la représentation de degré 4 « naturelle » du groupe A_5 . Cette représentation étant absolument irréductible (c'est-à-dire qu'elle reste irréductible si on étend les scalaires à un corps algébriquement clos), un théorème dû à Burnside affirme que l'image du groupe A_5 dans l'algèbre $L(F)$ engendre linéairement cette algèbre. Il

s'agit ici de démontrer ce résultat dans un cas particulier. La solution proposée est inspirée de techniques de « moyennisation » classiques en théorie des représentations de groupes finis. Il était cependant possible de traiter cette question « à la main » en écrivant matriciellement les éléments $\tilde{\rho}(a)$, $\tilde{\rho}(b)$ et $\tilde{\rho}(c)$ et en bricolant un peu.

19. Pour plus de clarté, on note f_M la fonction que l'énoncé note f . Soit $x \in A_5$. Notons toujours $A = \{a, a^{-1}, b\}$ et $E(x) = \{y \in A_5 \mid (x, y) \in E\} = \{xu \mid u \in A\}$. On calcule :

$$\begin{aligned} T_G f_M(x) &= \sum_{y \in E(x)} (f_M(x) - f_M(y)) \\ &= 3f_M(x) - f_M(xa) - f_M(xa^{-1}) - f_M(xb) \\ &= 3 \operatorname{tr}(\tilde{\rho}(x)M) - \operatorname{tr}(\tilde{\rho}(xa)M) - \operatorname{tr}(\tilde{\rho}(xa^{-1})M) - \operatorname{tr}(\tilde{\rho}(xb)M) \\ &= 3 \operatorname{tr}(M\tilde{\rho}(x)) - \operatorname{tr}(\tilde{\rho}(a)M\tilde{\rho}(x)) - \operatorname{tr}(\tilde{\rho}(a^{-1})M\tilde{\rho}(x)) - \operatorname{tr}(\tilde{\rho}(b)M\tilde{\rho}(x)), \end{aligned}$$

par les identités $\tilde{\rho}(gh) = \tilde{\rho}(g)\tilde{\rho}(h)$ et $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$.

Finalement, en posant $\tilde{\alpha} = 3\operatorname{id}_F - \tilde{\rho}(a) - \tilde{\rho}(a^{-1}) - \tilde{\rho}(b)$, on trouve : $T_G f_M(x) = \operatorname{tr}(\tilde{\alpha}M\tilde{\rho}(x))$.

Or, si on considère dans \mathbb{R}^5 l'endomorphisme $\alpha = 3\operatorname{id}_{\mathbb{R}^5} - \rho(a) - \rho(a^{-1}) - \rho(b)$, on constate que la matrice de α dans la base canonique (e_1, \dots, e_5) est la matrice A proposée dans l'énoncé. Cette matrice est symétrique donc α est diagonalisable dans une base orthonormale. De plus, le noyau de α est, d'après sa matrice, la droite $\mathbb{R}(e_1 + \dots + e_5)$, c'est-à-dire l'orthogonal de F . Donc les valeurs propres de l'endomorphisme induit $\tilde{\alpha} \in L(F)$ sont exactement les valeurs propres non nulles de la matrice A , à savoir 2, 5 et $\frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Raisonnons alors par équivalence, en supposant $M \neq 0$ et en notant (\star) la proposition « f_M est une fonction propre de T_G pour la valeur propre λ ». On a :

$$\begin{aligned} (\star) &\iff \forall x \in A_5, T_G f_M(x) - \lambda f_M(x) = 0, \\ &\iff \forall x \in A_5, \operatorname{tr}[(\tilde{\alpha} - \lambda \operatorname{id}_F)M\tilde{\rho}(x)] = 0, \\ &\iff \forall f \in L(F), \operatorname{tr}[(\tilde{\alpha} - \lambda \operatorname{id}_F)Mf] = 0 && \text{(les } \tilde{\rho}(x) \text{ engendrent } L(F)) \\ &\iff \forall f \in L(F), \operatorname{tr}[(\tilde{\alpha} - \lambda \operatorname{id}_F)^*Mf] = 0 && (\alpha \in S(F)) \\ &\iff (\tilde{\alpha} - \lambda \operatorname{id}_F)M = 0 && ((f, g) \mapsto \operatorname{tr}(f^*g) \text{ produit scalaire sur } L(F)) \\ &\iff \begin{cases} \lambda \in \operatorname{Sp}(\tilde{\alpha}), \\ \operatorname{im}(M) \subseteq \ker(\tilde{\alpha} - \lambda \operatorname{id}_F). \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $M \in L(F)$ tel que f_M soit un vecteur propre de T_G pour la valeur propre λ si, et seulement si : $\lambda \in \left\{2, 5, \frac{7-\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

20. Soit λ une valeur propre de $\tilde{\alpha}$. D'après le polynôme caractéristique de la matrice A , fourni par l'énoncé, λ est une valeur propre simple. Comme F est un espace vectoriel de dimension 4, le sous-espace $\operatorname{End}_\lambda \subseteq L(F)$ des endomorphismes M dont l'image est contenue dans $\ker(\tilde{\alpha} - \lambda \operatorname{id}_F)$ est de dimension 4. Or l'application $M \mapsto f_M$ est injective (car $(f, g) \mapsto \operatorname{tr}(f^*g)$ est un produit scalaire sur $L(F)$ et les $\tilde{\rho}(x)$ engendrent $L(F)$, voir le raisonnement de la question précédente), et envoie $\operatorname{End}_\lambda$ dans le sous-espace propre de T_G associé à la valeur propre λ . Donc ce dernier sous-espace est de dimension au moins 4, et λ est une valeur propre de T_G de multiplicité au moins 4.

Remarque. Remarquons qu'on a alors trouvé, en comptant les multiplicités, dix-sept valeurs propres de T_G qui en compte soixante au total. Il reste donc du travail...

TROISIÈME PARTIE

21. Soit $(x, y, z) \in V^3$. Il y a une bijection évidente de l'ensemble des chemins entre x et y dans l'ensemble des chemins entre y et x , donc : $d(x, y) = d(y, x)$. De plus, concaténer un chemin de

longueur minimale liant x et y , et un chemin de longueur minimale liant y et z , donne un chemin de longueur $d(x, y) + d(y, z)$ liant x et z . La quantité $d(x, z)$ désignant la longueur minimale d'un chemin entre x et z , on a : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Remarque. La fonction d est donc une *distance* sur V , qui en fait un espace métrique.

22. Pour tout $(x, y) \in V^2$, on a : $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Si A est une partie de V , on en déduit :

$$B(A, 0) = \{x \in V \mid \exists y \in A, d(x, y) = 0\} = \{x \in V \mid \exists y \in A, x = y\} = A.$$

On a bien sûr $A = B(A, 0) \subseteq B(A, 1)$. Par définition, les éléments de $B(A, 1)$ qui ne sont pas dans A sont directement reliés à des éléments de A . On a donc une surjection :

$$\phi : \begin{cases} \partial A & \rightarrow B(A, 1) \setminus A \\ (x, y) & \mapsto y \end{cases}.$$

Le nombre d'antécédents de $y \in B(A, 1) \setminus A$ par la fonction ϕ est le nombre de sommets de A auxquels y est directement relié, qui est majoré par la valence de y , donc par d_G . Ainsi :

$$\text{card}(\partial A) \leq d_G (\text{card}(B(A, 1)) - \text{card}(A)),$$

c'est-à-dire : $\text{card}(B(A, 1)) \geq \text{card}(A) + \frac{1}{d_G} \text{card}(\partial A)$.

Si, de plus, on suppose : $\text{card}(A) \leq \frac{1}{2} \text{card}(V)$, alors : $\text{card}(\partial A) \geq h_G \cdot \text{card}(A)$, donc :

$$\text{card}(B(A, 1)) \geq \left(1 + \frac{h_G}{d_G}\right) \text{card}(A).$$

● **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** La notation utilisée fait inmanquablement penser aux boules d'un espace métrique. En sont-ce ? Que sont les boules ouvertes dans cet espace ? fermées ? Qu'en pensez-vous, par rapport aux boules rencontrées dans les espaces vectoriels normés ? Qu'est-ce que cela implique comme propriétés topologiques qui seraient fausses dans un espace vectoriel normé ?

23. Soit A une partie de V . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire de la question 21, on a :

$$B(A, k+1) = B(B(A, k), 1).$$

De la question 22, on déduit par récurrence sur k que :

$$\text{card}(B(A, k)) \geq \min \left(\left(1 + \frac{h_G}{d_G}\right)^k \text{card}(A), \frac{1}{2} \text{card}(V) \right).$$

Fixons maintenant :

$$k = \left\lfloor \frac{\ln \left(\frac{\text{card}(V)}{2} \right)}{\ln \left(1 + \frac{h_G}{d_G} \right)} \right\rfloor.$$

Soit $x \in V$. On a : $\text{card}(B(\{x\}, k)) \geq \min \left(\left(1 + \frac{h_G}{d_G}\right)^k, \frac{1}{2} \text{card}(V) \right)$. Déduisons-en une minoration de $\text{card}(B(\{x\}, k+1))$ par distinction de cas :

— si $\text{card}(B(\{x\}, k)) < \frac{1}{2} \text{card}(V)$, alors d'après la question 22 :

$$\text{card}(B(\{x\}, k+1)) \geq \left(1 + \frac{h_G}{d_G}\right) \text{card}(B(\{x\}, k)) \geq \left(1 + \frac{h_G}{d_G}\right)^{k+1} > \frac{1}{2} \text{card}(V)$$

par définition de k ;

- si $\frac{1}{2}\text{card}(V) \leq \text{card}(B(\{x\}, k)) < \text{card}(V)$, par connexité du graphe, il existe au moins un sommet hors de $B(\{x\}, k)$ qui est relié à un sommet de $B(\{x\}, k)$, donc :

$$\text{card}(B(\{x\}, k+1)) > \text{card}(B(\{x\}, k)) \geq \frac{1}{2}\text{card}(V);$$

- enfin, si $\text{card}(B(\{x\}, k)) = \text{card}(V)$, alors :

$$\text{card}(B(\{x\}, k+1)) = \text{card}(B(\{x\}, k)) = \text{card}(V) > \frac{1}{2}\text{card}(V),$$

car $\text{card}(V) > 0$.

Pour $(x, y) \in V^2$ et k l'entier fixé plus haut, on obtient alors :

$$\text{card}(B(\{x\}, k+1)) + \text{card}(B(\{y\}, k+1)) > \frac{1}{2}\text{card}(V) + \frac{1}{2}\text{card}(V) = \text{card}(V).$$

Les boules $B(\{x\}, k+1)$ et $B(\{y\}, k+1)$ possèdent donc au moins un point d'intersection z , d'où : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2k + 2$. Ainsi : $\Delta_G \leq 2k + 2 \leq 2 \frac{\ln\left(\frac{\text{card}(V)}{2}\right)}{\ln\left(1 + \frac{h_G}{d_G}\right)} + 2$, d'où le résultat.

🔴 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Détailler l'égalité $B(A, k+1) = B(B(A, k), 1)$ si elle ne vous convainc pas. Quel est son sens concret ? A-t-on quelque chose d'analogue dans les espaces vectoriels normés ?

24. Notons $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^V$ la fonction constante de valeur 1. On calcule :

$$\langle \mathbf{1}, f \rangle = \sum_{x \in V} f(x) = \text{card}(A)b + \text{card}(B)(-a) = ab - ba = 0.$$

Donc f est orthogonale à $\ker(T_G) = \text{Vect}(\mathbf{1})$.

Remarquons que : $\text{card}(\partial A) = \text{card}(\partial B)$. Pour tout $(x, y) \in \partial A \sqcup \partial B$, on a : $[f(x) - f(y)]^2 = (a + b)^2$ et, pour tout $(x, y) \in E \setminus (\partial A \sqcup \partial B)$, on a : $[f(x) - f(y)]^2 = 0$. On en déduit :

$$q_G(f) = \frac{1}{2} \sum_{(x, y) \in E} [f(x) - f(y)]^2 = \text{card}(\partial A)(a + b)^2.$$

Par ailleurs :

$$\|f\|^2 = \sum_{x \in V} f(x)^2 = \text{card}(A)b^2 + \text{card}(B)a^2 = ab(a + b),$$

$$\text{d'où : } q_G(f) = \frac{(a + b)\text{card}(\partial A)}{ab} \|f\|^2.$$

25. Avec les notations de la question 3, on a :

$$\lambda_2 = \inf_{f \in F_2 \cap S} q_G(f) = \inf_{f \in F_2 \setminus \{0\}} \frac{q_G(f)}{\|f\|^2},$$

car la fonction q_G est homogène de degré 2 (c'est-à-dire : $\forall f \in F_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q_G(\lambda f) = \lambda^2 q_G(f)$). Or l'espace F_2 est l'orthogonal de $\mathbb{R}\mathbf{1} = \ker(T_G)$, donc la fonction f de la question précédente est dans $F_2 \setminus \{0\}$. On en déduit :

$$\lambda_2 \leq \frac{q_G(f)}{\|f\|^2} = \frac{(a + b)\text{card}(\partial A)}{ab} = \frac{\text{card}(\partial A)}{\text{card}(A)} + \frac{\text{card}(\partial B)}{\text{card}(B)}.$$

Le nombre h_G est défini comme la borne inférieure d'un ensemble fini ; c'est donc un minimum. Il existe une partie A de V telle que $\text{card}(A) \leq \frac{1}{2}\text{card}(V)$ et $\frac{\text{card}(\partial A)}{\text{card}(A)} = h_G$. Soit B le complémentaire de A dans V . Alors $\text{card}(B) \geq \frac{1}{2}\text{card}(V) \geq \text{card}(A)$ et $\text{card}(\partial B) = \text{card}(\partial A)$, donc :

$$\frac{\text{card}(\partial B)}{\text{card}(B)} \leq \frac{\text{card}(\partial A)}{\text{card}(A)} = h_G.$$

En appliquant à ces parties A et B l'inégalité : $\lambda_2 \leq \frac{\text{card}(\partial A)}{\text{card}(A)} + \frac{\text{card}(\partial B)}{\text{card}(B)}$, on obtient alors : $\lambda_2 \leq 2h_G$.

🔹 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Vérifier l'égalité entre bornes inférieures. Remarquer une similitude avec les deux expressions d'une norme triple, si vous avez besoin d'inspiration.

26. On munit l'ensemble \mathbb{R}^E du produit scalaire défini par :

$$\forall (\phi, \psi) \in (\mathbb{R}^E)^2, \quad \langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} \phi(x,y)\psi(x,y).$$

Soit $f \in \mathbb{R}^V$. On définit des fonctions $\phi, \psi \in \mathbb{R}^E$ en posant, pour tout $(x, y) \in E$:

$$\phi(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad \text{et} : \quad \psi(x, y) = |f(x) + f(y)|.$$

Alors, d'une part : $\langle \phi, \phi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} [f(x) - f(y)]^2 = q_G(f)$.

D'autre part, grâce à l'inégalité facile à démontrer : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, et à la symétrie de E , on a :

$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} [f(x) + f(y)]^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} [2f(x)^2 + 2f(y)^2] = 2 \sum_{(x,y) \in E} f(x)^2.$$

Pour tout $x \in V$, il y a au plus d_G éléments $y \in V$ tels que : $(x, y) \in E$, d'où :

$$\langle \psi, \psi \rangle \leq 2 \sum_{x \in V} d_G f(x)^2 = 2d_G \|f\|^2.$$

Enfin, on a : $\langle \phi, \psi \rangle = S(f)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle \phi, \psi \rangle \leq \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle \langle \psi, \psi \rangle}$ devient alors précisément : $S(f) \leq \sqrt{2d_G q_G(f)} \|f\|$.

🔹 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Qu'est-ce qui pouvait inciter à considérer ce produit scalaire et à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ? Éventuellement lire les pages de *Méthodes* à ce sujet, si vous ne voyez pas.

27. On note $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ de sorte que : $f(x_1) \geq \dots \geq f(x_n)$. On note :

$$E^+ = \left\{ (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j \text{ et } (x_i, x_j) \in E \right\}.$$

Pour $(i, j) \in E^+$, on a $f(x_i) \geq f(x_j)$ donc :

$$|f(x_i)^2 - f(x_j)^2| = f(x_i)^2 - f(x_j)^2 = \sum_{i \leq k < j} (f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2)$$

par télescopage. Par symétrie de E :

$$S(f) = \sum_{(i,j) \in E^+} |f(x_i)^2 - f(x_j)^2| = \sum_{(i,j) \in E^+} \sum_{i \leq k < j} (f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2).$$

En intervertissant les sommes, on est amené à étudier, pour k fixé, l'ensemble des arêtes $(x_i, x_j) \in E$ telles que $i \leq k$ et $j > k$. Or cette dernière condition équivaut à : $(x_i, x_j) \in \partial A_k$, où l'on note $A_k = \{x_1, \dots, x_k\}$. Ainsi :

$$S(f) = \sum_{1 \leq k < n} \sum_{(x,y) \in \partial A_k} (f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2).$$

Pour tout $k > \frac{n}{2}$, on a par hypothèse $f(x_k) = f(x_{k+1})$ donc la deuxième somme est nulle. Pour $k \leq \frac{n}{2}$, il s'agit d'une somme de terme constant, dont le nombre de termes est $\text{card}(\partial A_k)$. Or $\text{card}(A_k) = k \leq \frac{1}{2} \text{card}(V)$ donc $\text{card}(\partial A_k) \leq h_G \text{card}(A_k) = h_G k$.

On obtient :

$$S(f) \leq \sum_{1 \leq k \leq n/2} h_G k (f(x_k)^2 - f(x_{k+1})^2) = h_G \sum_{1 \leq k \leq n/2} f(x_k)^2$$

par télescopage. On a donc montré : $S(f) \leq h_G \|f\|^2$.

28. Soit $f \in \mathbb{R}^V$ un vecteur propre de l'endomorphisme T_G pour la valeur propre λ_2 . Comme f est non nulle et orthogonale à la fonction constante $\mathbf{1}$, elle prend à la fois des valeurs strictement positives et strictement négatives. Notons $A = \{x \in V \mid f(x) > 0\}$. Quitte à remplacer f par son opposé, on peut supposer : $0 < \text{card}(A) \leq \frac{1}{2} \text{card}(V)$.

On définit alors $f^+ \in \mathbb{R}^V$ en posant $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$, de sorte que f^+ vérifie les conditions de la question 27. On déduit des questions 26 et 27 que :

$$\sqrt{2d_G q_G(f^+)} \|f^+\| \geq h_G \|f^+\|^2,$$

d'où : $q_G(f^+) \geq \frac{h_G^2}{2d_G} \|f^+\|^2$.

Pour tout $x \in V$, on note comme précédemment : $E(x) = \{y \in V \mid (x, y) \in E\}$. On calcule :

$$\begin{aligned} q_G(f^+) &= \langle f^+, T_G f^+ \rangle \\ &= \sum_{x \in E} \left(f^+(x) \sum_{y \in E(x)} [f^+(x) - f^+(y)] \right) \\ &= \sum_{x \in A} \left(f(x) \sum_{y \in E(x)} [f(x) - f^+(y)] \right) \quad (f^+(x) = f(x) \text{ si } x \in A, f^+(x) = 0 \text{ si } x \notin A) \\ &\leq \sum_{x \in A} \left(f(x) \sum_{y \in E(x)} [f(x) - f(y)] \right) \quad (\text{car } f^+(y) \geq f(y)) \\ &= \sum_{x \in A} f(x) T_G f(x) \\ &= \lambda_2 \sum_{x \in A} f(x)^2 \\ &= \lambda_2 \|f^+\|^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi : $\lambda_2 \|f^+\|^2 \geq \frac{h_G^2}{2d_G} \|f^+\|^2$, donc : $\lambda_2 \geq \frac{h_G^2}{2d_G}$.

🔦 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Pourquoi f doit prendre des valeurs strictement positives et strictement négatives ? Un résultat analogue apparaît dans la résolution de la question 9.

29. Soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de l'espace euclidien \mathcal{E} . Soit $f \in \mathcal{E}^V$. Pour tout $x \in V$, notons $f_1(x), \dots, f_p(x)$ les coordonnées de $f(x)$ dans la base (e_1, \dots, e_p) , de sorte que $f_i \in \mathbb{R}^V$. Alors :

$$f \in S \iff \sum_{i=1}^p \|f_i\|^2 = 1 \text{ et } : \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \in F_2,$$

où F_2 est le sous-espace de \mathbb{R}^V défini à la question 3.

Si $f \in S$, on calcule alors : $Q(f) = \sum_{i=1}^p q_G(f_i) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_2 \|f_i\|^2 = \lambda_2$. Ainsi : $\inf_{f \in S} Q(f) \geq \lambda_2$.

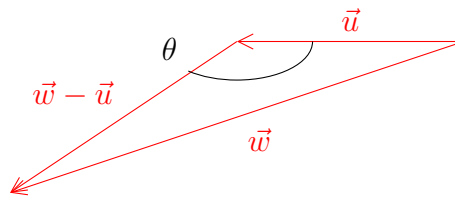
Soit maintenant $f_1 \in \mathbb{R}^V$ un vecteur propre unitaire de T_G pour la valeur propre λ_2 . Définissons $f \in \mathcal{E}^V$ en posant, pour $x \in V$, $f(x) = f_1(x)e_1$. Alors, comme $\|f_1\| = 1$ et $f_1 \in F_2$, on a $f \in S$. De plus, on a $Q(f) = q_G(f_1) = \lambda_2$. Ceci prouve : $\inf_{f \in S} Q(f) = \lambda_2$.

🔑 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Vérifier l'appartenance à F_2 et comprendre pourquoi le raisonnement serait FAUX sans la précision que la base est orthonormée. Important !

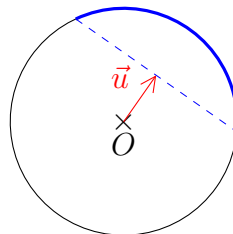
30. Pour comprendre comment construire u , analysons de près les trois conditions. La première ne nécessite pas d'interprétation profonde : u doit envoyer chaque sommet du graphe sur un point de la boule ouverte unité distinct de l'origine. La seconde signifie que les extrémités des vecteurs $u(1), \dots, u(4)$ normalisés forment un tétraèdre dont le centre de gravité est l'origine (ou bien, s'ils sont coplanaires : un quadrilatère vérifiant cette propriété). S'ils ont tous la même norme, on peut même enlever la précision « normalisés ». Cette deuxième condition est toujours remplie si le tétraèdre formé par ces points est *régulier*. Pour la troisième condition, encore faut-il comprendre ce que représente l'ensemble :

$$\{\vec{w} \in S^1(\vec{0},1) \mid \langle \vec{u}, \vec{w} - \vec{u} \rangle > 0\} = \{\vec{w} \in S^1(\vec{0},1) \mid \langle -\vec{u}, \vec{w} - \vec{u} \rangle < 0\}$$

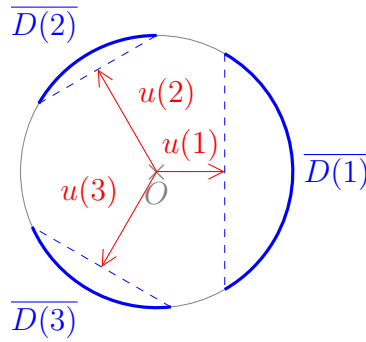
pour un vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^n (puisque tout espace euclidien de dimension n est isométriquement isomorphe à \mathbb{R}^n , ce cas particulier suffit à comprendre la trame globale). Cela revient à exiger que l'angle ci-dessous soit obtus :



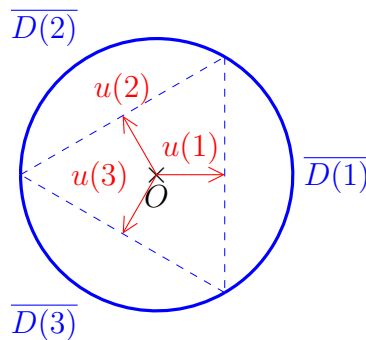
Partant de là, il est facile de se représenter tous les vecteurs de la sphère unité qui conviennent (si \vec{u} est dans la boule unité) : il suffit d'ajouter à l'extrémité de \vec{u} un vecteur formant un angle aigu avec \vec{u} . Image à l'appui dans \mathbb{R}^2 pour y voir clair (l'absence de relief ne rend pas éclairant le dessin dans \mathbb{R}^3 , mais on comprendra que c'est le même principe avec un « disque » dessiné sur la surface de la sphère) :



Ce dessin permet de comprendre qu'un plongement sphérique dans \mathbb{R}^2 reviendrait à placer les images $u(i)$ des sommets du graphe de sorte que les arcs de cercle correspondant à chaque sommet ne se touchent pas, sauf éventuellement en une extrémité, si et seulement si ces sommets sont reliés par une arête. Exemple d'abord *faux* avec le graphe régulier K_3 (défini à la question 11) que je voudrais plonger dans \mathbb{R}^2 . Tous les sommets étant reliés dans K_3 , il faudrait que les trois arcs de cercle se touchent à leurs extrémités :



Ce n'est pas le cas sur cet exemple. Il ne convient pas (en revanche la seconde condition est vérifiée, ce qu'on observe mieux en raisonnant sur la somme des angles : une fois n'est pas coutume). Mais si je dispose $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$ de sorte qu'ils forment un triangle équilatéral, à une distance bien calculée du centre pour que les arcs de cercle correspondants ne se touchent qu'en un seul point (un peu de trigonométrie est éventuellement nécessaire), le tour est joué :



On s'inspire de ceci ci-dessous, en remplaçant le triangle équilatéral par un tétraèdre régulier.

Soient \mathcal{E} un espace euclidien de dimension 3 et $f : \llbracket 1,4 \rrbracket \rightarrow \mathcal{E}$ une application telle que $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ soient les sommets d'un tétraèdre régulier inclus dans la sphère unité de \mathcal{E} .

Par exemple, dans l'espace \mathbb{R}^4 muni de la base canonique $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_4)$ et du produit scalaire usuel, \mathcal{E} pourrait être l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, avec :

$$\forall i \in \llbracket 1,4 \rrbracket, \quad f(i) = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(3\epsilon_i - \sum_{j \neq i} \epsilon_j \right).$$

Pour tous i et j distincts, l'angle des vecteurs $f(i)$ et $f(j)$ a la valeur $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ modulo 2π (en effet ils sont unitaires et leur produit scalaire vaut $\frac{1}{12} \cdot (-3 - 3 + 1 + 1) = -\frac{1}{3}$).

Soit $u : V \rightarrow \mathcal{E}$ définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1,4 \rrbracket, \quad u(i) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) f(i).$$

On a bien : $0 < \|u(i)\| < 1$, et : $\sum_{i=1}^4 \frac{u(i)}{\|u(i)\|} = 0$.

Soient $i \neq j$ deux éléments de $\llbracket 1,4 \rrbracket$, et w un vecteur de E . Notons $w' = \alpha f(i) + \beta f(j)$ le projeté orthogonal de w sur le plan engendré par $f(i)$ et $f(j)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Notons $\lambda = \langle u(i), w - u(i) \rangle$ et $\mu = \langle u(j), w - u(j) \rangle$, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \alpha \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \beta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) &= \lambda + \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2, \\ \alpha \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta) + \beta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \mu + \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2. \end{cases}$$

Après résolution du système, on en déduit :

$$\alpha = \frac{\lambda - \mu \cos(\theta) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 - \cos(\theta))}{1 - (\cos(\theta))^2}, \quad \beta = \frac{-\lambda \cos(\theta) + \mu + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 - \cos(\theta))}{1 - (\cos(\theta))^2}.$$

Supposons $w \in D(i) \cap D(j)$, c'est-à-dire $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $\|w\| = 1$. Comme $\cos(\theta) < 0$, on obtient alors :

$$\alpha > \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 - \cos(\theta))}{1 - (\cos(\theta))^2} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

et de même : $\beta > \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. On calcule alors :

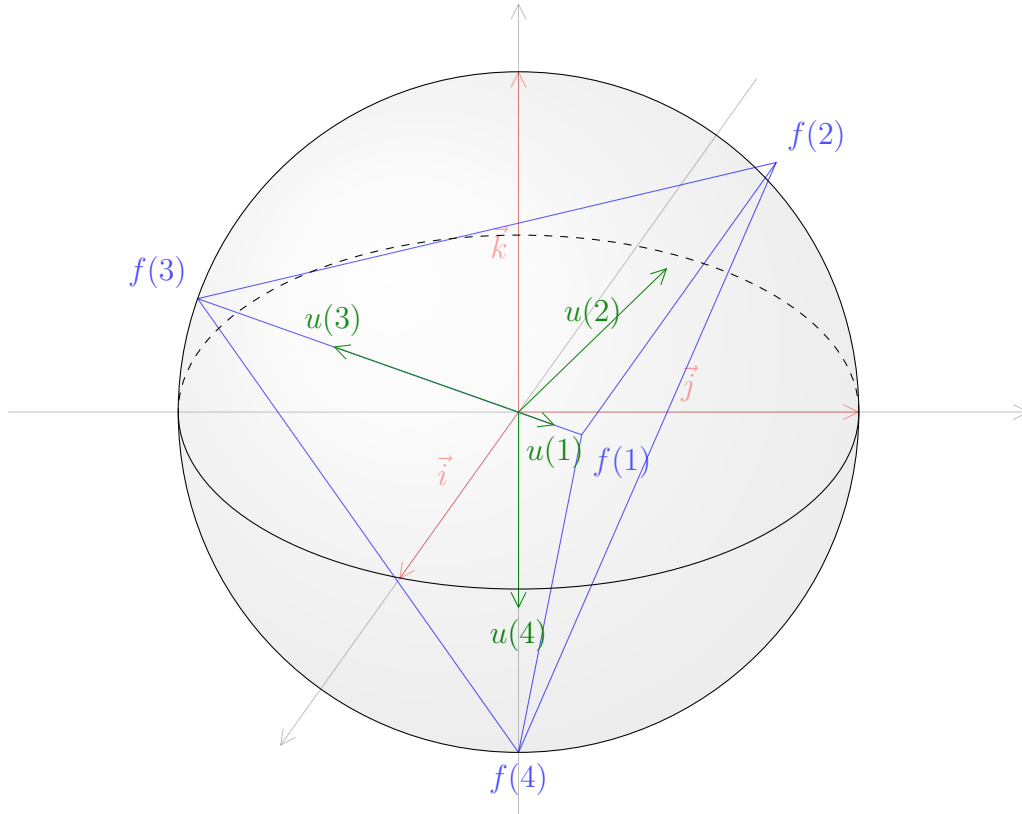
$$\|w\|^2 \geq \|w'\|^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos(\theta) + \beta^2 > \frac{2 + 2 \cos(\theta)}{2 \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} = 1.$$

Ceci contredit l'hypothèse $\|w\| = 1$. Les ensembles $D(i)$ et $D(j)$ sont donc disjoints.

Supposons maintenant $w \in \overline{D(i)} \cap \overline{D(j)}$, c'est-à-dire $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\|w\| = 1$. En étudiant le cas d'égalité dans les inégalités précédentes, on trouve $w = w'$ et $\alpha = \beta = 1/(2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right))$.

Les ensembles $\overline{D(i)}$ et $\overline{D(j)}$ ont donc un unique point d'intersection, ce qui est cohérent avec le fait que les sommets i et j sont reliés dans le graphe K_4 . On a bien obtenu un plongement sphérique du graphe K_4 .

FIGURE 3 – Tétraèdre régulier et plongement de K_4 dans la sphère unité, représenté grâce à une isométrie de \mathcal{E} dans \mathbb{R}^3 . Les trois axes du repère orthonormé sont engendrés par $\vec{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$, $\vec{j} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2, 0)$ et $\vec{k} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1, -3)$. Un sommet du tétraèdre est hors de la sphère : simple erreur d'arrondi de la machine. Je n'ai pas pris le temps de rectifier cela, ni de représenter les $D(i)$.



🔴 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Pour comprendre comment sont obtenus les sommets du tétraèdre : si vous deviez donner les affixes des sommets d'un triangle équilatéral dans le plan complexe, comment le situeriez-vous pour vous faciliter l'obtention des affixes ? et que doivent-elles vérifier pour que cela donne bien un triangle ? équilatéral ? à comparer avec ce qu'on veut ici. Même question pour la définition de $u(i)$ (pourquoi cette multiplication par $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$? noter que l'on peut d'abord poser $u(i) = \lambda f(i)$ et trouver λ *a posteriori* par le raisonnement qui suit, mais ce n'est pas très commode).

31. Soit $u : V \rightarrow \mathcal{E}$ un plongement sphérique du graphe G dans un espace euclidien E de dimension 3. Notons \mathcal{S} la sphère unité de E . Pour tout $x \in V$, notons : $f(x) = \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \in \mathcal{S}$. Alors l'ensemble $D(x)$ défini dans l'énoncé est un disque sphérique de centre $f(x)$ et dont on notera $r(x)$ le rayon, c'est-à-dire la longueur d'une corde reliant le centre $f(x)$ à un point de la frontière de $D(x)$. L'aire d'un tel disque sphérique est : $\mathcal{A}(D(x)) = \pi r(x)^2$. Comme, par hypothèse, les disques ouverts $D(x)$, pour $x \in V$, sont deux à deux disjoints, on a :

$$\sum_{x \in V} \mathcal{A}(D(x)) \leq \mathcal{A}(\mathcal{S}),$$

c'est-à-dire : $\sum_{x \in V} \pi r(x)^2 \leq 4\pi$, ou encore $\sum_{x \in V} r(x)^2 \leq 4$.

Pour toute arête $(x, y) \in E$, les disques fermés $\overline{D(x)}$ et $\overline{D(y)}$ possèdent un point d'intersection. Par inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\|f(x) - f(y)\|^2 \leq [r(x) + r(y)]^2 \leq 2r(x)^2 + 2r(y)^2.$$

On calcule alors : $Q(f) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} \|f(x) - f(y)\|^2 \leq \sum_{(x,y) \in E} (r(x)^2 + r(y)^2)$.

Par symétrie de E , on obtient :

$$Q(f) \leq 2 \sum_{(x,y) \in E} r(x)^2 = 2 \sum_{x \in V} \text{val}(x) r(x)^2 \leq 2d_G \sum_{x \in V} r(x)^2.$$

D'après le raisonnement géométrique ci-dessus, on a enfin : $Q(f) \leq 8d_G$.

Or, par définition du plongement sphérique : $\sum_{x \in V} f(x) = 0$, donc on déduit de la question 29 que :

$$Q(f) \geq \lambda_2 \sum_{x \in V} \|f(x)\|^2 = \lambda_2 |V|. \text{ Il s'ensuit : } 8d_G \geq \lambda_2 \text{card}(V), \text{ d'où : } \lambda_2 \leq \frac{8d_G}{\text{card}(V)}.$$

🔴 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** L'aire de $D(x)$ ressemble énormément à celle d'un disque (alors que cela n'a aucune raison de l'être). Sauriez-vous la retrouver, quitte éventuellement à vous autoriser un calcul d'intégrale hors du cadre du programme de mathématiques ?

QUATRIÈME PARTIE

32. Soit $(f, g) \in \mathcal{H}_n^2$. On a :

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= \sum_{x \in H_n} \overline{\hat{f}(x)} \hat{g}(x) = \sum_{x \in H_n} \left(\sum_{y \in H_n} \overline{f(y)} \omega^{x \cdot y} \right) \left(\sum_{y' \in H_n} g(y') \omega^{-x \cdot y'} \right) \\ &= \sum_{(y, y') \in H_n^2} \overline{f(y)} g(y') \left(\sum_{x \in H_n} \omega^{x \cdot y - x \cdot y'} \right). \end{aligned}$$

Calculons $\sum_{x \in H_n} \omega^{x \cdot z}$, où : $z = (\alpha, \beta) \in H_n$. On a

$$\sum_{x \in H_n} \omega^{x \cdot z} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-1} \omega^{k\alpha + k'\beta} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\alpha)^k \right) \times \left(\sum_{k'=0}^{n-1} (\omega^\beta)^{k'} \right).$$

En utilisant alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^\alpha)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 0, \\ n & \text{si } \alpha = 0, \end{cases}$$

on obtient :

$$\sum_{x \in H_n} \omega^{x \cdot z} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 0, \\ n^2 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Finalement, dans la somme qui définit $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ on ne garde que les termes où $y - y' = 0$ c'est-à-dire $y = y'$. Cela donne :

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = n^2 \sum_{y \in H_n} \overline{f(y)} g(y) = n^2 \langle f, g \rangle.$$

Maintenant, l'application $f \mapsto \hat{f}$ est clairement un endomorphisme de \mathcal{H}_n . De plus, soit $f \in \mathcal{H}_n$ tel que : $\hat{f} = 0$. Alors, d'après ce qui précède : $\langle f, f \rangle = \frac{1}{n^2} \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = 0$. Cela implique : $\sum_{x \in H_n} |f(x)|^2 = 0$, et donc que : $f = 0$. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est donc un endomorphisme injectif d'espaces vectoriels. Comme \mathcal{H}_n est de dimension finie (il est de dimension n^2 , une base étant formée par les fonctions indicatrices des singletons de $(H_n)^2$), l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme.

Remarque. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est la *transformation* de Fourier de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. On l'a déjà croisée dans le DST n° 4, à ceci près qu'elle était sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Vous pourrez comparer les similitudes et différences entre ces deux transformations, et vous demander si elles sont valables peu importe le groupe G .

🔴 Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Si l'on remarque l'analogie entre la transformation de Fourier sur un groupe, et celle classiquement utilisée en Physique notamment, il est possible de conjecturer un certain nombre de choses et de forger notre intuition. Notamment, on trouve ici qu'à normalisation près, $f \mapsto \hat{f}$ est une isométrie !
- Déterminer les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ dans \mathbb{C}^* . Que remarquez-vous ? Quel rapport avec cette question ?

33. Soient $f \in \mathcal{H}_n$, $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ et $b \in \mathbb{Z}^2$. On a :

$$\hat{g}(x) = \sum_{y \in H_n} g(y) \omega^{-x \cdot y} = \sum_{y \in H_n} f(Ay + b) \omega^{-x \cdot y}.$$

On remarque que l'application $y \mapsto z = Ay + b$ de \mathbb{Z}^2 dans \mathbb{Z}^2 est une bijection de réciproque $z \mapsto A^{-1} \cdot (z - b)$ car A étant de déterminant ± 1 , la matrice A^{-1} est encore à coefficients dans \mathbb{Z} (cet argument est classique : on utilise l'égalité $A^{-1} = \pm \text{Com}(A)^\top$ et le fait que les coefficients de la comatrice soient des cofacteurs de A et donc des entiers). Elle induit alors une bijection de H_n dans lui-même par réduction modulo n (qui n'affecte pas le caractère inversible puisque le déterminant ± 1 reste non nul modulo n). On peut donc modifier la sommation et obtenir :

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= \sum_{y \in H_n} f(Ay + b) \omega^{-x \cdot y} = \sum_{z \in H_n} f(z) \omega^{-x \cdot A^{-1}(z-b)} = \omega^{x \cdot A^{-1}b} \sum_{z \in H_n} f(z) \omega^{-x \cdot A^{-1}z} \\ &= \omega^{x \cdot A^{-1}b} \sum_{z \in H_n} f(z) \omega^{-(A^{-1})^\top x \cdot z} \\ &= \omega^{(A^{-1}b) \cdot x} \hat{f}((A^{-1})^\top x). \end{aligned}$$

En effet, si on note X et Z les vecteurs colonnes représentant x et z :

$$x \cdot A^{-1}z = X^T A^{-1}Z = ((A^{-1})^T X)^T Z = (A^{-1})^T x \cdot z.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Réciproquement, si A est à coefficients entiers et inversible, est-ce que son déterminant vaut ± 1 ? (Si vous n'avez pas reconnu une question classique, une révision du chapitre V est attendue).
- Comprendre ici pourquoi il était important de se restreindre à des matrices de déterminant ± 1 : si on réduit modulo n une matrice inversible à coefficients entiers, vérifier qu'en général elle n'est plus inversible (ne pas chercher des contre-exemples compliqués).
- Noter que le produit $X^T Y$ apparaît y compris lorsqu'on n'est pas dans un cadre euclidien. Vérifie-t-il les mêmes propriétés que le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n ? (symétrie, bilinéarité, etc.)

34. Montrons d'abord que G est connexe. Soit $(x, y) \in (H_n)^2$. On pose $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Il est clair qu'il existe un chemin de $x = (x_1, x_2)$ vers $z = (x_1, y_2)$ en utilisant des arêtes « verticales » puis un chemin de z vers y en utilisant des arêtes « horizontales ». Le graphe est donc bien connexe.

Le graphe est de plus régulier car pour tout $x \in H_n$, la valence de x vaut 2 si $n = 2$ et 4 si $n > 2$. Soit $y \in H_n$, on considère $\chi_y : x \mapsto \omega^{x \cdot y}$. Commençons par calculer $\widehat{\chi}_y$. Pour tout $x \in H_n$:

$$\widehat{\chi}_y(x) = \sum_{z \in H_n} \chi_y(z) \omega^{-x \cdot z} = \sum_{z \in H_n} \omega^{(y-x) \cdot z} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ n^2 & \text{si } x = y \end{cases}$$

en reprenant les calculs faits à la question 32.

On cherche maintenant à déterminer les valeurs propres de T_G (endomorphisme de \mathbb{R}^V). L'endomorphisme étant diagonalisable, le spectre de l'endomorphisme analogue sur \mathbb{C}^V est le même.

Pour tout $y \in H_n$ et tout $x \in H_n$:

$$(T_G \chi_y)(x) = \sum_{z \in E(x)} (\chi_y(x) - \chi_y(z)) = 4\chi_y(x) - \chi_y(x + e_1) - \chi_y(x - e_1) - \chi_y(x + e_2) - \chi_y(x - e_2)$$

où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

En appliquant alors la question 33 avec $A = I_2$, on obtient pour tout x de H_n :

$$\widehat{(T_G \chi_y)}(x) = (4 - \omega^{e_1 \cdot x} - \omega^{-e_1 \cdot x} - \omega^{e_2 \cdot x} - \omega^{-e_2 \cdot x}) \widehat{\chi}_y(x),$$

or le terme de droite est égal à $(4 - \omega^{e_1 \cdot y} - \omega^{-e_1 \cdot y} - \omega^{e_2 \cdot y} - \omega^{-e_2 \cdot y}) \widehat{\chi}_y(x)$ car $\widehat{\chi}_y(x)$ est nul si $y \neq x$.

Si on note alors $y = (\alpha, \beta)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 4 - \omega^{e_1 \cdot y} - \omega^{-e_1 \cdot y} - \omega^{e_2 \cdot y} - \omega^{-e_2 \cdot y} &= 4 - \omega^\alpha - \omega^{-\alpha} - \omega^\beta - \omega^{-\beta} \\ &= 4 - 2 \cos\left(\frac{2\alpha\pi}{n}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\beta\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

On a donc : $\widehat{(T_G \chi_y)} = u(\alpha, \beta) \widehat{\chi}_y = u(\alpha, \beta) \chi_y$, en posant : $u(\alpha, \beta) = 4 - 2 \cos\left(\frac{2\alpha\pi}{n}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\beta\pi}{n}\right)$.

Comme $f \mapsto \widehat{f}$ est un isomorphisme, on a finalement :

$$T_G \chi_y = \left(4 - 2 \cos\left(\frac{2\alpha\pi}{n}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\beta\pi}{n}\right)\right) \chi_y.$$

Maintenant, la famille $(\chi_y)_{y \in H_n}$ est une base. En effet, c'est une famille libre car les $\widehat{\chi}_y$ en forment une et que $f \mapsto \widehat{f}$ est un isomorphisme. De plus la famille contient n^2 vecteurs et $\dim(\mathcal{H}_n) = n^2$. On a donc trouvé une base de vecteurs propres.

On en déduit que la deuxième valeur propre λ_2 est obtenue en prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ (ou inversement). On a donc : $\lambda_2 = 2 - 2 \cos(\frac{2\pi}{n}) = 4 \sin^2(\frac{\pi}{n})$.

Remarque. On remarque facilement que χ_y est la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{\{-y\}}$. Le calcul de $\widehat{\chi_y}$ prouve donc : $\forall x \in H_n, \widehat{\mathbb{1}_{\{y\}}}(x) = n^2 \mathbb{1}_{\{-x\}}$. C'est la formule d'inversion de Fourier. Par linéarité, on en déduit : $\forall f \in \mathcal{H}_n, \forall x \in H_n, \widehat{\widehat{f}}(-x) = n^2 f(x)$. Si vous revoyez le DST n° 4, cela vous évoquera un air connu.

● **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**

- Éclairer le sens de l'affirmation : « L'endomorphisme étant diagonalisable, le spectre de l'endomorphisme analogue sur \mathbb{C}^V est le même. » À quoi sert-elle ? Pourquoi se ramener à \mathbb{C}^V ?
- Vérifier le détail de ma remarque. Conclure qu'il est facile de fabriquer des fonctions de transformée prescrite. C'est souvent utile.
- Une fois qu'on a constaté que ces fonctions χ_y sont des transformées de Fourier de fonctions indicatrices, comprendre pourquoi on pouvait songer à leur étude même sans indication de l'énoncé.

35. Soit f un vecteur propre associé à une valeur propre λ non nulle. On a $Tf = \lambda f$ et donc $\widehat{Tf} = \lambda \widehat{f}$. En particulier :

$$\sum_{x \in H_n} f(x) = \widehat{f}(0) = \frac{1}{\lambda} \widehat{Tf}(0).$$

En utilisant alors la question 33 (on identifie endomorphisme et matrice « canoniquement » associée) :

$$\widehat{Tf}(0) = 4\widehat{f}(0) - \widehat{f}((T_1^{-1})^\top 0) - \widehat{f}((T_2^{-1})^\top 0) - \widehat{f}((T_1^{-1})^\top 0) - \widehat{f}((T_2^{-1})^\top 0) = 0.$$

On a bien : $\sum_{x \in H_n} f(x) = 0$.

36. Soit $f \in \mathcal{H}_n$, calculons \widehat{Tf} en utilisant les calculs de la question 33. Pour cela on note que :

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} : \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $(T_1^{-1})^\top = T_2^{-1}$ et $(T_2^{-1})^\top = T_1^{-1}$. De ce fait pour $x = (x_1, x_2) \in H_n$;

$$\begin{aligned} \widehat{Tf}(x) &= 4\widehat{f}(x) - \omega^0 \widehat{f}(T_2^{-1}x) - \omega^0 \widehat{f}(T_1^{-1}x) - \omega^{(T_1^{-1}e_1) \cdot x} \widehat{f}(T_2^{-1}x) - \omega^{(T_2^{-1}e_2) \cdot x} \widehat{f}(T_1^{-1}x) \\ &= 4\widehat{f}(x) - (1 + \omega^{x_1}) \widehat{f}(T_2^{-1}x) - (1 + \omega^{x_2}) \widehat{f}(T_1^{-1}x), \end{aligned}$$

donc : $\widehat{Tf} = 4\widehat{f} - U\widehat{f}$.

Maintenant, soient λ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associé à λ . On a : $U\widehat{f} = 4\widehat{f} - \widehat{Tf} = (4 - \lambda)\widehat{f}$. On en déduit que $F = \widehat{f}$ est non nulle (car f est non nulle et $f \mapsto \widehat{f}$ est injective), vérifie $\widehat{f}(0) = 0$ d'après la question 35 et est un vecteur propre pour U associé à la valeur propre $\nu = 4 - \lambda$.

Maintenant, en utilisant la propriété (T1) :

$$\forall F \in \mathcal{H}_n, \quad F(0,0) = 0 \implies |\langle F, UF \rangle| \leq \frac{73}{20} \langle F, F \rangle \quad (\text{T1})$$

on obtient :

$$|\langle F, UF \rangle| = |\langle F, \nu F \rangle| = |\nu| \langle F, F \rangle \leq \frac{73}{20} \langle F, F \rangle.$$

Finalement : $4 - \lambda \leq \frac{73}{20}$ et donc : $\lambda \geq \frac{80 - 73}{20} = \frac{7}{20}$.

37. On suppose (T2), c'est-à-dire :

$$\forall G \in (\mathbb{R}_+)^{H_n}, \quad G(0,0) = 0 \implies \langle G, U'G \rangle \leq \frac{73}{40} \langle G, G \rangle. \quad (\text{T2})$$

On considère $F : H_n \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $F(0) = 0$ et on pose $G = |F|$. On a alors :

$$|\langle F, UF \rangle| = \left| \sum_{x \in H_n} \overline{F(x)} (UF)(x) \right| \leq \sum_{x \in H_n} |F(x)| |(UF)(x)|.$$

Or, pour tout $x \in H_n$:

$$\begin{aligned} |(UF)(x)| &\leq |1 + \omega^{x_1}| |F(T_2^{-1}x)| + |1 + \omega^{x_2}| |F(T_1^{-1}x)| \\ &\leq 2 \left| \cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) \right| G(T_2^{-1}x) + 2 \left| \cos\left(\frac{\pi x_2}{n}\right) \right| G(T_1^{-1}x) \\ &= 2(U'G)(x) \end{aligned}$$

car $1 + \omega^{x_1} = 1 + e^{\frac{2ix_1\pi}{n}} = 2 \cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) e^{\frac{ix_1\pi}{n}}$ et de même pour $1 + \omega^{x_2}$. On obtient donc :

$$|\langle F, UF \rangle| \leq 2 \sum_{x \in H_n} G(x)(U'G)(x) = 2 \langle G, U'G \rangle.$$

Comme G est positive et s'annule en 0, on obtient bien la propriété (T1).

38. Soit $(x_1, x_2) \in D_n \setminus \{(0,0)\}$. On a :

$$T_1(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_2); T_2(x_1, x_2) = (x_1, 2x_1 + x_2)$$

et :

$$T_1^{-1}(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_2); T_2^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, -2x_1 + x_2).$$

Supposons pour commencer que $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$ et $|x_1| \neq |x_2|$, puis :

— on suppose que $0 < x_1 < x_2$, alors :

$$\overline{x_1 + 2x_2} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 & \text{si } x_1 + 2x_2 < \frac{n}{2} \\ x_1 + 2x_2 - n & \text{sinon (car } x_1 + 2x_2 < \frac{3n}{2}) \end{cases}$$

et donc :

- dans le premier cas : $|\overline{x_1 + 2x_2}| = x_1 + 2x_2 > x_1 = |\overline{x_1}|$ et donc : $T_1(x_1, x_2) \succ (x_1, x_2)$.
- dans le deuxième cas, comme : $x_1 + x_2 < \frac{n}{2}$, on a : $x_1 + 2x_2 - n < 0$ d'où : $|\overline{x_1 + 2x_2}| = n - x_1 - 2x_2$ qui est strictement supérieur à x_1 car $x_1 + x_2 < \frac{n}{2}$. On a donc encore : $T_1(x_1, x_2) \succ (x_1, x_2)$.

On obtient de même : $T_2(x_1, x_2) \succ (x_1, x_2)$.

Maintenant, regardons $T_1^{-1}(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_2)$. On a $x_1 - n < x_1 - 2x_2 < -x_1$, donc : $|\overline{x_1 - 2x_2}| > |x_1|$ et de ce fait : $T_1^{-1}(x_1, x_2) \prec (x_1, x_2)$.

Pour finir : $T_2^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, -2x_1 + x_2)$. Comme : $|x_2 - 2x_1| < |x_2|$, on obtient : $T_2^{-1}(x_1, x_2) \succ (x_1, x_2)$.

— les autres cas où $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ et $|x_1| \neq |x_2|$ sont similaires, on se ramène au cas ci-dessus.

On a montré que si $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$ et $|x_1| \neq |x_2|$ alors parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x$ et $T_2^{-1}x$ il y a trois éléments $\succ x$ et un élément $\prec x$.

Supposons maintenant que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ ou $|x_1| = |x_2|$. Alors :

- si $x_1 = 0$ (et donc $x_2 \neq 0$ car $x \neq 0$) alors : $T_1x = (2x_2, x_2) \succ x$, et : $T_1^{-1}x = (-2x_2, x_2) \succ x$ alors que T_2x et $T_2^{-1}x$ sont incomparables à x car ils valent x ;

- le cas $x_2 = 0$ est similaire au précédent ;
- il reste à traiter le cas où $|x_1| = |x_2|$; faisons par exemple le cas où $x = (\alpha, \alpha)$ avec $\alpha > 0$ (les autres cas sont analogues) ; on a $T_1x = (3\alpha, \alpha)$; comme $\alpha < 3\alpha < n - \alpha$ (car $2\alpha < \frac{n}{2}$), on a : $|\overline{3\alpha}| > |\alpha|$ et donc : $T_1x \succ x$; de même : $T_2x = (\alpha, 3\alpha) \succ x$; en revanche $T_1^{-1}x = (-\alpha, \alpha)$ et $T_2^{-1}x = (\alpha, -\alpha)$ ne sont pas comparables à x .

On a montré que si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ ou $|x_1| = |x_2|$ alors parmi $T_1x, T_2x, T_1^{-1}x$ et $T_2^{-1}x$ il y a deux éléments $\succ x$ et deux éléments incomparables à x .

39. Soit $x \in H_n \setminus \{(0,0)\}$. On pose :

$$R(x) = \left| \cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) \right| (\gamma(x, T_2x) + \gamma(x, T_2^{-1}x)) + \left| \cos\left(\frac{\pi x_2}{n}\right) \right| (\gamma(x, T_1x) + \gamma(x, T_1^{-1}x)).$$

Supposons que $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \in D_n \setminus \{(0,0)\}$. On a :

$$R(x) \leq \gamma(x, T_2x) + \gamma(x, T_2^{-1}x) + \gamma(x, T_1x) + \gamma(x, T_1^{-1}x)$$

car les cosinus sont majorés par 1. Maintenant, en utilisant la question 38, on obtient, dans le premier cas : $R(x) \leq \frac{12}{5} + \frac{5}{4} = \frac{73}{20}$, et dans le deuxième cas : $R(x) \leq \frac{8}{5} + 2 = \frac{18}{5} = \frac{72}{20} \leq \frac{73}{20}$.

Supposons à présent que $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \notin D_n \setminus \{(0,0)\}$. On a alors :

$$R(x) \leq 2 \left| \cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) \right| \frac{5}{4} + 2 \left| \cos\left(\frac{\pi x_2}{n}\right) \right| \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \left(\left| \cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) \right| + \left| \cos\left(\frac{\pi x_2}{n}\right) \right| \right),$$

car la fonction γ est majorée par $\frac{5}{4}$. Comme cosinus est paire, on peut supposer que x_1 et x_2 sont positifs, inférieurs à $\frac{n}{2}$ et tels que $x_1 + x_2 \geq \frac{n}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned} R(x) &\leq \frac{5}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x_1}{n}\right) + \cos\left(\frac{\pi x_2}{n}\right) \right) \leq 5 \cos\left(\frac{\pi(x_1 + x_2)}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi(x_1 - x_2)}{2n}\right) \\ &\leq 5 \cos\left(\frac{\pi(x_1 + x_2)}{2n}\right) \\ &\leq 5 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{50\sqrt{2}}{20} \end{aligned}$$

En effet le cosinus est décroissant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi(x_1 + x_2)}{2n} \leq \frac{\pi}{2}$. Il suffit alors de remarquer que : $50\sqrt{2} \approx 70,7 < 73$, donc : $R(x) \leq \frac{73}{20}$.

40. Soient a et b deux réels, il est bien connu que : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (car $(a - b)^2 \geq 0$) donc si x et y sont incomparables, on a :

$$2G(x)G(y) \leq (G(x))^2 + (G(y))^2 = \gamma(x, y)(G(x))^2 + \gamma(y, x)(G(y))^2.$$

De même : $\frac{5}{4}a^2 + \frac{4}{5}b^2 \geq 2ab$. En effet :

$$\frac{5}{4}a^2 - 2ab + \frac{4}{5}b^2 = \frac{5}{4} \left(a^2 - \frac{8}{5}ab \right) + \frac{4}{5}b^2 = \frac{5}{4} \left(a^2 - \frac{4}{5}b \right)^2 + \left(\frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5} \right)^2 \right) b^2 \geq 0.$$

On pouvait aussi passer par un calcul de discriminant ou (c'est très pédant) montrer que la forme bilinéaire $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mapsto \frac{5}{4}a_1b_1 - (a_1b_2 + a_2b_1) + \frac{4}{5}a_2b_2 = (a_1 \ b_1) \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 \\ -1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ est symétrique positive en passant par les valeurs propres de la matrice symétrique associée

(cela revient à faire le calcul de discriminant indiqué). Comme la quantité ci-dessus s'obtient en prenant $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = (a, b)$, on obtient le résultat voulu.

De ce fait, si $x \succ y$, comme $\gamma(x, y) = \frac{5}{4}$ et donc $\gamma(y, x) = \frac{4}{5}$:

$$2G(x)G(y) \leq \frac{5}{4}(G(x))^2 + \frac{4}{5}(G(y))^2 = \gamma(x, y)(G(x))^2 + \gamma(y, x)(G(y))^2.$$

Pour finir, on démontre (T2). Soit $G : H_n \rightarrow \mathbb{R}$ positive telle que $G(0) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} & 2 \langle G, U'G \rangle \\ &= 2 \sum_{x \in H_n} G(x)(U'G)(x) \\ &= \sum_{x \in H_n} \left[2G(x)G(T_2^{-1}x) \left| \cos \left(\frac{\pi x_1}{n} \right) \right| + 2G(x)G(T_1^{-1}x) \left| \cos \left(\frac{\pi x_2}{n} \right) \right| \right] \\ &\leq \sum_{x \in H_n} \left[(\gamma(x, T_2^{-1}x)(G(x))^2 + \gamma(T_2^{-1}x, x)G^2(T_2^{-1}x)) \left| \cos \left(\frac{\pi x_1}{n} \right) \right| + (\gamma(x, T_1^{-1}x)(G(x))^2 \right. \\ &\quad \left. + \gamma(T_1^{-1}x, x)G(T_1^{-1}x))^2 \left| \cos \left(\frac{\pi x_2}{n} \right) \right| \right] \\ &\leq \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_2^{-1}x)(G(x))^2 \left| \cos \left(\frac{\pi x_1}{n} \right) \right| + \sum_{x \in H_n} \gamma(T_2^{-1}x, x)G(T_2^{-1}x)^2 \left| \cos \left(\frac{\pi x_1}{n} \right) \right| \\ &\quad + \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_1^{-1}x)(G(x))^2 \left| \cos \left(\frac{\pi x_2}{n} \right) \right| + \sum_{x \in H_n} \gamma(T_1^{-1}x, x)G^2(T_1^{-1}x) \left| \cos \left(\frac{\pi x_2}{n} \right) \right| \\ &\leq \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_2^{-1}x)(G(x))^2 \left| \cos \left(\frac{\pi x_1}{n} \right) \right| + \sum_{y \in H_n} \gamma(y, T_2y)(G(y))^2 \left| \cos \left(\frac{\pi [T_2y]_1}{n} \right) \right| \\ &\quad + \sum_{x \in H_n} \gamma(x, T_1^{-1}x)(G(x))^2 \left| \cos \left(\frac{\pi x_2}{n} \right) \right| + \sum_{y \in H_n} \gamma(y, T_1y)(G(y))^2 \left| \cos \left(\frac{\pi [T_1y]_2}{n} \right) \right| \\ &\leq \sum_{x \in H_n} (G(x))^2 \left[\gamma(x, T_2^{-1}x) \left| \cos \left(\frac{\pi x_1}{n} \right) \right| + \gamma(x, T_2x) \left| \cos \left(\frac{\pi x_1}{n} \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \gamma(x, T_1^{-1}x) \left| \cos \left(\frac{\pi x_2}{n} \right) \right| + \gamma(x, T_1x) \left| \cos \left(\frac{\pi x_2}{n} \right) \right| \right] \\ &\leq \frac{73}{20} \sum_{x \in H_n} (G(x))^2, \end{aligned}$$

où l'on raisonne semblablement à la question précédente pour obtenir la dernière inégalité. Finalement : $\langle G, U'G \rangle \leq \frac{73}{40} \langle G, G \rangle$.

🔴 **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** À l'aide des différentes pistes proposées, donner tous les scalaires α, β et γ tels que $\alpha x^2 + \beta y^2 \geq 2\gamma xy$ soit valable pour tous x et y .