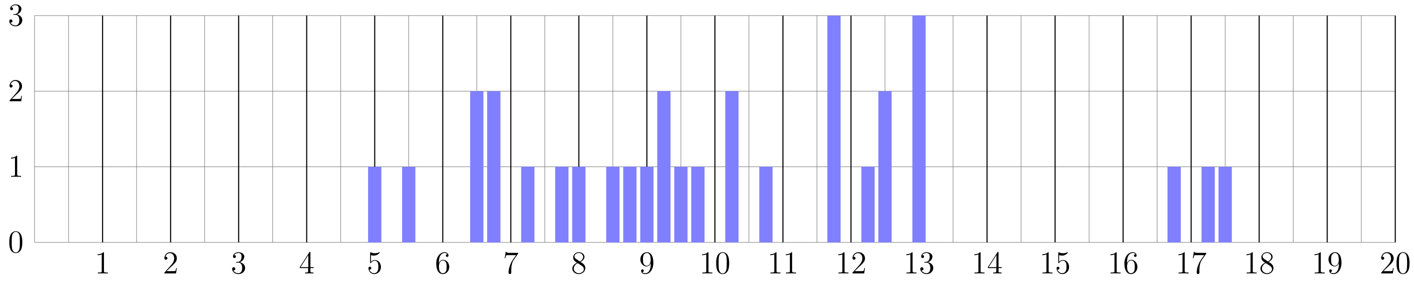
Devoir sur table n° 10 – Compte rendu

Répartition des notes.



Barème initial sur **64 points**.

Moyenne : 10,27. **Écart-type :** 3,27.

Premier quartile : 7,875. **Médiane :** 9,75. **Troisième quartile :** 12,375.

Redite des devoirs précédents.

1. La continuité est oubliée par presque toute la classe dans les études d'intégrabilité. Soupirs. La continuité de α_i' n'avait d'ailleurs rien d'une évidence. Comme j'en ai pris l'habitude désormais, je l'ai sévèrement sanctionné (zéro point aux parties correspondantes du barème).
2. Quelques élèves parlent de la dérivabilité ou classe C^1 de $A \mapsto \det(A)$ ou $A \mapsto \mathrm{Com}(A)$. Mais qu'est-ce que cela veut dire pour vous ? Ces fonctions ne sont pas définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Dire que Com est dérivable en A signifie que $\lim\limits_{H\to 0} \frac{\mathrm{Com}(A+H)-\mathrm{Com}(A)}{H}$ existe et est finie, c'est cela ?

   En attendant de donner un sens à cette assertion (chapitre XIII), ne parlez pas de classe C^1 avec nonchalance (je vous avais déjà fait une remarque analogue au DM n° 3 : le sens des objets ne vous préoccupe pas assez).

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

3. Vous savez très bien qu'écrire $(f(t))'$ au lieu de $f'(t)$ est incorrect. Vous l'aviez évité jusqu'à présent : continuez. La première écriture est horripilante, surtout quand elle n'est pas justifiée par une commodité de rédaction.

Imprécisions mathématiques.

4. Beaucoup d'élèves n'ont pas détaillé le passage de « T_0 est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1 » à « il y a n valeurs propres », laissant planer un doute sur leur connaissance précise des critères de diagonalisation.

   Certaines formulations suspectes me laissent penser que pour certains élèves, toute matrice diagonalisable admet exactement n valeurs propres distinctes ; ou, de manière équivalente, que le polynôme caractéristique d'une matrice diagonalisable doit être scindé à racines simples (ce qui serait une immense bêtise).
5. Peu d'élèves se souviennent que dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, un inverse à gauche est aussi un inverse à droite (et réciproquement). Une fois que vous avez montré que $V(t)^\top V(t) = \mathrm{I}_n$, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire pour en déduire que $V(t)V(t)^\top = \mathrm{I}_n$.

   Certains ont prétendu que l'égalité $VV^\top = \mathrm{I}_n$ s'obtenait « par un calcul similaire ». Ces élèves n'ont clairement pas essayé car c'est faux.
6. Plusieurs copies n'ont pas l'air de se soucier de la spécificité des fonctions vectorielles au moment de dériver : pas de justification pour la dérivabilité et dérivation de $V^\top$ ou de $V^\top V$. Parler de « produit de fonctions dérivables » est trop léger : vous n'avez pas de telle proposition dans le cours (et c'est normal : un espace vectoriel n'a pas de produit interne en général ; n'insinuez pas au correcteur que vous pensez le contraire).
7. Ce n'est pas du cours, qu'une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ a une limite nulle ou pas de limite en $+\infty$. Le démontrer.

8. Attention : l'argument « le déterminant est n-linéaire (ou polynomial) donc continu » est valable pour obtenir la continuité de $M \mapsto \chi_M(x)$ (avec $x \in \mathbb{R}$ fixé), mais est insuffisant pour obtenir celle de $M \mapsto \chi_M$.

   En effet, dans ce cas-là, $\chi_M = \det(X\mathrm{I}_n - M)$ nécessite *a priori* la continuité du déterminant sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}(X))$. C'est cependant un espace vectoriel de dimension infinie car $\mathbb{R}[X]$ s'y injecte, donc la continuité du déterminant par les arguments ci-dessus ne va plus de soi (pour commencer : la continuité dépend de la norme !), parce que nous n'avons démontré la continuité des applications polynomiales et multilinéaires qu'en dimension finie (nous l'avons fait pour $\|\cdot\|_1$ puis nous avons utilisé l'équivalence des normes).

   L'idée était de se ramener au cas de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ en décomposant $\det(X\mathrm{I}_n - M) \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique et en raisonnant composante par composante (les composantes sont alors des déterminants de matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et on peut bien invoquer l'argument précédent).

   Il était tout à fait possible de traiter le sujet avec la continuité de $M \mapsto \chi_M(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (grâce à l'injectivité de $P \mapsto \tilde{P}$), mais j'ai voulu tester votre esprit critique.

💣 Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

9. Je ne m'explique pas pourquoi si peu d'élèves ont reconnu un problème de Cauchy lorsqu'il fallait justifier l'existence et unicité de $V : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $V' = UV$ et $V(0) = \mathrm{I}_n$.

10. La plus grosse bêtise conceptuelle du devoir est d'affirmer que les solutions de $Y' = AY$ sont toujours de la forme $t \mapsto \exp(\mathcal{A}(t))X$ avec $\mathcal{A}$ une primitive de A. On ne l'a formulé dans le cours que dans le cas où A est constante, et pour cause : la dérivée de $\exp \circ f$ N'est PAS $f' \cdot \exp \circ f$ en général ; il faut *a priori* que f et f' commutent (ce fut une mise en garde du chapitre X). Méditer sur le cas particulier $f : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour en juger.

    La finesse du théorème de Cauchy linéaire a dû vous échapper (ainsi que la raison pour laquelle sa démonstration est si exigeante, et le fait qu'on n'ait pas de méthode systématique pour résoudre une équation différentielle linéaire même d'ordre 2), s'il vous paraît si facile d'expliciter les solutions de toute équation différentielle.

11. Il est faux d'affirmer qu'une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$ a forcément une limite nulle en $+\infty$. Nous avons donné deux contre-exemples au chapitre I (l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ étant l'un d'entre eux).

12. Beaucoup d'erreurs grossières d'analyse réelle ont été faites, malgré des contre-exemples faciles ou du moins déjà vus. Citons les deux exemples les plus fréquents : 1° il est faux qu'une fonction non bornée et positive sur $\mathbb{R}_+$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (contre-exemple : $t \mapsto t\sin(t)^2$), 2° il est faux que si f a une limite finie en $+\infty$ alors f' tend vers 0 en $+\infty$ (il suffit de prendre une fonction qui oscille énormément avec une amplitude de plus en plus petite : $t \mapsto \frac{\sin(t^2)}{t}$ par exemple).

    Vous savez pourtant qu'un contrôle sur une fonction f n'implique pas de contrôle sur f' (hors du cas particulier des fonctions développables en série entière *via* la formule intégrale de Cauchy, ce qui est très remarquable) : c'est le contraire qui est possible.

    Vous avez suffisamment d'expérience des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour juger de la pertinence de votre raisonnement sur quelques exemples (dessinés, cela peut parfois suffire).

13. Autre erreur grotesque : $t \mapsto \alpha_i(t)^2$ serait paire, sans doute parce que $u \mapsto u^2$ l'est. Il est pourtant facile de remarquer sa bévue en considérant $t \mapsto (e^t)^2 = e^{2t}$ (qui n'est pas paire) par exemple.

Questions subtiles peu réussies, mais instructives et à retravailler.

— PREMIÈRE PARTIE : question 2, question 3 (anormal) ;
— DEUXIÈME PARTIE : questions 9 et 14 ;
— TROISIÈME PARTIE : question 19 ;
— QUATRIÈME PARTIE : question 26.