Devoir sur table n° 1

(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Ce sujet est issu de l'épreuve de Mathématiques II de l'ENS Lyon (à l'époque : ENS Saint-Cloud & Fontenay), année 1975, filière M'. Le sujet d'origine était truffé d'imprécisions (on ne précisait pas ce que sont x et t au moment de définir p_n, par exemple), j'espère l'avoir épuré. En dehors d'une indication ajoutée dans la question 7, et de la question « de cours » sur la convergence des suites de Cauchy réelles, je n'ai rien changé au fond des questions.

Il y est question de suites *équiréparties* (ou *équidistribuées*) qui, pour une raison qui m'échappe, sont appelées des suites *régulières* dans ce sujet. Ce sont, en gros, des suites à valeurs dans [0,1] dont la répartition suit une loi uniforme sur [0,1] : pour tout intervalle I inclus dans [0,1], la probabilité qu'un terme de la suite appartienne à I est égale à la longueur de I. Formulé ainsi en termes probabilistes, on ne sera donc pas surpris d'apprendre que les principales applications des suites régulières sont probabilistes ou statistiques : à titre d'exemples, elles permettent d'étudier la probabilité que le premier chiffre de 2^n soit égal à un entier $c \in [\![1,9]\!]$ donné, ou plus savamment le nombre de points critiques d'un polynôme aux racines aléatoires identiquement distribuées sur $\mathbb{U}$. C'est peut-être plus étonnant, mais on trouve également des analogues des suites équiréparties pour étudier les solutions rationnelles de certaines équations diophantiennes. Ces deux derniers exemples sont plutôt récents (2015 & 1997), très au-delà du programme des classes préparatoires, et ne sont cités qu'à titre de culture scientifique.

L'objectif de ce sujet est plus classique. On y montre l'équivalence entre trois propriétés :

(i) $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est équirépartie ;

(ii) pour toute fonction continue f sur [0,1], on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f(s_j) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ (ce qui peut raisonnablement se conjecturer : si les s_j sont bien répartis, le membre de gauche devrait ressembler à une somme de Riemann de pas $\frac{1}{n}$) ;

(iii) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} e^{2i\pi s_j} = 0$ (critère de Weyl).

J'ai choisi ce sujet d'une part pour vous faire découvrir ce résultat classique, mais aussi parce qu'il permet d'aborder des choses plutôt riches même sans un gros bagage mathématique de 2e année. J'apprécie plus particulièrement le recours multiple à l'idée *d'approximation* des intégrales (idée jamais facile à mobiliser de soi-même, mais on nous y incitait à plusieurs reprises) :

— pour montrer *(i)* ⇒ *(ii)* : on montre l'égalité voulue avec des fonctions indicatrices, puis des fonctions en escalier, et enfin pour des fonctions continues par densité ;

— pour montrer *(iii)* ⇒ *(ii)* : le critère de Weyl nous permet naturellement d'en déduire par linéarité que le résultat (ii) est vraie si f est une combinaison linéaire de cosinus et sinus (on parle de *polynôme trigonométrique*), et la majeure partie de la troisième partie veut vous faire démontrer que toute fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ peut s'approcher par des polynômes trigonométriques ;

— pour montrer : $(iii) \Rightarrow (ii)$, toujours : dans ce qu'on dit ci-dessus, il faut faire sauter la condition $f(0) = f(1)$, ce qui passe encore par de l'approximation, mais encore différente : il va de soi qu'on ne peut pas approcher *uniformément* une fonction f telle que $f(0) \neq f(1)$ par une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $f_n(0) = f_n(1)$ (parce que la convergence uniforme implique la convergence simple), mais il y a d'autres approximations que celle uniforme : là, avoir une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\displaystyle\int_0^1 (f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f_n(0) = f_n(1)$ suffit (on parle d'approximation *en moyenne*), et c'est ce qu'on fait *implicitement* dans ce corrigé.

L'obtention de la densité des polynômes trigonométriques passe par la construction d'une approximation de l'unité et un produit de convolution (tout cela n'étant jamais énoncé explicitement). Je démontrerai de la même manière le théorème d'approximation de Weierstraß (toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'applications polynomiales). Le produit de convolution $f * g : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$ est un outil mathématique de choix pour faire gagner en régularité une fonction f, ou la « transformer » en une autre application de nature différente (si g est polynomiale, alors $f * g$ est polynomiale ; si g est de classe C^∞, alors $f * g$ aussi, etc.), et il n'est donc pas surprenant de le voir apparaître pour obtenir des approximations (uniformes ou non) d'une fonction.

La démonstration que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense nécessite à un moment de linéariser le *noyau de Fejér* :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos(2k\pi u).$$

La démonstration de cette identité ne va pas du tout de soi ! On s'efforcera de se l'approprier.

Enfin, on appréciera les quelques raisonnements epsilonesques apparaissant çà et là pour vous faire travailler le sens de « l'infiniment petit » en analyse, ou de ce qui est « proche » ou non : questions 1.(b), 4, 7 et 14.

Remarquez, en lisant le corrigé, que certaines questions très ouvertes nécessitent de faire des essais avec des exemples (... et des dessins !) et ont plusieurs étapes. C'est la philosophie des sujets X-ENS ! (Surtout des anciens, il faut être honnête.) C'est le jeu, on ne trouve pas toujours la bonne approche du premier coup et il faut accepter l'idée que, même si « l'on perd du temps », parfois on ne comprendra ce qu'il se passe qu'à tâtons et avec des cas explicites.

Ce qu'on retiendra en bref. Raisonnements par densité pour le calcul intégral : fonctions en escalier et trigonométriques. Noyau de Fejér pour construire une approximation de l'unité. Utilisation des suites de Cauchy (première partie), raisonnements epsilonesques.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1.(b) et 4 ;

— DEUXIÈME PARTIE : questions 7 à 9 ;

— TROISIÈME PARTIE : questions 10 à 14.

2 Corrigé

Première partie

1. (a) Supposons f constante, égale à un réel c. Dans ce cas, la suite $(\mu_n(f,s))_{n\geqslant 1}$ est trivialement constante égale à c, et converge donc vers c : $\mu(f,s)=c$.

   (b) Supposons que la suite s est convergente et a pour limite ℓ. On a alors, par continuité de f : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n)=f(\ell)$. Par le théorème de Cesàro (s'il a été vu : voir chapitre II), on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(f,s)=f(\ell)$, ce qui démontre que $\mu(f,s)$ existe et qu'on a : $\mu(f,s)=f(\ell)$.
   Si le théorème de Cesàro n'a pas été vu, voici comment procéder : soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que : $\forall n\geqslant N$, $|f(s_n)-f(\ell)|\leqslant\varepsilon$. Fixons un tel N. Pour tout entier $n\geqslant N$, on a alors :

   $$|\mu_n(f,s)-f(\ell)|=\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(f(s_j)-f(\ell))\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N-1}(f(s_j)-f(\ell))\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{j=N}^{n}(f(s_j)-f(\ell))\right|.$$

   Or on a d'une part, pour tout entier $n\geqslant N$:

   $$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=N}^{n}(f(s_j)-f(\ell))\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=N}^{n}|f(s_j)-f(\ell)|\leqslant\frac{\varepsilon(n-(N-1))}{n}\leqslant\varepsilon,$$

   et d'autre part, comme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{N-1}(f(s_j)-f(\ell))=0$, il existe $N'\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que : $\forall n\geqslant N'$, $\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(f(s_j)-f(\ell))\right|\leqslant\varepsilon$. En prenant : $N''=\max(N,N')$, on a donc :

   $$\forall n\geqslant N'',\quad |\mu_n(f,s)-f(\ell)|\leqslant 2\varepsilon.$$

   On a montré que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N''\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que pour tout entier $n\geqslant N''$, on ait : $|\mu_n(f,s)-f(\ell)|\leqslant 2\varepsilon$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(f,s)=f(\ell)$, d'où le résultat.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** On voit que $(\mu_n(f,s))_{n\geqslant 0}$ et $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ ont même limite (lorsque la seconde en admet une). Ont-elles même signe, même monotonie ? etc.

   (c) Soit s la suite de l'énoncé. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ au voisinage de l'infini. On a :

   $$\begin{aligned}\mu_n(f,s)&=\frac{1}{n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\text{ impair}}}f(s_j)+\frac{1}{n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\text{ pair}}}f(s_j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\text{ impair}}}f(2^{-j})+\frac{1}{n}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\text{ pair}}}f(1-2^{-j})\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}f\left(2^{-2k-1}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}f\left(1-2^{-2k}\right)\\&=\frac{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}{n}\cdot\frac{1}{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}f\left(2^{-2k-1}\right)+\frac{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{n}\cdot\frac{1}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}f\left(1-2^{-2k}\right),\end{aligned}$$

or la question précédente appliquée aux suites $\left(2^{-2k-1}\right)_{k\geqslant 1}$ et $\left(1-2^{-2k}\right)_{k\geqslant 1}$, avec un petit ajustement bénin pour tenir compte de l'indice $k=0$, permet de démontrer :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(2^{-2k-1}\right)=f(0),\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1-2^{-2k}\right)=f(1),$$

et comme : $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ (se démontre aisément *via* l'encadrement : $\frac{n-1}{2}-1<\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\leqslant\frac{n-1}{2}$), et : $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ (même chose), on conclut :

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_n(f,s)=\frac{f(0)+f(1)}{2},$$

d'où : $\mu(f,s)=\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- A-t-on toujours $\lfloor u_n\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$?
- Comprend-on pourquoi k va jusqu'à $\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ ou $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ (indice de sommation) ?

(d) En s'inspirant du raisonnement de la question précédente, on a :

$$\mu(f,s)=\lim_{n\to+\infty}\mu_n(f,s)=\frac{f(0)+2f(1)}{3}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Faire le raisonnement pour comprendre la présence de ce facteur 2 ;
- Au vu des questions précédentes : peut-on en toute généralité encadrer $\mu_n(f,s)$ (et sa limite) par des quantités dépendant explicitement de f ?

(e) Avant de traiter cette question, il vaut mieux comprendre le comportement de la suite $(s_j)_{j\geqslant 1}$. Elle parcourt l'ensemble des nombres rationnels dans [0,1] et de la forme $\dfrac{a}{2^k}$ avec a impair et $k\in\mathbb{N}$:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
s_j	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\cdots$

Ou, cela revient au même : elle parcourt tous les rationnels de [0,1] de la forme $\dfrac{a}{2^k}$ avec $k\in\mathbb{N}$ et a entier naturel (mais l'écriture ci-dessus résout les problèmes d'unicité de l'écriture sous forme de fraction irréductible : le fait que 2 soit un nombre premier, et le processus de construction de la suite $(s_j)_{j\geqslant 1}$, assurent que chaque valeur est prise une et une seule fois).

Pour cette suite s, tout peut arriver : par exemple, si f est constante alors il y a convergence de $(\mu_n(f,s))_{n\geqslant 1}$ (voir le cas 1.(a)). Montrons qu'il n'y a pas convergence si f est l'application $x\mapsto x$. Nous allons pour cela démontrer que $(\mu_n(f,s))_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Cauchy (ou, si l'on ne veut pas invoquer ce terme hors programme : on raisonne par l'absurde et on obtient une contradiction ; il fonctionnerait également de manipuler deux suites extraites n'ayant pas même limite). Soit k au voisinage de l'infini. On a :

$$\mu_{2^k}(f,s)=\frac{1}{2^k}\sum_{a=1}^{2^k} f\left(\frac{a}{2^k}\right)=\frac{1}{4^k}\sum_{a=1}^{2^k} a=\frac{(2^k+1)2^k}{2\cdot 4^k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}\frac{1}{2},$$

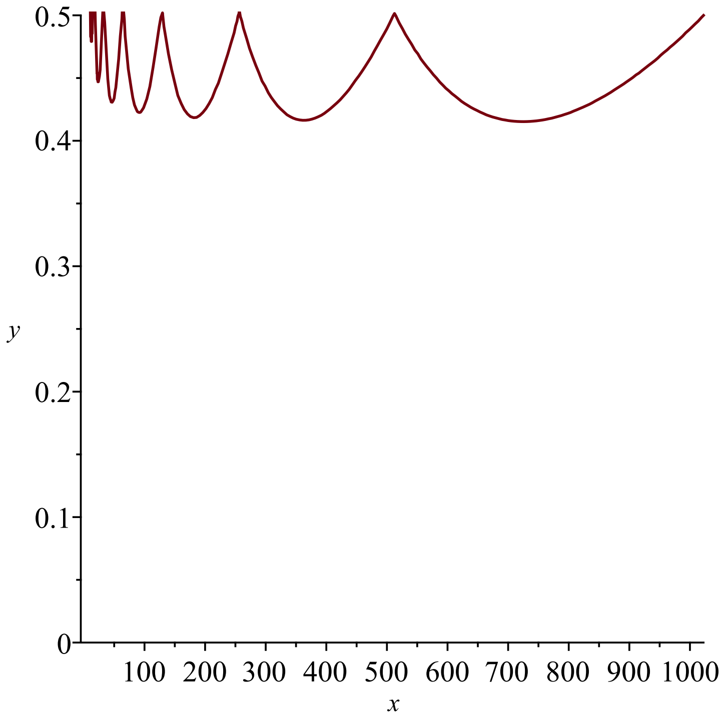
et :

$$\begin{aligned}\mu_{2^k+2^{k-1}}(f,s) &= \frac{1}{2^k+2^{k-1}}\sum_{a=1}^{2^k} f\left(\frac{a}{2^k}\right) + \frac{1}{2^k+2^{k-1}}\sum_{p=1}^{2^{k-1}} f\left(\frac{2p-1}{2^{k+1}}\right)\\ &= \frac{(2^k+1)2^k}{2\cdot(2^k+2^{k-1})2^k} + \frac{4^{k-1}}{(2^k+2^{k-1})2^{k+1}}\\ &\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

donc :

$$\mu_{2^k+2^{k-1}}(f,s) - \mu_{2^k}(f,s) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2} \neq 0,$$

donc $(\mu_n(f,s))_{n\geqslant 1}$ ne converge pas et $\mu(f,s)$ n'existe pas.
Remarque. Voici l'allure de la suite $(\mu_n(f,s))_{n\geqslant 1}$ pour s la suite de cette question et f l'application $x \mapsto x$:



Remarque. On peut montrer sans difficulté que la suite extraite $(\mu_{2^k}(f,s))_{k\geqslant 1}$ converge vers $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. C'est en effet une somme de Riemann dont le pas $\frac{1}{2^k}$ converge vers 0.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Vérifier l'affirmation de ma remarque ; pourquoi cela coince lorsqu'on remplace 2^k par un entier n quelconque ?
> — Les cas de non existence de $\mu(f,s)$, avec s la suite de cette question, sont-ils l'exception ou la norme ? Que doit vérifier f heuristiquement pour qu'il y ait bien existence de $\mu(f,s)$?
> — Lorsqu'on observe le tableau de valeurs de s_j, on a l'impression intuitive que la suite est « bien répartie », et pourtant (au regard de ce qu'on démontre dans la suite du sujet) ce n'est pas une suite équirépartie. Pourquoi cet écart entre l'impression intuitive et la réalité ?

2. Voir votre cours.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_j : [0,1] \to \mathbb{R})_{j\geqslant 1}$ est une suite de fonctions vérifiant le critère de Cauchy uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous entiers $j \geqslant N$ et $k \geqslant N$, et tout $x \in [0,1]$ on ait :

$|f_k(x) - f_j(x)| \leqslant \varepsilon$. On en déduit, pour tous entiers j et k supérieurs ou égaux à N :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |\mu_n(f_j, s) - \mu_n(f_k, s)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |f_j(s_i) - f_k(s_i)| \leqslant \frac{n\varepsilon}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Quand $n \to +\infty$, cela donne :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad (j \geqslant N \text{ et } k \geqslant N) \Longrightarrow |\mu(f_j, s) - \mu(f_k, s)| \leqslant \varepsilon,$$

donc $(\mu(f_j, s))_{j \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy réelle.

4. Soit $(f_j : [0,1] \to \mathbb{R})_{j \geqslant 1}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f, telle que $\mu(f_j, s)$ soit défini pour tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \left(j \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ |f(x) - f_j(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire ainsi : $|f_j(x) - f_k(x)| \leqslant |f_j(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)|$, on en déduit aisément :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall (j,k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2,\ (j, k \geqslant N \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ |f_j(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon),$$

donc $(f_j)_{j \geqslant 1}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. Par la question précédente, $(\mu(f_j, s))_{j \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy réelle : elle converge donc. Soit ℓ sa limite. On aimerait montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(f, s) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$|\mu_n(f, s) - \ell| \leqslant |\mu_n(f, s) - \mu_n(f_j, s)| + |\mu_n(f_j, s) - \mu(f_j, s)| + |\mu(f_j, s) - \ell|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall j \geqslant N_\varepsilon$, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - f_j(x)| \leqslant \varepsilon$. Un tel rang existe par convergence uniforme de $(f_j)_{j \geqslant 1}$ vers f. Comme $(\mu(f_j, s))_{j \geqslant 1}$ converge vers ℓ, il existe aussi $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall j \geqslant M_\varepsilon$, $|\mu(f_j, s) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Fixons à présent $j = \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |\mu_n(f, s) - \mu_n(f_j, s)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f_j(s_i)| \leqslant \frac{\varepsilon n}{n} = \varepsilon,$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad |\mu_n(f, s) - \ell| \leqslant 2\varepsilon + |\mu_n(f_j, s) - \mu(f_j, s)|.$$

Or : $\mu(f_j, s) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(f_j, s)$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $|\mu_n(f_j, s) - \mu(f_j, s)| \leqslant \varepsilon$. En conclusion :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |\mu_n(f, s) - \ell| \leqslant 3\varepsilon.$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $|\mu_n(f, s) - \ell| \leqslant 3\varepsilon$. Donc : $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(f, s)$. Or cette limite est aussi $\mu(f, s)$ par définition, quand elle existe. Donc :

$$\mu(f, s) = \ell = \lim_{j \to +\infty} \mu(f_j, s),$$

d'où le résultat.

Remarque. On a démontré une sorte de théorème d'interversion :

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{j \to +\infty} \mu_n(f_j, s) = \lim_{j \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} \mu_n(f_j, s).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comprendre comment sont motivés les trois termes apparus *via* l'inégalité triangulaire.

— Comparer cette démonstration avec plusieurs démonstrations du cours et des exercices, du type : « Montrer que si ★ converge alors ♣ converge », où l'on démontre que la seconde suite est de Cauchy grâce au fait que la première le soit aussi en tant que suite convergente. C'est classique.

Deuxième partie

Pour alléger les notations, on posera dans toute cette partie :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad X_k(I,s) = \{j \in [\![1,k]\!] \mid \ s_j \in I\},$$

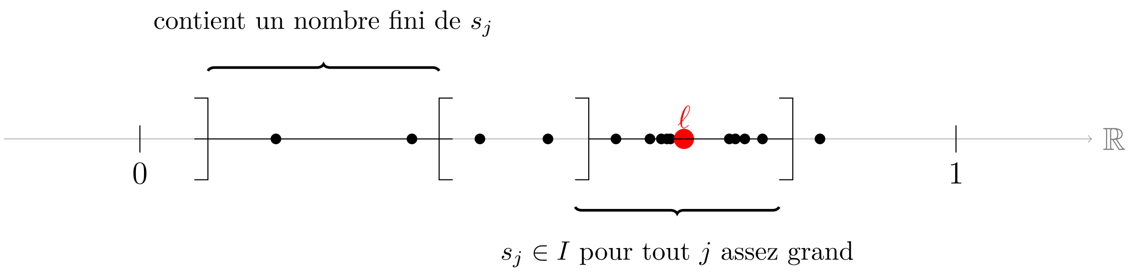
de sorte que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $N_k(I,s) = \mathrm{card}(X_k(I,s))$.

5. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Puisque I et J sont disjoints, il n'existe pas $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $s_j \in I \cap J$, donc la réunion :
$$\{j \in [\![1,k]\!] \mid \ s_j \in I\} \cup \{j \in [\![1,k]\!] \mid \ s_j \in J\}$$
est disjointe (et elle est bien sûr égale à $\{j \in [\![1,k]\!] \mid \ s_j \in I \cup J\}$). En comparant les cardinaux, on a donc : $N_k(I,s) + N_k(J,s) = N_k(I \cup J, s)$. En divisant par $k > 0$ et en prenant la limite quand $k \to +\infty$, on obtient d'une part la convergence de $\left(\frac{1}{k} N_k(I \cup J, s)\right)_{k \geqslant 1}$ (et donc l'existence de $p(I \cup J, s)$), et d'autre part l'égalité : $p(I,s) + p(J,s) = p(I \cup J, s)$. D'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Et si I et J ne sont pas disjoints ? Peut-on avoir inexistence de $p(I \cup J, s)$?

6. Soit I un intervalle contenu dans [0,1].

(b) Supposons que s converge et a pour limite ℓ. Il semble assez clair que la détermination de $p(I,s)$ dépend selon que I contienne ℓ ou non.



Plus précisément, on sait qu'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall j \geqslant N_\varepsilon, \quad |s_j - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons donc un intervalle I qui ne contient pas ℓ, et dont aucune des extrémités n'est égale à ℓ. Prenons $\varepsilon = \frac{\inf\limits_{x \in I} |x-\ell|}{2} > 0$ (c'est le fait que ℓ ne soit pas une extrémité de I qui assure que cette borne inférieure est strictement positive), et soit N_ε tel que l'inégalité ci-dessus soit vérifiée pour ce choix de ε et pour tout $j \geqslant N_\varepsilon$. Alors pour tout $j \geqslant N_\varepsilon$, on a : $s_j \notin I$ (dans le cas contraire, on aurait : $\inf\limits_{x \in I} |x - \ell| \leqslant |s_j - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui est absurde par définition de ε), donc $(X_k(I,s))_{k \geqslant 1}$ est constante à partir du rang N_ε et $(N_k(I,s))_{k \geqslant 1}$ également. Il en résulte aisément : $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} N_k(I,s) = 0$, et : $p(I,s) = 0$.

Au contraire, si $\ell \in I$, et si I est un intervalle non réduit à un point, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \subseteq I$, et pour un tel choix de ε on a : $\forall j \geqslant N_\varepsilon$, $s_j \in I$. On en déduit, pour tout entier $k \geqslant N_\varepsilon$:

$$X_k(I,s) = \{j \in [\![1,N_\varepsilon]\!] \mid \ s_j \in I\} \cup \{j \in [\![N_\varepsilon,k]\!] \mid \ s_j \in I\} = \{j \in [\![1,N_\varepsilon]\!] \mid \ s_j \in I\} \cup [\![N_\varepsilon,k]\!],$$

donc, pour tout entier $k \geqslant N_\varepsilon$:

$$\frac{1}{k} N_k(I,s) = \frac{\mathrm{card}\left(\{j \in [\![1,N_\varepsilon]\!] \mid \ s_j \in I\}\right)}{k} + \frac{k - N_\varepsilon}{k}.$$

Le premier terme du membre de droite converge vers 0 (son numérateur ne dépend pas de k et le dénominateur tend vers l'infini), tandis que le second terme converge vers 1. Donc : $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k}N_k(I,s) = 1$, et $p(I,s) = 1$.

En revanche, dans les autres cas, tout est possible et nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur la suite s. Nous l'illustrons seulement sur un cas particulier d'intervalle : si $I =]\ell, m]$ avec $\ell < m \leqslant 1$, alors nous allons montrer que pour tout nombre rationnel r de $[0,1]$, il existe une suite s convergeant vers ℓ et réalisant : $p(I,s) = r$. Il suffit pour cela de l'écrire sous forme de fraction irréductible : $r = \frac{a}{b}$, avec $(a,b) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ tel que : $0 \leqslant a \leqslant b$, puis de poser, pour tout j suffisamment grand, disons au-delà d'un rang j_0 (choisi de sorte que $\ell \pm \frac{1}{j}$ soit dans $[0,1]$ pour tout $j \geqslant j_0$, et tel que $j_0 \geqslant a-1$ pour ne pas se casser la tête ci-dessous) :

$$s_j = \begin{cases} \ell + \frac{1}{j} & \text{si : } \exists m \in [\![0, a-1]\!],\ j \equiv m \bmod b, \\ \ell - \frac{1}{j} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $j < j_0$, on peut poser : $s_j = 0 \notin I$, par exemple. Alors, pour tout entier $k \geqslant j_0$:

$$X_k(I,s) = \left(\bigcup_{m=0}^{a-1} (m + b\mathbb{N}) \right) \cap [\![j_0, k]\!].$$

On en déduit :

$$\forall k \geqslant j_0, \quad \frac{1}{k}N_k(I,s) = \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{a-1}\left(\left\lfloor \frac{k-m}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j_0 - m}{b} \right\rfloor \right) = \frac{a}{b} + \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k}\right),$$

donc : $p(I,s) = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k}N_k(I,s) = \dfrac{a}{b}$. Raisonnement analogue pour I de la forme $I = \{\ell\}$, $I = [m, \ell[$, etc.

En résumé, les seuls cas où l'on a une réponse ne dépendant pas de s sont :

— si I et son adhérence ne contiennent pas ℓ, on a : $p(I,s) = 0$;

— si ℓ est dans l'intérieur de I, on a : $p(I,s) = 1$.

On pouvait en fait déduire le premier cas du second (ou inversement) *via* l'identité suivante, provenant de la question 5 : $p([0,1], s) = p(I,s) + p([0,1] \setminus I, s)$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comment trouvé-je le développement asymptotique de $\frac{N_k(I,s)}{k}$? Et sa formule exacte avec la somme de parties entières ?

— Toujours dans le cas $I =]\ell, m]$: pour tout $\ell \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, peut-on trouver s telle que : $p(I,s) = \ell$?

(c) La répartition des valeurs de s dans $[0,1]$ dépend de la parité de j et alterne entre $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Posons donc : $I_1 = I \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, et : $I_2 = I \cap \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Selon que I (et donc I_1) ait ou non 0 pour extrémité, la détermination de $p(I_1, s)$ sera différente.

En effet, si 0 n'est pas une extrémité de I_1, alors la stricte décroissance et convergence de $(s_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ vers 0 assure, en raisonnant comme dans l'item 1.(b), que $s_{2n+1} \notin I_1$ pour tout n au-delà d'un certain rang et qu'alors $p(I_1, s)$ existe et vaut $p(I_1, s) = 0$; dans le cas contraire, toujours en raisonnant comme dans l'item ci-dessus, $p(I_1, s)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$ (et non 1 parce que cette suite extraite ne retient que la moitié des termes de la suite s).

Étude analogue avec I_2 : dans tous les cas $p(I_2, s)$ existe et $p(I_2, s) = 0$ si I_2 n'admet pas 1 pour extrémité, tandis que $p(I_2, s) = 1$ sinon. En utilisant la question 5 avec la réunion disjointe $I = I_1 \cup I_2$, on en déduit que $p(I,s)$ existe et que :

$$p(I,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } : I =]0,1[,\ I = [0,1[, I =]0,1] \text{ ou } : I = [0,1], \\ \frac{1}{2} & \text{si } : 0 \text{ ou } 1 \text{ est extrémité de } I \text{ (mais pas les deux) et } I \notin \{\{0\},\{1\}\}, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Vérifier rigoureusement l'argument incomplet qui aboutit à 1 plutôt qu'à $\frac{1}{2}$.

(d) Suivant le même principe que ci-dessus, on montre que $p(I,s)$ existe, et :

$$p(I,s) = \begin{cases} 1 & \text{si } : I =]0,1[,\ I = [0,1[, I =]0,1] \text{ ou } : I = [0,1], \\ \frac{1}{3} & \text{si } : 0 \text{ est extrémité de } I \text{ mais pas 1, et } I \neq \{0\}, \\ \frac{2}{3} & \text{si } : 1 \text{ est extrémité de } I \text{ mais pas 0, et } I \neq \{1\}, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Est-ce que $p(I,s)$ existe dès que toutes les suites extraites de la forme $(s_{an+b})_{n\geqslant 0}$, avec $b \in [\![0, a-1]\!]$, convergent, généralisant ainsi ce qui précède ? Et si l'ensemble des valeurs d'adhérence est dense dans $[0,1]$?

7. Remarquons que l'on a en fait, pour tout intervalle I de $[0,1]$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \frac{1}{k} N_k(I,s) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_I(s_j) = \mu_k(\mathbb{1}_I, s), \quad \text{et} : \quad \ell(I) = \int_0^1 \mathbb{1}_I(t)\mathrm{d}t,$$

donc l'hypothèse de l'énoncé peut se réécrire en disant que pour tout intervalle I de $[0,1]$, on a : $\mu(\mathbb{1}_I, s) = \displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_I(t)\mathrm{d}t$. Par linéarité évidente des applications $g \mapsto \mu(g,s)$ et $g \mapsto \displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$, l'égalité reste vraie pour une combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles, c'est-à-dire pour toute fonction en escalier sur $[0,1]$. Nous aimerions à présent atteindre les fonctions continues par passage à la limite : c'est l'objectif de ce qui suit.

Montrons que f est limite uniforme de fonctions en escalier (vos professeurs de 1re année l'ont implicitement démontré au moment de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment) : pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous allons construire une fonction en escalier φ_j telle que : $\|f - \varphi_j\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^j}$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[0,1]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, l'inégalité $|x - y| \leqslant \eta$ implique : $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2^j}$. Introduisons alors une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ telle que : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $a_{i+1} - a_i \leqslant \eta$, et posons :

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si} \quad \exists i \in [\![0, n-1]\!],\ x \in [a_i, a_{i+1}[, \\ f(1) & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Cette application est correctement définie, puisque : $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} [a_i, a_{i+1}[\cup \{1\} = [0,1]$. On a alors, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $x \in [a_i, a_{i+1}[$: $|f(x) - \varphi_j(x)| = |f(x) - f(a_i)| \leqslant \dfrac{1}{2^j}$ car $|x - a_i| \leqslant a_{i+1} - a_i \leqslant \eta$. Cette majoration vaut également pour $x = 1$ trivialement, donc : $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - \varphi_j(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^j}$. Cette majoration est indépendante de x, donc par propriété de la borne supérieure : $0 \leqslant \|f - \varphi_j\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2^j} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{j \to +\infty} \|f - \varphi_j\|_\infty = 0$, donc $(\varphi_j)_{j \geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Ainsi $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f, et $\mu(\varphi_j, s)$ est définie pour tout $j \geqslant 1$ et vaut $\displaystyle\int_0^1 \varphi_j(t)\mathrm{d}t$ d'après le commentaire en début de question, donc par la question 4 on a :

$$\mu(f,s) = \lim_{j\to+\infty} \mu(\varphi_j, s) = \lim_{j\to+\infty} \int_0^1 \varphi_j(t)\mathrm{d}t.$$

Il reste à justifier : $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^1 \varphi_j(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Il suffit d'écrire, pour tout $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \varphi_j(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |\varphi_j(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \|\varphi_j - f\|_\infty,$$

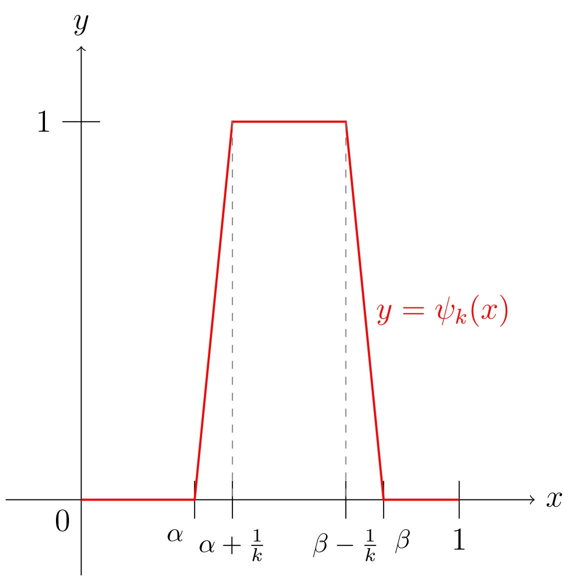
et chaque extrémité de cet encadrement converge vers 0, donc par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{j\to+\infty} \int_0^1 \varphi_j(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Par unicité de la limite, on a donc :

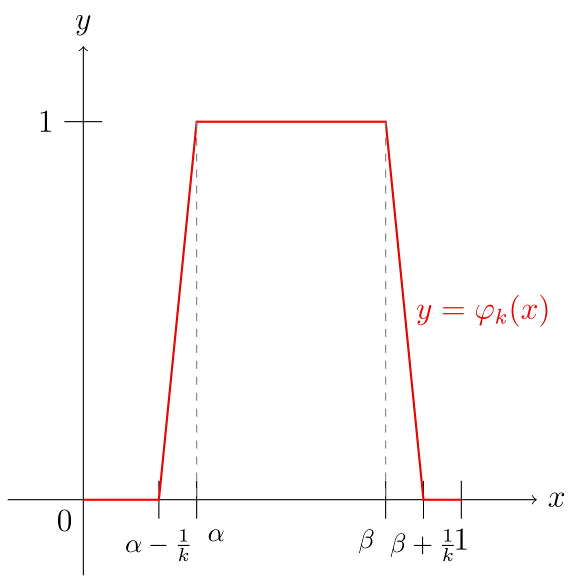
$$\mu(f,s) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque. Plus tard (chapitre I), le passage à la limite sous l'intégrale pourra directement être justifié par la convergence uniforme sur un segment.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Comprendre pourquoi on a besoin de l'uniforme continuité et non de la continuité uniquement.
- Voici un des premiers raisonnements par densité de l'année ! Bien identifier l'hypothèse qui permet de se dire qu'on *pouvait y penser*, afin d'y penser de soi-même à l'avenir (l'énoncé originel ne comportait pas l'indication).

8. Soit I un intervalle d'extrémités α et β, avec $(\alpha,\beta) \in [0,1]^2$ tel que : $\alpha \leqslant \beta$. Au vu des égalités mises en évidence dans la question précédente : $\ell(I) = \displaystyle\int_0^1 \mathbb{1}_I(t)\mathrm{d}t$, et : $\mu(\mathbb{1}_I, s) = p(I,s)$, on aurait très envie de faire le raisonnement suivant : « pour toute fonction f on a : $\mu(f,s) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, donc pour montrer : $p(I,s) = \ell(I)$, il suffit de poser : $f = \mathbb{1}_I$ ». Le problème est que l'hypothèse de l'énoncé ne vaut que pour f CONTINUE, et une fonction indicatrice ne l'est pas. Pas grave : soit k au voisinage de $+\infty$. Nous allons introduire des fonctions φ_k et ψ_k qui sont très proches des fonctions caractéristiques tout en étant continues :





Une description analytique est tout à fait possible et ne pose aucune difficulté. Elle est d'ailleurs effectuée dans l'énoncé de la question 16. Pour ne pas obscurcir la pensée, contentons-nous ici de remarquer que ψ_k vaut 0 sur $[0,\alpha]$ et $[\beta,1]$, égale à 1 sur $\left[\alpha+\frac{1}{k},\beta-\frac{1}{k}\right]$ (donc sur un domaine plus petit que pour $\mathbb{1}_I$) et affine sur les deux segments restants (de pente $\pm k$). Construction analogue pour φ_k, à ceci près qu'elle est égale à 1 sur $[\alpha,\beta]$ (donc sur un domaine plus grand que pour $\mathbb{1}_I$, ou égal). Ces fonctions ont été choisies pour encadrer de près $\mathbb{1}_I$:

$$\psi_k \leqslant \mathbb{1}_I \leqslant \varphi_k.$$

Comme elles sont continues, l'hypothèse de l'énoncé permet d'écrire :

$$\mu(\psi_k,s)=\int_0^1 \psi_k(t)\mathrm{d}t=\left(\beta-\alpha-\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{k},\quad \mu(\varphi_k,s)=\int_0^1 \varphi_k(t)\mathrm{d}t=(\beta-\alpha)+\frac{1}{k},$$

et il est assez clair que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ l'application $f\mapsto\mu_n(f,s)$ est croissante (c'est-à-dire : si $f\leqslant g$, alors $\mu_n(f)\leqslant\mu_n(g)$), donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \mu_n(\psi_k,s)\leqslant\mu_n(\mathbb{1}_I,s)\leqslant\mu_n(\varphi_k,s).$$

On aimerait prendre la limite quand $n\to+\infty$ pour faire apparaître $\mu(\psi_k,s)$, puis celle quand $k\to+\infty$ pour en déduire : $\mu(\mathbb{1}_I,s)=\beta-\alpha$. Cependant on ne sait pas si la limite quand $n\to+\infty$ de $\mu_n(\mathbb{1}_I,s)$ existe : il faut donc être plus fin que cela et nous allons raisonner en termes epsilonesques. Soit $\varepsilon>0$, et prenons k suffisamment grand pour que : $\dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(\psi_k,s)=\beta-\alpha-\frac{1}{k}$, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geqslant N_1$, on ait : $\left|\mu_n(\psi_k,s)-\left(\beta-\alpha-\frac{1}{k}\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Donc : $\forall n\geqslant N_1$, $\mu_n(\psi_k,s)\geqslant(\beta-\alpha)-\varepsilon$. Par un raisonnement analogue, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geqslant N_2$, on ait : $\mu_n(\varphi_k,s)\leqslant(\beta-\alpha)+\varepsilon$. Posons : $N'=\max(N_1,N_2)$. Le raisonnement ci-dessus démontre :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N'\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N',\quad(\beta-\alpha)-\varepsilon\leqslant\mu_n(\mathbb{1}_I,s)\leqslant(\beta-\alpha)+\varepsilon,$$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(\mathbb{1}_I,s)=\beta-\alpha=\ell(I)$. Ceci démontre l'existence de $\mu(\mathbb{1}_I,s)$ et qu'on a : $\mu(\mathbb{1}_I,s)=\ell(I)$. Or, comme nous l'avons dit en début de résolution, ainsi que dans la question 7, on a : $\mu(\mathbb{1}_I,s)=p(I,s)$ (en cas d'existence). D'où le résultat.

Remarque. Le raisonnement ci-dessus semble oublier le cas où I aurait 0 ou 1 pour extrémités. Il suffit d'un tout petit peu adapter la définition des fonctions ψ_k et φ_k, qui ne sont affines de pente $\pm k$ que d'un seul côté dans ce cas.

Remarque. Je pense que le concepteur du sujet avait une autre idée en tête, puisqu'il introduit ces fonctions « presque » indicatrices bien plus loin dans le sujet (question 16).

Remarque. Attention à ne pas imaginer que $(\psi_k)_k$ et $(\varphi_k)_k$ convergent uniformément vers $\mathbb{1}_I$: la convergence uniforme doit préserver la continuité. C'est pourquoi on ne pouvait pas se servir de la question 4 ici.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Je dis plus haut qu'on aimerait prendre la limite quand $n\to+\infty$, puis celle quand $k\to+\infty$, mais que ce n'est pas possible ; et qu'est-ce qui empêche de d'abord prendre la limite quand $k\to+\infty$, puis quand $n\to+\infty$?

9. D'après la question 7, sous l'hypothèse de l'énoncé on a, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(f,s)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Pour calculer les deux limites de l'énoncé, il suffit de bien choisir f de sorte à y reconnaître $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n(f,s)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit f l'application définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto x^n$. Elle est continue sur $[0,1]$. Donc, d'après ce qui vient d'être rappelé :

$$\lim_{k\to+\infty} \mu_k(f,s) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. En appliquant le résultat de la question 7 à $x \mapsto \cos(2n\pi x)$ et $x \mapsto \sin(2n\pi x)$, on a immédiatement :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \cos(2n\pi s_j) = \int_0^1 \cos(2n\pi x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_0^1 = 0,$$

et de même : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \sin(2n\pi s_j) = 0.$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Est-ce que les questions ne permettaient pas d'avoir directement l'égalité $\mu(f,s) = \int_0^1 f$ pour f à valeurs complexes ? De sorte qu'il suffise de considérer l'application $x \mapsto e^{2ni\pi x}$ pour avoir les deux limites à la fois ?

Troisième partie

10. Soit t au voisinage de x. On a : $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc par composition :

$$p_n(x,t) \underset{t\to x}{\sim} \frac{1}{n}\left(\frac{n\pi\cancel{(x-t)}}{\pi\cancel{(x-t)}}\right)^2 \underset{t\to x}{\longrightarrow} n,$$

donc $t \mapsto p_n(x,t)$ se prolonge par continuité en x en posant : $p_n(x,x) = n$. Il en est de même en $x \pm 1$ par 1-périodicité (le seul cas où ceci peut être à considérer étant : $x \in \{0,1\}$). La question suivante propose une autre façon de prolonger par continuité (qui est même meilleure en un sens, puisqu'elle permet de prolonger $(x,t) \mapsto p_n(x,t)$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$; mais ce n'est pas nécessaire pour traiter ce problème).

11. Comme $u \mapsto \left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2$ est paire alors que $u \mapsto \sin(2ku)$ ne l'est pas quel que soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on peut s'attendre à avoir $b_{n,k} = 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $u \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Voyons comment obtenir $\left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2$ comme une somme de cosinus. Nous allons montrer :

$$n + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos(2k\pi u) = \left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2. \qquad (*)$$

Première démonstration. On rappelle les identités suivantes, très classiques et inévitablement rencontrées en 1^{re} année (éventuellement sous une forme moins générale) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos((2k\pi+\theta)u) = \cos(((n-1)\pi+\theta)u)\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k\pi+\theta)u) = \sin(((n-1)\pi+\theta)u)\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos((2k\pi-(n-1)\pi)u) = \frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\pi u) = \frac{(\sin(n\pi u))^2}{\sin(\pi u)}.$$

L'astuce, pour faire apparaître $\sin(\pi u)$ *au carré* à peu de frais, est de calculer une double somme trigonométrique grâce à ce qui précède, où la simplification de la première somme doit faire apparaître $\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\pi u)$. C'est ce qui me conduit à calculer :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{2\ell}\cos((2m\pi-2\ell\pi)u)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\sin((2\ell+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}=\left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2.$$

Il reste à réarranger la double somme pour la mettre sous la forme voulue par l'énoncé. On doit regrouper tous les couples (ℓ,m) tels que $m-\ell$ soient égaux au même entier k (ou à $-k$: cela donne le même cosinus par parité ; il faut simplement considérer à part $k=0$ puisque dans ce cas $k=-k$) :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{2\ell}\cos((2m\pi-2\ell\pi)u)=\sum_{\substack{(\ell,m)\\ m-\ell=0}}\cos(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{\substack{(\ell,m)\\ m-\ell=k}}\cos(2k\pi u)+\sum_{\substack{(\ell,m)\\ m-\ell=-k}}\cos(2k\pi u)\right).$$

Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, comptons combien de couples (ℓ,m) vérifient les contraintes :

$$\ell\in[\![0,n-1]\!],\ m\in[\![0,2\ell]\!],\ m-\ell=k.$$

Ce sont exactement les couples de la forme $(\ell,k+\ell)$ avec $\ell\in[\![k,n-1]\!]$. Il y en a donc $n-k$. Calcul analogue pour les couples vérifiant $m-\ell=-k$. Donc :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{2\ell}\cos((2m\pi-2\ell\pi)u)=n+\sum_{k=0}^{n-1}2(n-k)\cos(2k\pi u).$$

En conclusion, en regroupant tout ce qui a été effectué :

$$\left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2=n+\sum_{k=0}^{n-1}2(n-k)\cos(2k\pi u),$$

d'où $(*)$.

Deuxième démonstration. On a l'égalité suivante dans $\mathbb{C}(X)$: $\sum_{k=0}^{n-1}X^k=\frac{1-X^n}{1-X}$. Après dérivation :

$$\sum_{k=1}^{n-1}kX^{k-1}=\frac{1-X^n}{(1-X)^2}-\frac{nX^{n-1}}{1-X}.$$

Évaluons cette égalité en $e^{-2i\pi u}\neq 1$, et multiplions-la par $e^{2i\pi u(n-1)}$. Cela donne, par la technique de l'angle moitié :

$$\sum_{k=1}^{n-1}ke^{2i\pi u(n-k)}=e^{2i\pi u(n-1)}\frac{1-e^{-2i\pi un}}{(1-e^{-2i\pi u})^2}-\frac{n}{1-e^{-2i\pi u}}=-\frac{e^{i\pi un}i}{2}\frac{\sin(\pi un)}{(\sin(\pi u))^2}+\frac{ine^{i\pi u}}{2\sin(\pi u)}.$$

En prenant la partie réelle dans cette égalité, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\cos(2\pi u(n-k))=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2-\frac{n}{2},$$

et on en déduit $(*)$ après le changement d'indice $k\mapsto n-k$ dans la somme, et après menus réarrangements (multiplication par 2, etc.).

Une fois $(*)$ démontré. On y pose : $u = x - t$ (pour $(x,t) \in [0,1]^2$ tel que $t \neq x$ pour le moment), et on obtient :

$$p_n(x,t) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos(2k\pi(x-t)).$$

Chaque membre de l'égalité est continu sur $[0,1]$ par la question précédente, donc l'égalité est également valable pour $x = t$: d'où le résultat en prenant $a_{n,0} = 1$, et : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{n,k} = 2\left(1 - \frac{k}{n}\right)$, $b_{n,k} = 0$.

Remarque. Une autre démonstration (qui est en fait la plus naturelle en un certain sens) est *via* le calcul de la moyenne de Cesàro de la suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{2ik\pi u}\right)_{n\geqslant 0}$. Le faire, pour comprendre.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— J'ai essayé, dans la première démonstration, de donner une démarche méthodique pour arriver au résultat voulu sans qu'il ne paraisse catapulté. S'en inspirer pour trouver des identités analogues en d'autres circonstances. En tous les cas, la présence de $\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ DOIT faire penser à la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ikt}$ et à ses parties réelle et imaginaire.

— Pour la seconde : l'idée est de constater qu'à première vue, les combinaisons linéaires (à scalaires ne dépendant pas de k) de $t \mapsto e^{ikt}$ ne semblent pas suffire à obtenir $p_n(x,t)$. On produit davantage de combinaisons linéaires en considérant aussi les dérivées des fonctions précédentes, espérant enfin obtenir ainsi $t \mapsto p_n(x,t)$. Pourquoi les dérivées ? Parce que c'est ainsi qu'on peut le plus facilement obtenir de nouvelles sommes explicitement calculables : par dérivation de sommes connues (dépendant d'une variable). Si une seule dérivation n'avait pas suffi, on aurait recommencé, et ainsi de suite (néanmoins, le fait d'exiger un sinus au carré au dénominateur laisse penser qu'une seule dérivation suffit : c'est d'ailleurs ce qui peut avoir motivé l'idée de la dérivation d'emblée, sans parler d'algèbre engendrée par des fonctions). C'est une approche qui fonctionne parce que les identités à démontrer font souvent intervenir des facteurs polynomiaux.

— pour plus tard (chapitre sur les séries entières) : la formule $\sum_{k=1}^{n-1} k\cos(2\pi u(n-k)) = \bigstar$ ressemble à un produit de Cauchy. Qu'est-ce que cela donne lorsqu'on considère les séries génératrices ?

12. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ on a :

$$\int_0^1 \cos(2k\pi(x-t))\mathrm{d}t = \frac{\sin(2k\pi x) - \sin(2k\pi(x-1))}{2k\pi} = \frac{\sin(2k\pi x) - \sin(2k\pi x)}{2k\pi} = 0.$$

On en déduit, par la question précédente et la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 p_n(x,t)\mathrm{d}t = 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\int_0^1 \cos(2k\pi(x-t))\mathrm{d}t = 1.$$

On passe à la seconde partie de la question, qui quantifie précisément la concentration de masse près de $t = x$. Introduisons $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les inégalités : $0 < \eta \leqslant x \leqslant 1 - \eta$. Ces inégalités permettent d'utiliser la croissance de l'intégrale ci-dessous (on majore le sinus au numérateur par 1 et le reste par le maximum sur l'intervalle d'intégration) :

$$\int_0^{x-\eta} p_n(x,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{x-\eta}\left(\frac{\sin(n\pi(x-t))}{\sin(\pi(x-t))}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_\eta^x \left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2 \mathrm{d}u \leqslant \frac{x-\eta}{n\left(\sin(\pi\eta)\right)^2},$$

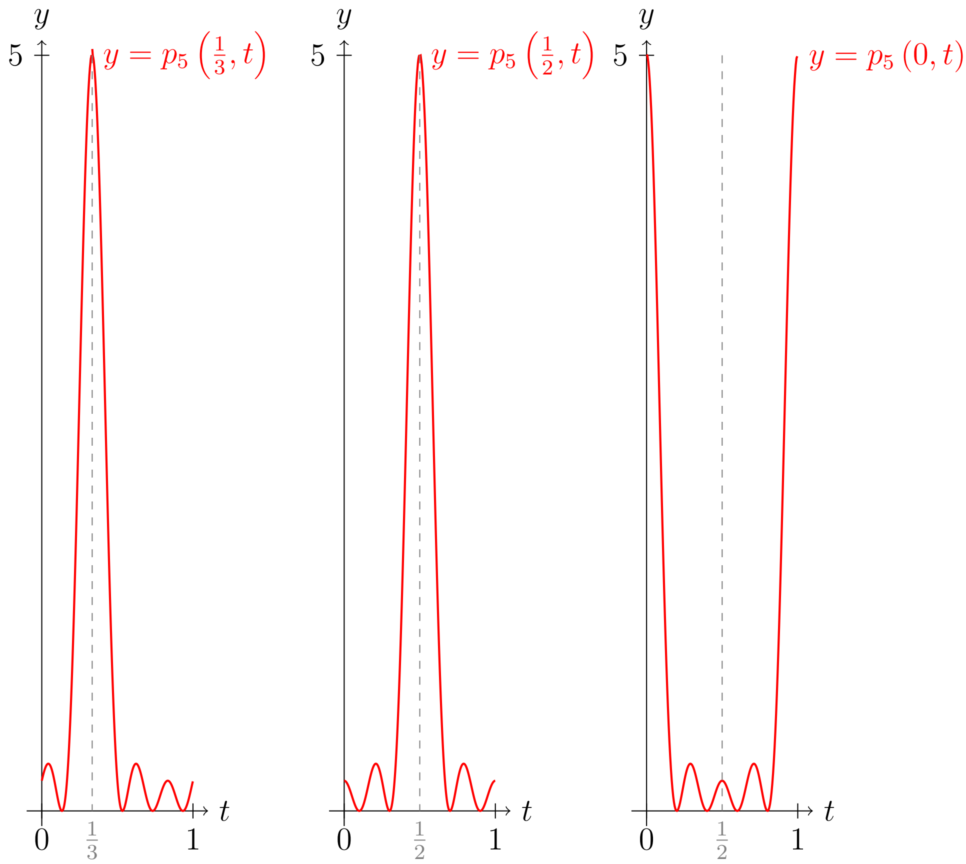
et, avec le changement de variable $u = t - x$:

$$\int_{x+\eta}^1 p_n(x,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_\eta^{1-x}\left(\frac{\sin(n\pi u)}{\sin(\pi u)}\right)^2 \mathrm{d}u \leqslant \frac{1-x-\eta}{n\left(\sin(\pi\eta)\right)^2},$$

d'où :

$$\int_0^{x-\eta} p_n(x,t)\mathrm{d}t + \int_{x+\eta}^1 p_n(x,t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1-2\eta}{n\left(\sin(\pi\eta)\right)^2} \leqslant \frac{1}{n(\sin(\pi\eta))^2}.$$

Remarque. Cette question formule quantitativement et de façon précise la « concentration de masse » de l'intégrale de p_n autour de x (ce qui n'a rien d'étonnant vu que le dénominateur s'y annule et y amplifie la taille de la fonction) : hors de $[x-\eta, x+\eta]$, la valeur de l'intégrale est en $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ (et converge vers 0 en particulier).



Cependant la périodicité du sinus implique que pour $x = 0$ et $x = 1$, la concentration de la masse se fait aux deux extrémités de l'intervalle $[0,1]$: cela justifiera la nécessité d'un examen particulier pour x proche de 0 ou 1, au moment de traiter la question 14.

13. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in [0,1]$. Par la question 11 et la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 f(t)p_n(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi(x-t))\mathrm{d}t,$$

or on a, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi(x-t))\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t\right)\cos(2k\pi x) + \left(\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\mathrm{d}t\right)\sin(2k\pi x),$$

donc en posant :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \alpha_{n,k} = \frac{2(n-k)}{n}\int_0^1 f(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t, \quad \beta_{n,k} = \frac{2(n-k)}{n}\int_0^1 f(t)\sin(2k\pi t)\mathrm{d}t,$$

et : $\alpha_{n,0} = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, on a :

$$f_n(x) = \alpha_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{n,k}\cos(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{n-1}\beta_{n,k}\sin(2k\pi x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque culturelle. Toutes ces questions vous font manipuler, sans le dire, un développement tronqué en série de Fourier (pas celui de f, à cause du facteur $\frac{2(n-k)}{n}$, mais presque).

Remarque. L'hypothèse $f(0) = f(1)$ n'intervient pas dans cette question.

14. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, donc par le théorème de Heine elle est uniformément continue : fixons donc $\eta \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$, de sorte que : $\forall (a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leqslant 2\eta \Longrightarrow |f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in [0,1]$. Pour abréger, nous noterons : $\displaystyle\int_{[0,1]\setminus[x-\eta,x+\eta]} = \int_0^{x-\eta} + \int_{x+\eta}^1$. Si x vérifie : $0 < \eta \leqslant x \leqslant 1-\eta$, alors on a :

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \int_0^1 (f(t) - f(x)) p_n(x,t) \mathrm{d}t \\ &= \int_{x-\eta}^{x+\eta} (f(t) - f(x)) p_n(x,t) \mathrm{d}t + \int_{[0,1]\setminus[x-\eta,x+\eta]} (f(t) - f(x)) p_n(x,t) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

Or par la question 12 on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1]\setminus[x-\eta,x+\eta]} (f(t) - f(x)) p_n(x,t) \mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_{[0,1]\setminus[x-\eta,x+\eta]} (|f(t)| + |f(x)|) p_n(x,t) \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{[0,1]\setminus[x-\eta,x+\eta]} p_n(x,t) \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n(\sin(\pi\eta))^2}. \qquad (q.\,12) \end{aligned}$$

Rappelons que f est continue sur le segment $[0,1]$, donc par le théorème des bornes atteintes on sait que $\|f\|_\infty$ est fini. Ensuite, toujours par la question 12 et par uniforme continuité de f :

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-\eta}^{x+\eta} (f(t) - f(x)) p_n(x,t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{x-\eta}^{x+\eta} |(f(t) - f(x)) p_n(x,t)| \,\mathrm{d}t &\leqslant \varepsilon \int_{x-\eta}^{x+\eta} |p_n(x,t)| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon \int_0^1 |p_n(x,t)| \mathrm{d}t \\ &= \varepsilon \int_0^1 p_n(x,t) \mathrm{d}t \\ &= \varepsilon, \qquad (q.\,12) \end{aligned}$$

donc, toujours si $x \in [\eta, 1-\eta]$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n(\sin(\pi\eta))^2}.$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2\|f\|_\infty}{n(\sin(\pi\eta))^2} = 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on ait : $\displaystyle\frac{2\|f\|_\infty}{n(\sin(\pi\eta))^2} \leqslant \varepsilon$. En combinant toutes ces majorations, on a démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$ et tout réel $x \in [\eta, 1-\eta]$, on ait :

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon,$$

donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[\eta, 1-\eta]$ vers f. Passons à l'étude sur $[0,\eta]$ et $[1-\eta, 1]$. Il faut découper différemment l'intégrale, pour la raison déjà expliquée en remarque de la question

12. Supposons : $x \in [0, \eta]$. On a :

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leqslant \left|\int_0^{2\eta}(f(t)-f(x))p_n(x,t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{2\eta}^{1-2\eta}(f(t)-f(x))p_n(x,t)\mathrm{d}t\right| \\ &\quad + \left|\int_{1-2\eta}^{1}(f(t)-f(x))p_n(x,t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^{2\eta}|f(t)-f(x)|p_n(x,t)\mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty\int_{2\eta}^{1-2\eta}p_n(x,t)\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{1-2\eta}^{1}|f(t)-f(x)|p_n(x,t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme : $\forall t \in [0{,}2\eta]$, $|x-t| \leqslant 2\eta$, on a : $\forall t \in [0{,}2\eta]$, $|f(x)-f(t)| \leqslant \varepsilon$. Cette majoration va nous permettre de gérer l'intégrale sur $[0{,}2\eta]$. Pour celle sur $[1-2\eta{,}2\eta]$, il faut un peu plus travailler puisque $x \in [0{,}2\eta]$ et $t \in [1-2\eta{,}1]$ ne sont pas proches *a priori* ! C'est là qu'intervient l'hypothèse : $f(0) = f(1)$. En effet, d'après ce qu'on a raconté ci-dessus, on a : $|f(x)-f(0)| \leqslant \varepsilon$, et donc aussi : $|f(x)-f(1)| \leqslant \varepsilon$. Or : $\forall t \in [1-2\eta{,}1]$, $|f(1)-f(t)| \leqslant \varepsilon$, toujours par uniforme continuité. Donc :

$$\forall t \in [1-2\eta{,}1], \quad |f(x)-f(t)| \leqslant |f(x)-f(1)| + |f(1)-f(t)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Tout ce qu'on vient d'établir permet d'écrire :

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leqslant \varepsilon\int_0^{2\eta}p_n(x,t)\mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty\int_{2\eta}^{1-2\eta}p_n(x,t)\mathrm{d}t + 2\varepsilon\int_{1-2\eta}^{1}p_n(x,t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant 3\varepsilon\int_0^{1}p_n(x,t)\mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty\int_{2\eta}^{1-2\eta}p_n(x,t)\mathrm{d}t \\ &= 3\varepsilon + 2\|f\|_\infty\int_{2\eta}^{1-2\eta}p_n(x,t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Il reste à majorer cette dernière intégrale. Elle devrait être « petite » si l'on en croit la remarque à la fin de la question 12 :

$$\int_{2\eta}^{1-2\eta}p_n(x,t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{(\sin(\pi(2\eta-x)))^2} \leqslant \frac{1}{n(\sin(\pi\eta))^2},$$

donc :

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n(\sin(\pi\eta))^2}.$$

À partir de là, on conclut comme dans le cas $x \in [\eta{,}1-\eta]$, pour conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$ et tout réel $x \in [0, \eta]$, on ait :

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 4\varepsilon,$$

donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0, \eta]$ vers f. Le raisonnement est le même sur $[1-\eta{,}1]$, et on en déduit enfin que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0{,}1]$ vers f. D'où le résultat.

Remarque. Vous constaterez des ressemblances plus tard, je l'espère, entre le traitement des questions précédentes, et les exercices du chapitre I sur le produit de convolution et sa finalité : on n'a rien fait d'autre que de construire une approximation de l'unité constituée de fonctions trigonométriques qui, convoluée par f, donne une suite de fonctions trigonométriques convergeant uniformément vers f !

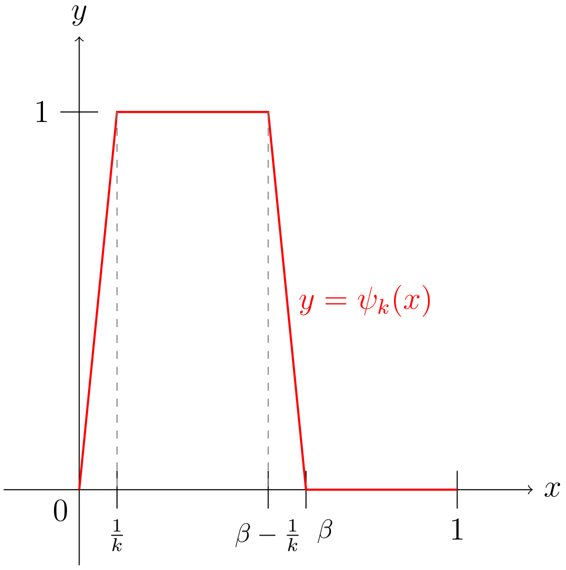
Remarque. On pouvait éviter l'étude de la convergence uniforme sur trois intervalles, en utilisant le fait que p_n et f puissent être étendues en des fonctions 1-périodiques continues sur $\mathbb{R}$ (grâce à l'hypothèse $f(0) = f(1)$).

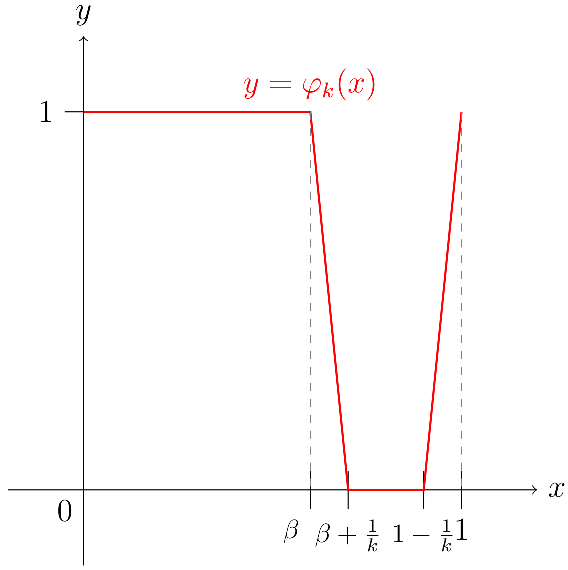
Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Comprendre pourquoi certaines intégrales de p_n sont majorées par l'intégrale sur [0,1] (qui vaut 1), et d'autres plus finement, idéalement par une analyse qualitative.
- Pourquoi ai-je pris $\eta \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$? Et pourquoi ai-je pris 2η plutôt que η comme module d'uniforme continuité ? Pourquoi ai-je découpé l'intervalle [0,1] ainsi : $[0,1] = [0,2\eta] \cup [2\eta,1-2\eta] \cup [1-2\eta,1]$, alors que tout semble inciter à plutôt prendre $[0,\eta]$, $[\eta,1-\eta]$ et $[1-\eta,1]$? Regarder ce qui coincerait.
- Pourquoi ai-je besoin de l'uniforme continuité et non seulement de la continuité ?
- Se convaincre que si $f(1) \neq f(0)$, alors il est IMPOSSIBLE que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur [0,1] vers f (même sans lire ma démonstration !).
- Se convaincre de la valeur ajoutée de l'interprétation suggérée dans ma dernière remarque (avec la 1-périodicité), en vue d'alléger la démonstration.
- Si le produit de convolution a été vu : comparer cette question et les précédentes, avec l'usage qu'on en fait dans les exercices.

15. Notons d'abord que la propriété $(*)$ de l'énoncé, ainsi que la question 13, permettent de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\lim_{k\to+\infty} \mu_k(f_n,s) = \alpha_{n,0} = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, en tant que somme de suites convergentes. Ainsi $\mu(f_n,s)$ existe et est égal à $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Or $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers f (question 14), donc par la question 4 on a : $\lim_{n\to+\infty} \mu(f_n,s) = \mu(f,s)$. Par unicité de la limite :
$$\mu(f,s) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$
Remarque. L'énoncé demande de montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mu(f_n,s) = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$, alors que nous avons trouvé $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ ci-dessus. Ce n'est pas une coquille, car les deux intégrales sont égales comme vous pouvez le vérifier. Je pense que l'énoncé a choisi de demander cette égalité afin que les candidats n'ayant pas déterminé $\alpha_{n,0}$ (dans la question 13) puissent malgré tout traiter cette question. On peut alors montrer : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, même sans avoir trouvé $\alpha_{n,0}$, en utilisant la convergence uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers f (on l'a illustré sur une situation proche dans la question 7 ; voir aussi les théorèmes d'interversion du chapitre I).
Remarque. Voici un bel exemple de résolution de problème où l'on approche l'intégrale étudiée par densité, avec une autre densité que celle des fonctions en escalier ou polynomiales.

16. L'encadrement demandé fut justifié à la question 8. Comme ψ_k et φ_k sont continues et ont même valeur en 0 et 1, la question précédente permet de montrer que $\mu(\psi_k,s)$ et $\mu(\varphi_k,s)$ existent et sont égaux à $\int_0^1 \psi_k(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \varphi_k(t)\mathrm{d}t$ respectivement. Il suffit alors de reprendre le raisonnement de la question 8 pour obtenir : $p(I,s) = \ell(I)$. Ceci vaut pour tout intervalle fermé (dont les extrémités ne sont pas 0 et 1), mais en vérité l'encadrement proposé reste valable pour toute autre forme d'intervalle inclus dans [0,1] (dont les extrémités ne sont pas 0 et 1). Il reste à traiter les cas : $I = [0,\beta]$, et : $I = [\alpha,1]$. Nous ne traitons que le premier cas, le second étant analogue.
Supposons : $I = [0,\beta]$. On va légèrement modifier les fonctions φ_k et ψ_k pour qu'elles vérifient $\varphi_k(0) = \varphi_k(1)$ et $\psi_k(0) = \psi_k(1)$. Considérons les fonctions φ_k et ψ_k dont les graphes sont ci-dessus, et dont la description analytique va de soi :





On a toujours l'encadrement : $\psi_k \leqslant \mathbb{1}_I \leqslant \varphi_k$ avec l'égalité en 0 et 1, donc on peut comme dans la question 8 en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad (\beta - \alpha) - \varepsilon \leqslant \mu_n(\mathbb{1}_I, s) \leqslant (\beta - \alpha) + \varepsilon,$$

sachant que rien ne diffère, même la valeur des intégrales de ψ_k et φ_k reste identique :

$$\mu(\psi_k, s) = \beta - \frac{1}{k}, \quad \mu(\varphi_k, s) = \beta + \frac{1}{k}.$$

On en déduit : $p(I, s) = \lim_{n \to +\infty} \mu_n(\mathbb{1}_I, s) = \beta = \ell(I)$, donc le résultat s'étend au cas où $I = [0, \beta]$, et de même pour $I = [\alpha,1]$. Ceci permet enfin de démontrer que s est régulière, d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Dans la question 7, je n'ai pas semblé préoccupé par le cas où 0 ou 1 est une extrémité de I. Pourquoi donc ? Le raisonnement semble pourtant le même.

17. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a : $\sum_{j=1}^{k} \exp(2i\pi jn\theta) = \sum_{j=1}^{k} (\exp(2i\pi n\theta))^j$, et comme c'est une somme géométrique de raison $\exp(2i\pi n\theta)$, il importe de savoir si : $\exp(2i\pi n\theta) = 1$. C'est le cas si et seulement si : $\theta \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, ce qui est exclu puisque θ est supposé irrationnel. On a donc :

$$\sum_{j=1}^{k} \exp(2i\pi jn\theta) = \sum_{j=1}^{k} (\exp(2i\pi n\theta))^j = \exp(2i\pi n\theta)\frac{1 - \exp(2i\pi n\theta(k+1))}{1 - \exp(2i\pi n\theta)},$$

et on en déduit :

$$0 \leqslant \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} (\exp(2i\pi n\theta))^j \right| \leqslant \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{|1 - \exp(2i\pi n\theta)|}.$$

Chaque extrémité de l'encadrement tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \exp(2i\pi jn\theta) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. Comme $t \mapsto \exp(it)$ est 2π-périodique et qu'on a : $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ 2\pi n s_j \equiv 2\pi nj\theta \bmod 2\pi$ (en effet : $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n\lfloor j\theta \rfloor \in \mathbb{Z}$), on a aussi : $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \exp(2i\pi n s_j) = 0$. En prenant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que la suite $(s_j)_{j \geqslant 1}$ est à valeurs dans $[0,1]$ (c'est l'intérêt d'avoir soustrait $\lfloor j\theta \rfloor$) et vérifie la condition $(*)$ de l'énoncé : c'est donc une suite régulière. D'où le résultat.