Devoir sur table nº 10
(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Ce sujet est un panaché de différentes inspirations. Les principales sont : Mathématiques II de Mines-Ponts, filière PC, année 2013, dont j'ai supprimé une partie (cela donna naissance aux parties I et II du devoir), et Mathématiques du Concours X-Cachan, filière PSI, année 2003, où là aussi je n'ai retenu qu'une partie et demie du sujet.

Comme d'habitude depuis un bon nombre de semaines, je n'ai pas le temps de développer ce commentaire.

Ce qu'on retiendra en bref. Sous-espaces propres d'une matrice tridiagonale. Reconnaître un problème de Cauchy linéaire lorsqu'il n'est pas sous la forme $Y' = AY + B$. Obtenir des identités ou propriétés de fonctions vectorielles par dérivation. Lemme de Grönwall. Calcul de wronskien. Image d'une exponentielle de matrice. Algorithme de Gram-Schmidt et traduction matricielle.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1 à 4 ;
— DEUXIÈME PARTIE : question 7, questions 9 à 11, question 15 ;
— TROISIÈME PARTIE : questions 16 et 17, question 21 ;
— QUATRIÈME PARTIE : questions 22 à 24, question 26, question 27.

2 Rapport officiel de l'épreuve (parties I à II)

2.1 Remarques générales

Ce sujet est une variation sur le thème des matrices réelles symétriques et tridiagonales, encore appelées matrices de Jacobi.

(...) Les [deux premières parties] (...) forment un ensemble cohérent. Elles sont centrées sur l'étude du flot de Toda. Ce flot provient d'un système différentiel non linéaire que l'on peut voir comme une version continue de l'algorithme QR. À partir d'une matrice symétrique tridiagonale T_0 à valeurs propres simples, le flot de Toda engendre des matrices symétriques tridiagonales dépendant du temps t qui lui sont orthogonalement semblables et convergent, lorsque t tend vers $+\infty$, vers une matrice diagonale. La vitesse de convergence est exponentielle.

La mise en place de la démonstration repose sur l'existence d'une paire de Lax, qui donne facilement le fait que les matrices $T(t)$ issues du flot de Toda sont orthogonalement semblables. Ce point acquis, des techniques classiques d'analyse réelle établissent la convergence.

Au delà de l'aspect paire de Lax, le flot de Toda possède de remarquables propriétés de complète intégrabilité, mise en évidence par Jürgen Moser mais non abordées dans le sujet. On pourra se reporter à l'article de Moser : *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential - an integrable system*, in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Springer-Verlag, New-York, 1975, pp. 467–497.

Notons enfin que l'existence d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ du système (non linéaire) de Toda ne va pas de soi. Elle se déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz général, de la majoration *a priori* donnée par l'intégrale première L de l'énoncé et d'un argument usuel de prolongement. Dans le sujet, cette existence était supposée acquise.

2.2 Remarques particulières

Nous ne parlerons que des questions 1 à 12 qui sont celles ayant été traitées par un nombre conséquent de candidats.

Q1. Un bon résultat pour cette question de facture classique. La plupart des candidats écrivent correctement l'équation aux éléments propres et beaucoup comprennent comment conclure. On note cependant une certaine désinvolture dans la rédaction de la récurrence descendante permettant de montrer que toutes les coordonnées du vecteur sont nulles si la dernière l'est.

Q2. Cette question avait deux volets. Chacun d'entre eux a été traité par une part significative de candidats, les réponses complètes à la question ayant été curieusement rares. Le fait que les espaces propres soient de dimension 1 pouvait s'obtenir de bien des manières, soit à partir de la question précédente, soit en exprimant les coordonnées d'un vecteur propre en fonction de la dernière d'entre elles, soit en déterminant le rang de $T_0 - \lambda \mathrm{I}_n$. Dans la seconde partie, il fallait invoquer le théorème spectral et indiquer brièvement pourquoi une matrice diagonalisable de taille n dont les espaces propres sont des droites admet n valeurs propres distinctes. Cette argumentation a rarement été complète.

Q3. Répondre à cette question en respectant le programme de PC était vraiment difficile en temps limité. Une proportion significative d'étudiants a compris qu'il s'agissait de justifier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy linéaire et les correcteurs ont, comme il est normal en pareil cas, noté avec une grande indulgence.

Q4. Cette question était facile mais demandait une certaine autonomie. Les résultats en sont binaires.

Q5. L'énoncé demandait de prouver qu'une matrice est indépendante du temps. Les candidats qui pensent à dériver sont plus nombreux que dans la question précédente. La dérivation des fonctions vectorielles n'est cependant pas assimilée par tous ceux qui se lancent dans le calcul. Peu nombreux sont ceux qui font le lien avec la question précédente et voient que les matrices $T(t)$ sont orthogonalement semblables à $T(0)$, donc ont toutes même spectre. Il s'agit sans doute ici du même phénomène que dans la question précédente : les questions ouvertes paralysent la plupart des candidats.

Q6. Question très souvent abordée. Le calcul de la dérivée de L et la mise en évidence de la somme télescopique sont souvent bien traités. En revanche, peu de candidats établissent le caractère borné des fonctions β_i, pourtant évident par simple majoration à partir du fait que L est une intégrale première. Beaucoup de réponses dénotent un manque important de maturité en analyse réelle, en s'appuyant sur des assertions du genre : β_i n'est pas bornée, donc tend vers $+\infty$ en un certain point.

Q7. Beaucoup d'erreurs ici. Tout d'abord, le caractère borné de $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \alpha_i^2$ ne suffit pas : la positivité des α_i^2 joue un rôle essentiel, qui n'est bien compris et bien expliqué que dans une minorité de copies. D'autre part, certains candidats croient curieusement reconnaître un problème de permutation série/intégrale. De manière générale, cette question et les suivantes mettent en évidence, chez la plupart des candidats, une compréhension très superficielle du cours sur l'intégrabilité.

Q8. La question n'était pas difficile, mais demandait un peu de soin. Beaucoup de réponses fausses, fondées sur des arguments du type : « puisque $\sum_{j=1}^{i} \beta_j$ a une limite en $+\infty$, la fonction β_i aussi. »

Q9. L'existence des limites des fonctions α_i demandait un peu de lucidité. Il suffisait d'établir l'intégrabilité des α_i' , elle-même conséquence de l'intégrabilité des α_i^2, du caractère borné des β_i et d'un argument standard (le produit d'une fonction intégrable par une fonction bornée est intégrable). Les réponses complètes sont rares, les arguments fantaisistes fréquents (on lit par exemple : « le produit de deux fonctions intégrables est intégrable »). La nullité de la limite n'a été démontrée que par d'excellents candidats.

Q10. Il fallait utiliser la continuité du déterminant (elle-même à justifier en un mot) et le fait que les α_i tendent vers 0. Les correcteurs ont relevé ici de nombreuses réponses relevant de l'escroquerie pure et simple.

Q11. Les candidats ayant justifié l'indépendance des valeurs propres de $T(t)$ par rapport à t à la question 5 ont en général résolu cette question.

Q12. La relation $\alpha(\tau) = 0$ est souvent affirmée, mais pas toujours justifiée à l'aide de la continuité de α. Il en est de même de l'assertion relative au signe.

2.3 Commentaires généraux

Le sujet était de longueur raisonnable et a d'ailleurs été quasiment fini par les meilleurs des candidats. Il couvrait une part significative du programme : algèbre linéaire (manipulation de matrices écrites par blocs, éléments propres), espaces euclidiens (généralités, matrices orthogonales, théorème spectral), intégrabilité des fonctions d'une variable réelle, dérivation des fonctions vectorielles. La rédaction comportait quelques imprécisions, qui ont pu handicaper certains candidats faibles, ainsi qu'une question relative aux équations différentielles linéaires, difficile à traiter avec le programme de PC, pour laquelle les correcteurs ont adopté un barème très indulgent.

En dépit de ces imperfections mineures, l'épreuve a pleinement atteint son but en permettant une bonne répartition des notes. Les copies faibles restent cependant très nombreuses. Force est de reconnaître que beaucoup de candidats maîtrisent fort mal des objets et techniques de base.

2.4 Conseils aux futurs candidats

Comme souvent, c'est le travail en profondeur du cours qui est valorisé dans ce problème. Il faut bien entendu connaître les notions et les énoncés des théorèmes, afin d'éviter les confusions conceptuelles. Il est également indispensable de comprendre les idées sur lesquels le cours se fonde, afin d'en identifier clairement le champ d'application.

D'autre part, il n'est pas de mathématiques sans un minimum de technique. Si les calculs exagérément longs et techniques ne sont plus vraiment de mise en CPGE, il reste indispensable de savoir mener à bien avec efficacité des manipulations simples, et ce, sur tous les chapitres du programme. Ce problème est à ce titre significatif : on y effectue une grande variété de calculs (algébriques et analytiques) simples. Notons, pour n'y plus revenir lors de l'analyse détaillée des questions, que les inégalités demeurent un point faible d'une grande partie des candidats.

Face à un problème, l'honnêteté intellectuelle est de mise. L'attitude consistant à dissimuler l'incompréhension d'une question par un discours filandreux ou un passage en force, influence de manière très négative la perception qu'a le correcteur de l'ensemble de la copie et est lourdement pénalisée (cf commentaire Q10 ci-avant).

Rappelons enfin que la présentation et la rédaction sont systématiquement évaluées par les correcteurs. Il est indispensable de rédiger de manière claire, précise et si possible non diluée. Les résultats doivent être mis en évidence, par exemple encadrés.

3 Corrigé

Première partie – Matrices de Jacobi

1. Par définition d'un vecteur propre, on a : $T_0X = \lambda X$, ce qui donne en raisonnant coefficient par coefficient :
$$\left\{\begin{array}{rcl} (b_1-\lambda)x_1 + a_1 & = & 0, \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!], \quad a_{k-1}x_{k-1} + (b_k-\lambda)x_k + a_k x_{k+1} & = & 0; \\ a_{n-1}x_{n-1} + (b_n-\lambda)x_n & = & 0. \end{array}\right.$$
Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on a : $x_n = 0$. Comme $a_{n-1} \neq 0$ par hypothèse, la dernière équation donne : $x_{n-1} = 0$. Comme : $a_{n-2} \neq 0$, la précédente donne alors : $x_{n-2} = 0$. Le processus (récurrent) se poursuit jusqu'à exploiter la seconde équation qui, comme : $a_1 \neq 0$, donne : $x_1 = 0$. On a alors : $X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ce qui est contradictoire avec le fait que X est vecteur propre.
Ceci montre par l'absurde que l'on a : $x_n \neq 0$ (ce pouvait aussi être un raisonnement par contraposée, mais j'obéis à l'énoncé).
Remarque. Si ce raisonnement à la « et ainsi de suite » déplaît par son laxisme, il suffit de rédiger une récurrence soignée ou de montrer que, sous l'hypothèse que $x_n = 0$, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$, en raisonnant sur le plus grand indice $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $x_i \neq 0$ (s'il existe) et en obtenant une contradiction grâce aux égalités ci-dessus. Comme je l'ai souvent souligné dans les corrigés, il est exactement équivalent de raisonner par récurrence ou par l'absurde en raisonnant sur un contre-exemple minimal ou maximal.
Remarque. La relation de récurrence du second ordre ci-dessus permet d'expliciter les coordonnées des vecteurs propres lorsque les a_i et b_i ont une valeur ne dépendant pas de l'indice i. Je recommande d'aussi poser $x_0 = x_{n+1} = 0$ par convention.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> - Rédiger la récurrence que j'ai omise si vous avez besoin de vous convaincre de l'argument.
> - Pourquoi la remarque sur l'équivalence entre récurrence et raisonnement par l'absurde (en raisonnant sur un contre-exemple minimal) est-elle vraie ?
> - Faire l'explicitation des vecteurs propres en remarque. Que vient simplifier la convention $x_0 = 0$?

2. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)$ et U, V deux vecteurs propres associés, dont on note u_k et v_k les coordonnées. Montrons que (U, V) est liée : on note que si c'est le cas, alors un coefficient de proportionnalité doit être $\frac{v_n}{u_n}$ ou $\frac{u_n}{v_n}$: cela va aiguiller le raisonnement qui suit.
La question précédente montre que u_n et v_n sont non nuls. Par ailleurs, on a : $v_nU - u_nV \in \ker(T_0 - \lambda \mathrm{I}_n)$ (car un sous-espace propre est un espace vectoriel) et la dernière coordonnée de ce vecteur est nulle. La question précédente implique donc : $v_nU - u_nV = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi (U, V) est liée. Puisque toute famille de deux vecteurs non nuls de $\ker(T_0 - \lambda \mathrm{I}_n)$ est liée, ce doit être l'espace vectoriel trivial (ce qui est exclu car λ est valeur propre) ou une droite vectorielle. Ainsi :
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0), \quad \dim\left(\ker(T_0 - \lambda \mathrm{I}_n)\right) = 1.$$
Or T_0 est diagonalisable d'après le théorème spectral admis dans l'énoncé. La somme des dimensions des sous-espaces propres est donc égale à n. Et comme toutes ces dimensions valent 1, on a finalement : $\mathrm{card}(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)) = n$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi n'ai-je pas raisonné de manière directe en exhibant une base de cardinal 1 de $\ker(T_0 - \lambda \mathrm{I}_n)$?

— Peut-on être plus précis et expliciter les valeurs propres et sous-espaces propres, au moins dans des cas particuliers ? Voir si besoin la remarque de la question précédente.

— Pourquoi, si toute famille de deux vecteurs non nuls est liée, l'espace vectoriel ambiant doit être de dimension au plus 1 ? Il me semble plus direct de raisonner avec la contraposée. Est-ce que cela se généralise à des familles de cardinal plus grand ?

3. Il s'agit de remarquer que nous sommes en présence d'un problème de Cauchy linéaire. Considérons l'application :

$$a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) \\ t & \mapsto & (X \mapsto U(t)X) \end{cases}$$

Alors le système différentiel (‡) équivaut au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & V'(t) & = & a(t)(V(t)), \\ & V(0) & = & \mathrm{I}_n, \end{cases}$$

et comme a est continue sur $\mathbb{R}$ (par continuité de U, puisque ses composantes sont des applications dérivables, et de l'application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie $M \mapsto (X \mapsto MX)$), le théorème de Cauchy linéaire nous assure l'existence et l'unicité d'une solution sur $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comprendre par cet exemple pourquoi l'énoncé « géométrique » du théorème de Cauchy linéaire (avec des applications $a : I \to \mathrm{L}(E)$ et $b : I \to E$) permet d'aisément contourner des difficultés où l'on resterait cloîtré avec l'énoncé matriciel concernant $Y' = AY + B$.

— Pourquoi invoqué-je la continuité de $M \mapsto (X \mapsto MX)$, et non celle de $X \mapsto MX$ ou $M \mapsto MX$ plus simplement ? Bien faire attention aux espaces de départ et d'arrivée de toutes les fonctions que l'on compose pour obtenir a.

4. On doit montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $V(t)^\top V(t) = \mathrm{I}_n$. Pour cela, il suffit de montrer que l'application $W : t \mapsto V(t)^\top V(t)$ est constante, égale à I_n grâce à sa valeur en 0. Nous allons le montrer par un calcul de dérivée.

Comme V est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'application $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ bilinéaire sur $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$ qui est de dimension finie, l'application W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W'(t) = V'(t)^\top V(t) + V(t)^\top V'(t).$$

Or V est solution de (‡), donc par linéarité de la transposition on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad V'(t)^\top = (U(t)V(t))^\top = V(t)^\top U(t)^\top = -V(t)^\top U(t)$$

car $U(t)$ est manifestement antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W'(t) = -V(t)^\top U(t)V(t) + V(t)^\top U(t)V(t) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}.$$

L'application W est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme : $W(0) = \mathrm{I}_n$, on a ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ V(t)^\top V(t) = W(t) = \mathrm{I}_n$$

ce qui montre le résultat voulu : $\forall t \in \mathbb{R}$, $V(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi était-il naturel de vouloir montrer le résultat par un calcul de dérivée ?

— Bien noter les arguments invoqués pour dériver une transposée, un produit matriciel.

5. Comme V, $V^\top$ et T sont dérivables et l'application $(A,B,C)\mapsto ABC$ trilinéaire, on a :

$$\left(V^\top TV\right)' = V'^\top TV + V^\top T'V + V^\top TV' \overset{(\dagger)+(\ddagger)}{=} V^\top U^\top TV + V^\top(UT-TU)V + V^\top TUV = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})},$$

la dernière égalité provenant de l'antisymétrie de $U(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Une fonction à dérivée nulle sur un intervalle est constante et ainsi :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad V(t)^\top T(t)V(t) = V(0)^\top T(0)V(0) = T_0.$$

Comme $V(t)$ est dans $\mathcal{O}_n$, on a : $V(t)^\top = V(t)^{-1}$, donc ceci montre que $T(t)$ est semblable à T_0 pour tout $t\in\mathbb{R}$, une matrice de passage étant $V(t)$. Deux matrices semblables ayant même spectre, on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T(t)) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0).$$

Les valeurs propres de $T(t)$ ne dépendent donc pas de $t\in\mathbb{R}$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Mêmes commentaires que dans la question précédente.

Deuxième partie – Étude asymptotique

6. L'application L est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque les α_i et β_i le sont, et :

$$L' = 2\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\alpha_i' + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\beta_i' = 2\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^2\left(\beta_{i+1}-\beta_i\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(\alpha_i^2-\alpha_{i-1}^2\right).$$

En développant, les termes s'éliminent presque tous. Il reste :

$$L' = -2\alpha_0^2\beta_1 + 2\beta_n\alpha_n^2 = 0.$$

L'application L est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$\forall t\in\mathbb{R},\ L(t) = L(0) = \sum_{i=1}^{n-1}a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i^2.$$

Une somme de carrés étant positive, on a donc : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\beta_i(t)^2 \leqslant 2L(t) = 2L(0)$, d'où le résultat en extrayant la racine carrée (un majorant de $|\beta_i|$ est $\sqrt{2L(0)}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$).

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi invoqué-je la positivité des carrés ?
> — On note que dans l'expression de L', il y a des sommes presque télescopiques. Aurait-on pu les rendre « vraiment » télescopiques pour simplifier le calcul ?
> — Noter la ressemblance entre les deux expressions de L', et l'égalité : $\int_a^b(uv'+u'v) = [uv]_a^b$. Qu'est-ce que cette observation aurait pu inciter à faire, pour simplifier L' autrement que par un développement naïf ?

7. Soit $i\in[\![1,n-1]\!]$. On a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \sum_{j=1}^{i}\beta_j'(t) = 2\sum_{j=1}^{i}(\alpha_j^2(t)-\alpha_{j-1}^2(t)) = 2(\alpha_i^2(t)-\alpha_0^2(t)) = 2\alpha_i^2(t).$$

Intégrons cette égalité sur $[0,t]$. On obtient :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad 2\int_0^t\alpha_i^2(u)\mathrm{d}u = \sum_{j=1}^{i}(\beta_j(t)-\beta_j(0)) = \sum_{j=1}^{i}(\beta_j(t)-b_j).$$

La fonction $t\mapsto\displaystyle\int_0^t\alpha_i^2(u)\mathrm{d}u$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque α_i^2 est positive) et elle est bornée car les β_j le sont d'après la question précédente. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\alpha_i^2$ converge. Comme α_i^2 est une fonction positive, cela équivaut à l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— S'assurer que je ne dis pas de bêtise en raisonnant sur la monotonie de $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \alpha_i^2(u)\mathrm{d}u$ pour avoir la convergence de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha_i^2$: ne devrais-je pas seulement avoir la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha_i^2$ par ce raisonnement ?

— Pourquoi n'ai-je pas intégré de 0 à $+\infty$ en invoquant le fait que l'intégrale d'une fonction positive soit toujours définie (même en cas de divergence), et en faisant un calcul direct aboutissant à : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \alpha_i^2 < +\infty$, comme il est très souvent plaisant de faire ? À quelle difficulté rédactionnelle (certes résorbable) me serais-je heurté ?

8. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Par le flot de Toda, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \beta_i(t) - b_i = \int_0^t \beta_i' = \int_0^t \alpha_i^2 - \int_0^t \alpha_{i-1}^2.$$

Or par la question précédente α_i^2 et α_{i-1}^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ (pour $i = n$ cela découle trivialement de : $\alpha_n = 0$), donc leurs intégrales sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ convergent. On en déduit que le membre de droite de l'égalité ci-dessus admet une limite finie en $+\infty$ et $-\infty$, donc β_i aussi : d'où le résultat.

9. L'application $\alpha_i\alpha_i'$ est continue sur $\mathbb{R}$ (*a priori* α_i est seulement dérivable, mais le fait d'être solution du flot de Toda implique que $\alpha_i' = \alpha_i\,(\beta_{i+1} - \beta_i)$ est continu ; en fait, le flot de Toda implique même la classe C^∞ des α_i et β_i). De plus, comme β_i et β_{i+1} sont bornées sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}} |\alpha_i(t)\alpha_i'(t)|\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\alpha_i^2(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t))|\mathrm{d}t \leqslant (\|\beta_{i+1}\|_\infty + \|\beta_i\|_\infty) \int_{\mathbb{R}} \alpha_i^2(t)\mathrm{d}t < +\infty$$

par intégrabilité de α_i^2. Ainsi $\alpha_i\alpha_i'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ comme attendu.
On nous demande d'en déduire la limite de α_i en $\pm\infty$. Remarquons que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \int_0^t \alpha_i(u)\alpha_i'(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(\alpha_i^2(t) - \alpha_i^2(0)) = \frac{1}{2}\alpha_i^2(t).$$

On vient de voir que le membre de gauche admet une limite finie en $\pm\infty$ (l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ entraîne celle sur $\mathbb{R}_+$, qui elle-même entraîne la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha_i\alpha_i'$). Il en est donc de même du membre de droite et α_i^2 admet des limites finies ℓ_i^+ et ℓ_i^- en $+\infty$ et $-\infty$. Ces limites doivent être nulles puisque, dans le cas contraire, l'équivalent : $\alpha_i^2 \underset{+\infty}{\sim} \ell_i^+$ et la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell_i^+$ impliqueraient la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha_i^2$: cela contredirait le résultat de la question 7. Donc : $\ell_i^+ = 0$ et de même : $\ell_i^- = 0$. On a donc :

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha_i(t) = \lim_{t \to -\infty} \alpha_i(t) = 0.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Vérifier qu'en général, il est faux de penser que f a une limite en un point sous prétexte que f^2 en a une. Pourquoi, ici, n'est-ce pas gênant ?

— Retenir que bien souvent, une solution d'une équation différentielle est non seulement dérivable, mais indéfiniment dérivable.

10. En passant à la limite composante par composante, ce qui est possible puisque $t \mapsto T(t)$ est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, on a par la question précédente :

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} \beta_1(t) & \alpha_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1}(t) & \beta_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^+ & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2^+ & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_n^+ \end{pmatrix}.$$

Notons D^+ la matrice diagonale ainsi obtenue. Comme le déterminant est une application polynomiale en les coefficients d'une matrice, il en est de même des composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'application $t \mapsto \chi_t = \det(X\mathrm{I}_n - T(t)) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc cette application est continue. On en déduit :

$$\lim_{t\to+\infty} \chi_t = \det(X\mathrm{I}_n - D^+) = \prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i^+).$$

Un raisonnement en tous points analogue donne : $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \chi_t = \prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i^-)$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Mon raisonnement pour la continuité de $t \mapsto \chi_t$ peut sembler bien tortueux. Pourquoi ne me suis-je pas contenté de dire que $X\mathrm{I}_n - T(t)$ tend vers $X\mathrm{I}_n - D^+$ et que le déterminant est continu car polynomial ?

11. On a vu à la question 5 que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T(t)) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)$, et à la question 2 que T_0 admet n valeurs propres distinctes. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \chi_t = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)} (X - \lambda).$$

Donc : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \chi_t = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)} (X - \lambda)$. Par unicité de la limite : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i^+) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)} (X - \lambda)$.

En procédant de même en $-\infty$, on a donc : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \beta_i^-) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)} (X - \lambda)$. En identifiant les racines des polynômes, on obtient le résultat annoncé :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T(t)) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0) = B^+ = B^-.$$

12. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A^+ telle que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = \tau$. L'application α_i étant continue, on en déduit :

$$\alpha_i(\tau) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_i(t_n) = 0.$$

Ceci prouve en passant que τ doit être strictement positif puisque : $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$, donc $]0, \tau[$ n'est pas un intervalle vide.

De plus l'application α_i est continue, ne s'annule pas sur $]0, \tau[$ (par définition de la borne inférieure) et est non nulle en 0, donc par le théorème des valeurs intermédiaires elle est de signe constant, c'est-à-dire de même signe que $a_i = \alpha_i(0)$ sur tout l'intervalle : d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Vérifier les assertions qui vous semblent trop rapides (existence d'une suite minimisante, non annulation sur $]0, \tau[$ par définition de la borne inférieure).
> — Pouvait-on invoquer un argument topologique de fermeture, pour dire que $\tau = \inf(A^+)$ appartient aussi à A^+ ? Attention au fait que A^+ soit égal à $\{t > 0 \mid \cdots\}$: il y a une inégalité stricte.

13. Comme α_i ne s'annule pas sur $[0,\tau[$, les relations du flot de Toda donnent :

$$\forall t \in [0,\tau[, \quad \frac{\alpha_i'(t)}{\alpha_i(t)} = \beta_{i+1}(t) - \beta_i(t).$$

En intégrant cette relation on en déduit :

$$\forall t \in [0,\tau[,\ \ln(|\alpha_i(t)|) - \ln(|\alpha_i(0)|) = \int_0^t (\beta_{i+1}(u) - \beta_i(u))\mathrm{d}u.$$

On sait que β_i et β_{i+1} sont bornées : soit M un majorant commun aux deux fonctions. On passe à la valeur absolue et on utilise la postivité de l'intégrale pour en déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|\ln(|\alpha_i(t)|) - \ln(|\alpha_i(0)|)| \leqslant \int_0^t |\beta_{i+1}(u) - \beta_i(u)|\mathrm{d}u \leqslant \int_0^t (|\beta_{i+1}(u)| + |\beta_i(u)|)\mathrm{d}u \leqslant 2Mt \leqslant 2M\tau.$$

En passant à la limite quand $t \to \tau^-$, on obtient par composition de limites : $+\infty \leqslant 2M\tau$, ce qui est absurde.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $A^+ = \emptyset$. On fait le même raisonnement pour montrer : $A^- = \emptyset$ (on suppose l'inverse, on note τ la borne supérieure de A^- et on travaille sur $[\tau,0[$). On a donc montré :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i(t) \neq 0.$$

14. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Raisonnons par l'absurde et supposons : $\beta_{i+1}^+ \geqslant \beta_i^+$. La question 11 montre que les β_k^+ sont deux à deux distincts, puisque : $B^+ = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(T_0)$ (on a établi à la question 2 que T_0 admet n valeurs propres réelles distinctes). On a donc : $\beta_{i+1}^+ > \beta_i^+$. Par définition d'une limite :

$$\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant t_0, \quad \beta_{i+1}(t) > \beta_i(t).$$

Partant de là, il y a deux façons de conclure selon le signe de α_i (qui dépend de celui de a_i d'après la question 12) :

— si : $a_i > 0$, alors α_i est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et les relations de Toda donnent :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad \alpha_i'(t) = \alpha_i(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)) > 0,$$

donc α_i est croissante sur $[t_0, +\infty[$, strictement positive en t_0 et de limite nulle en $+\infty$, ce qui est impossible ;

— si : $a_i < 0$, alors un raisonnement analogue mène à : $\forall t \geqslant t_0$, $\alpha_i'(t) < 0$, donc α_i est décroissante sur $[t_0, +\infty[$, strictement négative en t_0 et de limite nulle en $+\infty$, ce qui est impossible.

Dans tous les cas, on a une contradiction et ainsi : $\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$. Ceci vaut pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi les familles $(\beta_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont toutes deux ordonnées dans l'ordre décroissant et elles prennent des valeurs globalement égales par la question 11. On a donc : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i^+ = \lambda_i$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Détailler mon utilisation de la « définition d'une limite », et sur l'impossibilité sur laquelle on débouche : elle est intuitivement évidente, mais comment la démontrer formellement ?

— Si l'égalité finale vous paraît justifiée trop lâchement : écrire une récurrence soignée, en comparant les maximums successifs des deux familles de réels ordonnés.

15. Par définition d'une limite (avec : $\varepsilon = \frac{(\beta_i^+ - \beta_{i+1}^+) - \delta}{2} > 0$), il existe $S > 0$ tel que pour tout $t \geqslant S$, on ait : $\beta_i(t) - \beta_{i+1}(t) > \delta$. Distinguons encore deux cas, selon le signe de a_i :

— si : $a_i > 0$, alors α_i est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et les égalités données par le flot de Toda donnent :
$$\forall t \geqslant S, \quad \alpha_i'(t) = \alpha_i(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)) < -\delta\alpha_i(t)\,;$$
après addition de $\delta\alpha_i(t)$ et multiplication par $e^{\delta t}$, on reconnaît la dérivée de $t \mapsto \alpha_i(t)e^{\delta t}$ dans le membre de gauche ; en intégrant on obtient :
$$\forall t > S, \quad \int_S^t \left(\alpha_i'(u) + \delta\alpha_i(u)\right) e^{\delta u}\mathrm{d}u < 0,$$
cette majoration étant stricte parce que l'intégrande ci-dessus est continu et strictement négatif ; finalement :
$$\forall t > S, \quad \alpha_i(t)e^{\delta t} < \alpha_i(S)e^{\delta S},$$
d'où le résultat en multipliant par $e^{-\delta t}$ et en posant : $C = \alpha_i(S)e^{\delta S}$;

— si : $a_i < 0$, alors α_i est strictement négative sur $\mathbb{R}$ et un raisonnement analogue (en renversant les inégalités) donne :
$$\forall t > S, \quad \alpha_i(S)e^{\delta S}e^{-\delta t} < \alpha_i(t) \leqslant 0,$$
d'où le résultat en posant : $C = -\alpha_i(S)e^{\delta S} > 0$.

Dans les deux cas, on a trouvé $C > 0$ tel que : $\forall t > S$, $|\alpha_i(t)| < Ce^{-\delta t}$.
Si l'on veut des constantes indépendantes de i, il suffit de prendre le maximum de ces constantes pour $i \in [\![1,n]\!]$. On fera cette hypothèse dans la suite. On a donc :
$$\exists (S,C) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall t > S, \quad |\alpha_i(t)| < Ce^{-\delta t}.$$

Passons à la deuxième partie de la question, qui compare λ_i et β_i. Rappelons que par la question précédente, les λ_i sont les limites quand $t \to +\infty$ des β_i. En utilisant les formules vues à la question 8, on a :
$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{\begin{array}{rcl} \beta_1(t) - \beta_1(s) & = & 2\displaystyle\int_s^t \alpha_1^2, \\ \forall i \in [\![2,n]\!],\ \beta_i(t) - \beta_i(s) & = & -\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}(\beta_k(t) - \beta_k(s)) + 2\int_s^t \alpha_i^2. \end{array}\right.$$

On fait tendre t vers $+\infty$ puis on passe au module :
$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} |\lambda_1 - \beta_1(s)| & = & 2\displaystyle\int_s^{+\infty} \alpha_1^2, \\ \forall i \in [\![2,n]\!],\ |\lambda_i - \beta_i(s)| & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}|\lambda_k - \beta_k(s)| + 2\int_s^{+\infty} \alpha_i^2. \end{array}\right.$$

Pour $s > S$, on peut utiliser ce qui fut démontré ci-dessus pour majorer α_i^2. Pour tout $s > S$, on a alors, après calcul de l'intégrale :
$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} |\lambda_1 - \beta_1(s)| & < & 2\dfrac{C^2}{\delta}e^{-2\delta s}, \\ \forall i \in [\![2,n]\!],\ |\lambda_i - \beta_i(s)| & < & \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}|\lambda_k - \beta_k(s)| + \dfrac{C^2}{\delta}e^{-2\delta s}. \end{array}\right.$$

Une récurrence immédiate donne :
$$\forall s > S,\ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad |\lambda_i - \beta_i(s)| < \frac{(i+1)C^2}{\delta}e^{-2\delta s},$$
et on obtient le résultat voulu en posant : $C' = \dfrac{(n+1)C^2}{\delta}$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Remarquer le raisonnement « à la Grönwall » (ici considérablement simplifié).
> — Pourquoi ce choix de ε en début de raisonnement ? Un DESSIN représentatif de la situation le motive.
> — Pourquoi ce surcroît d'explication pour la stricte négativité de l'intégrale ? Le fait d'avoir intégré une inégalité stricte n'est-il pas suffisant ?

Troisième partie – Généralisation

16. Notons A^{-1} l'application $t \mapsto (A(t))^{-1}$. On sait que l'on a :

$$\forall t \in I, \quad (A(t))^{-1} = \frac{1}{\det(A(t))}\mathrm{Com}(A(t))^\top.$$

Or $\det(A)$ est de classe C^1 sur I car A l'est et le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes, et tous les cofacteurs $t \mapsto A_{i,j}(t)$ sont de classe C^1 sur I puisque ce sont des déterminants de matrices à coefficients de classe C^1 sur I, donc $\mathrm{Com}(A)$ est de classe C^1 sur I composante par composante. Par linéarité de la transposition, il en est de même de $\mathrm{Com}(A)^\top$. En tant que produit de fonctions de classe C^1 (notons $\det(A)$ ne s'annule pas), l'application A^{-1} est aussi de classe C^1 sur I.

Pour calculer sa dérivée, il suffit de dériver la relation $A^{-1}A = \mathrm{I}_n$ (le membre de gauche est dérivable puisque A et A^{-1} le sont, tandis que l'application $(M,N) \mapsto MN$ est bilinéaire). On obtient :

$$(A^{-1})'A + A^{-1}A' = 0_{\mathrm{M}_n(K)},$$

donc : $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$, d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi n'ai-je pas utilisé la formule explicite avec la comatrice pour calculer la dérivée de A ? À l'inverse, pourquoi ai-je utilisé cette formule pour justifier la classe C^1, pour finalement ne plus m'en servir ensuite ?
> — La formule obtenue n'est pas sans rappeler l'identité : $(u^{-1})' = -u'u^{-2}$. Peut-on obtenir une généralisation analogue en remplaçant -1 par d'autres puissances entières ?

17. L'application $(M,N) \mapsto MXN$ étant bilinéaire, par la question précédente l'application $B = A^{-1}XA$ est de classe C^1 et on a :

$$B' = (A^{-1})'XA + A^{-1}XA' = -A^{-1}A'A^{-1}XA + A^{-1}XA' = -A^{-1}A' \cdot B + A^{-1}XAA^{-1}A',$$

d'où le résultat :

$$B' = B \cdot A^{-1}A' - A^{-1}A' \cdot B.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Comparer cette équation différentielle vérifiée par B avec l'équation (†) de la première partie du sujet.

18. D'après la question 11, dont l'énoncé nous demande d'admettre que le résultat reste valable ici, le spectre de $Y(t)$ ne dépend pas de $t \in I$. On a donc : $\forall t \in I$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(Y(t)) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(Y(0)) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(X)$. Or X admet par hypothèse n valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, donc $Y(t)$ aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$; on en déduit que $Y(t)$ est diagonalisable, semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ pour tout $t \in I$ et en particulier aussi pour $t = 0$, c'est-à-dire : X est aussi semblable à cette matrice diagonale. Comme la relation de similitude est une relation d'équivalence, $Y(t)$ et X

sont semblables, donc il existe une matrice de passage $A(t)$ telle que : $Y(t) = A(t)^{-1}XA(t)$, et ce pour tout $t \in I$. D'où le résultat.

Il n'y a pas unicité : la même matrice, multipliée par un scalaire non nul quelconque, conviendrait également.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Bien réaliser que l'hypothèse sur X ne peut *a priori* pas être enlevée : pourquoi ? Cela intervient en au moins deux endroits du raisonnement.

19. L'égalité à démontrer n'est pas sans rappeler l'expression générale du wronskien. Nous allons nous inspirer de son calcul.

Soit $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ (et non $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, attention !). Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A (j'explique en fin de raisonnement pourquoi je suis passé par les lignes au lieu des colonnes : c'est contraire à ma démarche du cours), qui sont de classe C^1 vu que A l'est composante par composante. Par ailleurs, la linéarité de l'application $M \mapsto E_iM$ implique que $L_i = E_iA$ est de dérivée : $L_i' = E_iA' = E_iAM(Y) = L_iM(Y)$.

Notons $m_{i,j}$ les composantes de $M(Y)$, et enfin : $W = \det_{\mathcal{B}}(A)$. Le déterminant étant n-linéaire, on a :

$$W' = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((L_1, \dots, L_{i-1}, L_i', L_{i+1}, \dots, L_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((L_1, \dots, L_{i-1}, L_iM(Y), L_{i+1}, \dots, L_n)\right).$$

Pour simplifier élégamment cette somme, notons que pour tout $t \in I$ l'application :

$$f_t : \begin{cases} (\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R}))^n & \to \mathbb{R} \\ (X_1, \dots, X_n) & \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((X_1, \dots, X_{i-1}, X_iM(Y(t)), X_{i+1}, \dots, X_n)\right) \end{cases}$$

est n-linéaire et alternée (si $X_i = X_j$, remarquer que les termes d'indice i et j de la somme sont opposés, tous les autres étant nuls puisqu'il y a deux vecteurs égaux), or l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur $(\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R}))^n$ est de dimension 1, un générateur étant $\det_{\mathcal{B}}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall (X_1, \dots, X_n) \in (\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R}))^n$, $f_t(X_1, \dots, X_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}((X_1, \dots, X_n))$. On détermine λ en prenant $(X_1, \dots, X_n) = (E_1, \dots, E_n)$. On simplifie les déterminants ci-dessous en développant par rapport à la i^{e} ligne. On obtient :

$$\begin{aligned} f_t(E_1, \dots, E_n) = \lambda = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((E_1, \dots, E_{i-1}, E_iM(Y(t)), E_{i+1}, \dots, E_n)\right) &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}(t) \\ &= \mathrm{tr}(M(Y(t))), \end{aligned}$$

d'où : $\lambda = \mathrm{tr}(M(Y(t)))$, et finalement :

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L_i(t)M(Y(t)), L_{i+1}(t), \dots, L_n(t))\right) \\ &= f_t(L_1(t), \dots, L_n(t)) \\ &= \mathrm{tr}(M(Y(t))) \det_{\mathcal{B}}\left((L_1(t), \dots, L_n(t))\right) \\ &= \mathrm{tr}(M(Y(t)))W(t). \end{aligned}$$

Ainsi W vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont la résolution donne :

$$\forall t \in I, \quad W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{tr}(M(Y(t)))\mathrm{d}x\right).$$

Comme $W(0) = \det(\mathrm{I}_n) = 1$ (on a utilisé la condition initiale vérifiée par A), on peut conclure.

Remarque. Expliquons ce qui aurait coincé en dérivant selon les colonnes comme avec le wronskien du cours. Cela tient très sobrement au fait que dans le cours, on étudiait les solutions de :

$Y' = AY$ (l'inconnue est à droite du produit du membre de droite), alors que dans cette question : $A' = AM(Y)$, l'inconnue est à gauche. Détaillons où cela pose problème. En dérivant W selon les colonnes et en utilisant le fait que $C_i = AE_i$ (donc $C_i' = A'E_i = AM(Y)E_i$), notre calcul aurait abouti à :

$$W' = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((C_1, \ldots, C_{i-1}, AM(Y)E_i, C_{i+1}, \ldots, C_n)\right).$$

Il « manque » C_i et c'est là qu'est le début des problèmes. Si on essaie de « forcer » la démonstration en considérant :

$$f_t : \begin{cases} (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n & \to \mathbb{R} \\ (X_1, \ldots, X_n) & \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((X_1, \ldots, X_{i-1}, A(t)M(Y(t))X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n)\right) \end{cases}$$

alors on parvient à démontrer : $f_t(E_1, \ldots, E_n) = \mathrm{tr}(A(t)M(Y(t)))$, puis en calculant $f_t\left(C_1(t), \ldots, C_{i-1}(t), E_i, C_{i+1}(t), \ldots, C_n(t)\right) = W'(t)$ on a :

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\left((C_1(t), \ldots, C_{i-1}(t), A(t)M(Y(t))E_i(t), C_{i+1}(t), \ldots, C_n(t))\right) \\ &= \mathrm{tr}(M(Y(t))) \det_{\mathcal{B}}\left((C_1(t), \ldots, C_{i-1}(t), E_i, C_{i+1}(t), C_n(t))\right). \end{aligned}$$

On ne tombe pas sur W à cause de la colonne C_i manquante. C'est râpé pour reconnaître une équation différentielle du premier ordre.
Le fait de considérer les lignes permet d'avoir, en dérivant L_i, le produit matriciel de E_i par A qui se simplifie et donne L_i (là où ci-dessus, A et E_i sont « séparés » par la matrice $M(Y)$).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Est-il possible de simplifier W' pour parvenir à W par un calcul brut de déterminant, plutôt que par ce joli argument dimensionnel sur les formes n-linéaires alternées ?

— Si l'on a déjà vu le chapitre de calcul différentiel (avis aux cinq-demis en particulier) : pouvait-on plus rapidement calculer W' grâce à la différentielle du déterminant ?

20. L'énoncé nous demande d'admettre que le système différentiel :

$$\begin{cases} A' = AM(A^{-1}XA), \\ A(0) = \mathrm{I}_n \end{cases}$$

admet une et une unique solution $A : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et elle est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ comme le justifie la question précédente (on a : $\forall t \in I$, $\det(A(t)) \neq 0$). Vérifions que $Y = A^{-1}XA$ est solution de (1). On a bien : $Y(0) = X$ (car $A(0) = \mathrm{I}_n$), et par les calculs de la question 17 on a :

$$Y' = Y \cdot A^{-1}A' - A^{-1}A' \cdot Y = YA^{-1}AM(Y) - A^{-1}AM(Y)Y = YM(Y) - M(Y)Y,$$

donc Y est bien solution de (1) : d'où le résultat.
On remarque que l'hypothèse de valeurs propres distinctes n'a été utilisée que pour la question 18. Par conséquent, toutes les questions suivantes restent valables pour X quelconque et permettent de construire une solution.

21. Lorsque M est une application constante (égale à une matrice que l'on note toujours M), le système différentiel $Y' = YM - MY$ muni de la condition initiale $Y(0) = X$ est un problème de Cauchy linéaire. On le remarque en introduisant l'application constante :

$$a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) \\ t & \mapsto (X \mapsto XM - MX) \end{cases}.$$

Par le théorème de Cauchy linéaire, il admet exactement une solution sur $\mathbb{R}$. Pour l'obtenir, il suffit de trouver une solution de $A' = AM$ telle que $A(0) = \mathrm{I}_n$: il est clair que $A : t \mapsto \exp(tM)$ convient. Par conséquent l'application $Y : t \mapsto A(t)^{-1}XA(t) = \exp(-tM)X\exp(tM)$ est l'unique solution cherchée.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Aurait-on pu trouver la solution Y ci-dessus directement en calculant $\exp(ta) \in \mathrm{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Quatrième partie – Solutions explicites

22. Comme : $\mathcal{I}_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\{E_{i,j} \mid n \geqslant i \geqslant j \geqslant 1\}\right)$, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ (le terme n correspond au nombre d'indices (i,j) vérifiant $i = j$, tandis que $\binom{n}{2}$ est le nombre de façons de choisir deux éléments distincts dans $[\![1,n]\!]$ en notant i et le plus grand des deux et j le second élément). Ainsi :

$$\dim\left(\mathcal{A}_n\right) + \dim\left(\mathcal{I}_n\right) = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2 = \dim\left(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\right).$$

Par conséquent, pour montrer : $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{I}_n$, il faut et il suffit de montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{I}_n$ sont en somme directe. Soit $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{I}_n$. Comme M est une matrice triangulaire inférieure, on a $m_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que : $i < j$, et si $i > j$ alors l'antisymétrie de M permet d'écrire : $m_{i,j} = -m_{j,i} \overset{(j<i)}{=} 0$. Enfin, $m_{i,i} = -m_{i,i}$, donc : $m_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Ceci achève de montrer : $M = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$, donc : $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{I}_n = \left\{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}\right\}$, donc $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{I}_n$ sont en somme directe, et par l'argument dimensionnel ci-dessus ils sont supplémentaires : d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Peut-on expliciter la décomposition de toute matrice dans la somme directe de cette question ?

23. Les matrices de $\mathcal{P}_n$ étant de déterminant strictement positif (le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux), on a bien : $\mathcal{P}_n \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus $\mathcal{P}_n$ est non vide puisque la matrice identité y appartient : il reste à justifier la stabilité par produit et inverse.

On sait déjà, par le cours de 1re année, que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une triangulaire inférieure, de même pour l'inverse dans le cas inversible (si ce fut seulement montré dans le cas supérieur : pas grave, il suffit de transposer). De plus, si $A \in \mathcal{P}_n$ et $B \in \mathcal{P}_n$ ont pour coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ respectivement, alors AB^{-1} a pour coefficients diagonaux $a_1 b_1^{-1}, \dots, a_n b_n^{-1}$, qui sont strictement positifs en tant que produit de nombres strictement positifs, donc : $AB^{-1} \in \mathcal{P}_n$.

Ceci achève de démontrer que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

24. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons d'abord : $M \in \mathcal{A}_n$. On a vu en cours que par continuité de la transposition, on a : $\exp(M)^\top = \exp(M^\top) = \exp(-M)$, et comme M et $-M$ commutent on a :

$$\exp(M)^\top \exp(M) = \exp(-M)\exp(M) = \exp(-M+M) = \exp\left(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}\right) = \mathrm{I}_n,$$

donc : $\exp(M) \in \mathcal{O}_n$ (il est inutile de faire le produit dans l'ordre contraire, vu qu'un inverse à droite est un inverse à gauche dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$).

Supposons à présent : $M \in \mathcal{I}_n$. Montrons : $\exp(M) \in \mathcal{P}_n$. Tout d'abord, pour tout $N \in \mathbb{N}$ la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} M^n$ appartient à $\mathcal{I}_n$ (en effet $\mathcal{I}_n$ est stable par produit en tant que groupe, et par combinaison linéaire en tant qu'espace vectoriel), et $\mathcal{I}_n$ est une partie fermée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie, donc par passage à la limite on a : $\exp(M) \in \mathcal{I}_n$. Pour appartenir à $\mathcal{P}_n$, il faut de plus que tous les coefficients diagonaux de $\exp(M)$

soient strictement positifs. Or il est banal de montrer que si : $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors :

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ ** & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

et les e^{λ_i} sont tous strictement positifs, d'où : $\exp(M) \in \mathcal{P}_n$; ce qu'il fallait démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Il est fréquent de s'interroger sur l'image de l'exponentielle matricielle restreinte à une partie remarquable de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Que dire de l'image d'une matrice symétrique réelle ? orthogonale ? nilpotente ? etc. (Parfois on ne peut rien dire de très précis.)

— Réciproquement, est-ce qu'une matrice M telle que $\exp(M) \in \mathcal{O}_n$ est nécessairement antisymétrique ? Même question avec $\exp(M) \in \mathcal{P}_n$.

— Pensez-vous que exp définit une surjection de $\mathcal{A}_n$ dans $\mathcal{O}_n$? Et de $\mathcal{I}_n$ dans $\mathcal{P}_n$?

25. Par la question 16, les applications R^{-1} et T^{-1} sont de classe C^1 sur I. De plus la linéarité de la transposition assure que $R^\top$ est aussi de classe C^1, de dérivée : $R'^\top$. Par conséquent, en dérivant l'égalité : $\mathrm{I}_n = R^\top R$, on obtient :

$$0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} = R'^\top R + R^\top R' = \left(R^\top R'\right)^\top + R^\top R',$$

et comme R est à valeurs dans $\mathcal{O}_n$, on a : $R^\top = R^{-1}$, donc : $\left(R^{-1}R'\right)^\top = -R^{-1}R'$, ce qui démontre bien que $R^{-1}R'$ est à valeurs dans $\mathcal{A}_n$.
Ensuite, si T est à valeurs dans $\mathcal{P}_n$, alors la structure de groupe de cet ensemble assure que T^{-1} le reste également (et en particulier elle est dans $\mathcal{I}_n$), et de même T' est triangulaire inférieure puisqu'elle s'obtient en dérivant composante par composante T. Puisque $\mathcal{I}_n$ est stable par produit, l'application $T'T^{-1}$ est à valeurs dans $\mathcal{I}_n$: d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Est-ce que $T'T^{-1}$ est à valeurs dans $\mathcal{P}_n$, étant donné que T et T^{-1} le sont ?

26. Posons : $T = \mathrm{M}_{(V_n,\dots,V_1)}((C_1,\dots,C_n))$. Si $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors on a par la formule du changement de base :

$$B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}((C_1,\dots,C_n)) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}((V_n,\dots,V_1))\mathrm{M}_{(V_n,\dots,V_1)}((C_1,\dots,C_n)) = RT.$$

Vérifions que comme voulu, la matrice R est dans $\mathcal{O}_n$ et T dans $\mathcal{I}_n$.
La matrice R est une matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire usuel), donc elle est une matrice orthogonale. Si ce résultat n'a pas été vu au moment du devoir, il y a de nombreux moyens de l'obtenir et je propose le moyen le plus naïf d'y parvenir : un calcul brut. En effet, par *définition* le coefficient (i,j) du produit de deux matrices est : $L_i^\top C_j$ (c'est-à-dire : le produit scalaire usuel de L_i par C_j), où L_i est la i^{e} ligne de la première matrice du produit et C_j la j^{e} colonne de la seconde matrice. Par conséquent, le coefficient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ de $R^\top R$ est : $V_{n-i}^\top V_{n-j} = \delta_{n-i,n-j} = \delta_{i,j}$, parce que $(V_n,\dots,V_1)$ est orthonormée : on reconnaît le coefficient (i,j) de I_n. D'où : $R^\top R = \mathrm{I}_n$, et : $R \in \mathcal{O}_n$.
De plus, par définition de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad C_i \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((V_i,\dots,V_1)\right),$$

ce qui s'interprète matriciellement par le fait que T soit triangulaire inférieure. Enfin, comme $(V_1,\dots,V_n)$ est orthonormée, le i^{e} coefficient diagonal de T est le produit scalaire de V_i par C_i, qui est également strictement positif par l'algorithme de Gram-Schmidt ; d'où l'existence de la décomposition.

Montrons l'unicité : soit $(R', T') \in \mathcal{O}_n \times \mathcal{P}_n$ tel que : $B = R'T'$. Alors : $RT = R'T'$, donc : $R'^{-1}R = T'T^{-1}$. Comme $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{P}_n$ sont des groupes multiplicatifs, on a : $R'^{-1}R \in \mathcal{O}_n \cap \mathcal{P}_n$. Or une matrice à la fois dans $\mathcal{O}_n$ et dans $\mathcal{P}_n$ ne peut être que la matrice identité. Justifions ce point : comme $\mathcal{I}_n$ est stable par inverse, on a : $(R'^{-1}R)^{-1} \in \mathcal{I}_n$. Or $(R'^{-1}R)^{-1} = (R'^{-1}R)^\top$ car : $R'^{-1}R \in \mathcal{O}_n$, donc : $(R'^{-1}R)^\top \in \mathcal{I}_n$. Cette matrice est cependant la transposée d'une matrice triangulaire inférieure : elle est donc triangulaire supérieure. Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale, donc $R'^{-1}R$ est diagonale aussi. Elle est en particulier symétrique. Donc :

$$\mathrm{I}_n \overset{(R'^{-1}R \in \mathcal{O}_n)}{=} (R'^{-1}R)^\top \left(R'^{-1}R\right) = \left(R'^{-1}R\right)^2.$$

On en déduit que les coefficients diagonaux de $R'^{-1}R$ valent tous 1 ou -1, et comme : $R'^{-1}R \in \mathcal{P}_n$, ils sont égaux à 1. D'où : $R'^{-1}R = \mathrm{I}_n$, puis : $R = R'$. Partant de là : $T'T^{-1} = R'^{-1}R = \mathrm{I}_n$, puis : $T = T'$. Cela achève de démontrer l'unicité du couple (R, T).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Démontrer que T est dans $\mathcal{I}_n$ par l'utilisation de la forme explicite des vecteurs de l'algorithme de Gram-Schmidt, afin de comparer les deux démonstrations, d'apprécier l'économie faite plus haut, et de se rendre compte que finalement les deux démonstrations *disent la même chose* (corollaire : quand on a l'idée de raisonner par récurrence avec l'explicitation des vecteurs de l'algorithme, il vaut le coup de se demander s'il ne marcherait de raisonner plus théoriquement, avec la caractérisation de l'unicité de la famille construite avec l'algorithme de Gram-Schmidt).
- Lorsqu'une question vous demande de démontrer une décomposition faisant intervenir une matrice triangulaire à coefficients strictement positifs, il y a fort à parier que l'algorithme de Gram-Schmidt en soit l'origine. L'avoir en tête. Un autre exemple classique est la décomposition de Choleski de toute matrice symétrique définie positive sous la forme $T^\top T$.
- La démonstration de l'unicité n'est peut-être pas la meilleure sur le plan des idées : pour « comprendre ce qu'il se passe », démontrer que $R'^{-1}R$ est la matrice identité en se souvenant qu'en tant que matrice orthogonale, ses colonnes doivent être unitaires (et orthogonales). Avec le fait d'être triangulaire, cela conditionne grandement son allure.

27. Notons $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ les colonnes de $B(t)$ pour tout $t \in I$. Ce sont des applications de classe C^1, puisque la classe C^1 de B se vérifie composante par composante. Soit $t \in I$. Par la question 26, les colonnes $R_1(t), \ldots, R_n(t)$ de $R(t)$ proviennent de l'algorithme de Gram-Schmidt. On a donc, en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad R_i(t) = \frac{1}{\|U_i(t)\|} U_i(t), \quad \text{où} : \quad U_i(t) = C_i(t) - \sum_{k=1}^{i-1} \left(R_k(t)^\top C_i(t)\right) R_k(t).$$

Cette expression permet de montrer aisément par récurrence sur i que U_i est de classe C^1 sur I pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et ne s'annule jamais. Par conséquent $U_i^\top U_i$ est de classe C^1 sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; par composition avec la racine carrée qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\|U_i\| = \sqrt{U_i^\top U_i}$ est de classe C^1 sur I et donc son inverse aussi (notons que $\|U_i\|$ ne s'annule jamais).

En tant que produit de fonctions de classe C^1, l'application R est de classe C^1 sur I. C'est donc aussi le cas de R^{-1} par la question 16, puis de $T = R^{-1}B$ par composition avec l'application bilinéaire définie par le produit matriciel : d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. À l'exact opposé de la question précédente, noter qu'ici j'ai utilisé la forme explicite des vecteurs construits par l'algorithme de Gram-Schmidt. Je semble contredire mon commentaire plus haut. Essayer de comprendre pourquoi ici, ce recours à la forme explicite était essentiel là où précédemment des arguments théoriques permettaient de s'en passer.

28. Posons : $M = p_1$, qui est une application continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire. Par la question 20, pour que $Y = A^{-1}XA$ soit solution de : $Y' = Yp_1(Y) - p_1(Y)Y = YM(Y) - M(Y)Y$, avec : $Y(0) = X$, il suffit que A vérifie : $A' = AM(Y) = Ap_1(A^{-1}XA)$, et : $A(0) = \mathrm{I}_n$. D'où le résultat.

29. Puisque $\exp(tX)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices $\Pi_1(\exp(tX)) \in \mathcal{O}_n$ et $\Pi_2(\exp(tX)) \in \mathcal{P}_n$ existent bien et définissent des applications de classe C^1 par la question 27.

    Vérifions que $A : t \mapsto \Pi_1(\exp(tX))$ est solution de : $A' = Ap_1(A^{-1}XA)$, et : $A(0) = \mathrm{I}_n$. La seconde égalité est la plus facile : en effet on peut écrire : $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n \cdot \mathrm{I}_n$, et comme $\mathrm{I}_n \in \mathcal{O}_n$ et $\mathrm{I}_n \in \mathcal{P}_n$ cela nous fournit bien la décomposition RT de la matrice A. D'où :

$$A(0) = \Pi_1(\exp(0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})})) = \Pi_1(\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n.$$

Passons au calcul de A' et de $Ap_1(A^{-1}XA)$. Simplifions d'abord $p_1(A^{-1}XA)$. On rappelle que p_1 est la projection de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{A}_n$ parallèlement à $\mathcal{I}_n$. Décrivons donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la décomposition de la matrice $A(t)^{-1}XA(t) = \Pi_1(\exp(tX))^{-1}X\Pi_1(\exp(tX))$ dans la somme directe $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{I}_n$. Pour cela, on note que si T est l'application $t \mapsto \Pi_2(\exp(tX))$, alors par définition de Π_1 et Π_2 on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tX) = A(t)T(t).$$

On en déduit notamment : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tX)T(t)^{-1} = A(t)$, ce qui servira ci-dessous. En dérivant cette égalité (possible par bilinéarité du produit matriciel) on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X\exp(tX) = A'(t)T(t) + A(t)T'(t).$$

En multipliant chaque membre de l'égalité à gauche par $A(t)^{-1}$ et à droite par $T(t)^{-1}$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A(t)^{-1}XA(t) = A(t)^{-1}X\exp(tX)T(t)^{-1} = A(t)^{-1}A'(t) + T'(t)T(t)^{-1}.$$

Par la question 25, cela fournit une décomposition de $A(t)^{-1}XA(t)$ comme somme d'une matrice dans $\mathcal{A}_n$ et d'une matrice dans $\mathcal{I}_n$. Donc : $p_1(A^{-1}XA) = A^{-1}A'$. Il devient alors manifeste que l'on a :

$$Ap_1(A^{-1}XA) = A',$$

donc A vérifie bien l'équation différentielle souhaitée. Par la question précédente, pour ce choix d'application matricielle A, l'application $Y = A^{-1}XA$ est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Y' &= Yp_1(Y) - p_1(Y)Y, \\ Y(0) &= X. \end{cases}$$

d'où le résultat.

Remarque. Avec le théorème de Cauchy-Lipschitz (hors programme), on pourrait démontrer l'existence et unicité solution qui fut admise.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Il n'est pas forcément simple de comprendre comment est venue l'idée de dériver $t \mapsto \exp(tX)$ pour obtenir $p_1(A^{-1}XA)$. Réfléchir malgré tout à cela, en ayant en tête ces deux éléments : 1° une des questions précédents met tout de même sur la voie, en indiquant explicitement comment produire des applications à valeurs dans $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{I}_n$ en partant de fonctions à valeurs dans $\mathcal{O}_n$ et $\mathcal{P}_n$ (ce qui est le cas de Π_1 et Π_2, 2° la décomposition RT de toute matrice inversible est un produit, alors que le calcul de $p_1(\exp(tX))$ nécessite de faire apparaître une décomposition de $\exp(tX)$ comme une somme.

— Si l'on écrit $X = M + N$ avec $M \in \mathcal{A}_n$ et $N \in \mathcal{I}_n$, alors la question 24 implique : $\exp(tX) = \exp(tM)\exp(tN)$ avec $\exp(tM)$ dans $\mathcal{O}_n$ et $\exp(tN)$ dans $\mathcal{P}_n$, donc : $\Pi_1(\exp(tX)) = \exp(tM)$. Est-ce que cela aurait pu servir à traiter cette question ?