Devoir maison nº 9 – Compte rendu

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Certaines copies sont ponctuellement illisibles (jeu de piste toutes les trois questions, nombreux coups de TippEX et ratures, texte écrit non linéairement, entrelacement désordonné des langages ordinaire et mathématique...). Au contraire de votre serviteur, votre correcteur n'aura aucun affect à votre égard ni aucune volonté pédagogique de comprendre votre pensée pour la rectifier : il ne s'efforcera pas de comprendre l'incompréhensible, ou le fera au prix d'un malus (cf. le barème de Centrale que je vous ai reproduit dans le compte rendu du DST nº 1).

Imprécisions mathématiques.

2. Attention, si $|z| < 1$ alors $|z|^n < 1$ pour n entier naturel NON NUL.
3. La dérivabilité de $t \mapsto e^{L(tz)}$ a posé de nombreux problèmes, pour des raisons totalement opposées : d'un côté, certains élèves disent machinalement que la composition est dérivable parce que « $t \mapsto L(tz)$ est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{C}$, tandis que exp est dérivable sur $\mathbb{C}$ », et de l'autre côté des élèves fournissent des arguments (corrects) très longs pour justifier que c'est possible : théorème de dérivation terme à terme, développement limité...

   Le problème du premier argument est que vous n'avez jamais défini la dérivabilité hors d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (même si les exercices du chapitre XIII en donneront un aperçu sur $\mathbb{C}$) et que « exp est dérivable sur $\mathbb{C}$ » est normalement un prédicat dépourvu de sens pour un élève de MP.

   Le problème du second argument est qu'un théorème de MPSI est justement là pour vous éviter ces contorsions : il a été démontré que si $\Phi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable alors $\exp \circ \Phi$ l'est aussi (sur I). J'imagine qu'il fut démontré en passant par les parties réelle et imaginaire. Inutile, donc, de se casser la tête pour redémontrer un résultat connu.
4. On ne peut pas écrire des inclusions $A \subseteq B$ si les éléments de A et de B ne sont pas de même nature. Trop d'élèves ont cru possible d'écrire $P_{n,N} \subseteq P_{n,N+1}$ alors que les éléments du premier ensemble sont des N-uplets et ceux du second sont des $(N+1)$-uplets.

   Les enfants écrivent des inclusions, les adultes écrivent des injections : songez-y pour éviter ces problèmes d'homogénéité (sachant que le chapitre III vous a expliqué la raison morale pour laquelle c'est la même chose). Plus généralement, les applications donnent une souplesse infinie, comme je l'ai souligné dans le compte rendu nº 9 pour les questions de dénombrement (votre serviteur n'est pas loin de penser, comme certains mathématiciens extrémistes, que « tout est application » en mathématiques... sans atteindre cet excès, pensez à mettre en relation les objets par ce moyen lorsque vous peinez autrement).
5. Le produit de Cauchy n'est QU'UNE façon parmi une infinité d'autres d'écrire un produit de séries. Rappelons d'où sort sa définition : si $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n z^n)_{n\geqslant 0}$ sont sommables, alors leur produit aussi et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_m b_n z^{m+n}$. Face à une telle écriture, il est naturel de regrouper les puissances de z égales et c'est ce qui conduit à utiliser le théorème de sommation par paquets, avec les paquets : $I_k = \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m+n = k\}$. On tombe ainsi sur le produit de Cauchy de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$.

   Là où je veux en venir avec ce rappel, c'est que la forme du paquet qui conduisit aux produits de Cauchy *fut conditionnée par la forme des exposants de z*. Mais si vous avez un produit de séries entières lacunaires, avec des lacunes qui ne sont pas aux mêmes indices, quel est l'intérêt de l'utiliser ? Utiliser le produit de Cauchy pour simplifier $\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$ n'était pas pertinent. Comme le produit de ces quotients donne : $\sum_{(k_1,\dots,k_N)\in\mathbb{N}^N} z^{\sum_{n=1}^{N} k_n n}$, prendre pour paquets $I_k = \left\{(k_1,\dots,k_N) \in \mathbb{N}^N \mid \sum_{n=1}^{N} k_n n = k\right\}$ est bien plus pertinent ! Cela vous aurait évité bien des contorsions (introduction d'une fonction indicatrice ou d'une relation de récurrence vérifiée par les $p_{n,N}$).

6. Quand l'objectif est de montrer qu'une limite d'intégrale est nulle, un calcul d'intégrale n'est pas forcément utile : éventuellement, des majorations triviales de l'intégrande permettent d'obtenir le résultat (dans ce problème, majorer $\frac{|q(u)|}{u}$ par $\frac{1}{\lfloor x \rfloor}$ sur $[\lfloor x \rfloor, x]$ suffisait).
7. Peu d'élèves ont retenu qu'en cas d'intégrande positif, l'intégration terme à terme est automatique.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

8. Les hypothèses des théorèmes d'interversion sont souvent mal reconstituées (surtout pour le théorème de continuité sous le signe intégrale, où vous vérifiez l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ en amont : inutile, cela découle de l'hypothèse de domination). Mais ce qui m'irrite le plus est leur pure omission, surtout pour les hypothèses de régularité – certes trivialement vérifiées –. Si vous saviez quelle attention est accordée à leur simple mention par les correcteurs, vous arrêteriez sur le champ (je n'ai pas l'impression que l'économie de vingt secondes faite en les omettant vaille le coup).