Devoir maison n° 9
(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Le problème est un mélange entre les sujets 2022 de Mines-Ponts, Mathématiques I, filières MP et PSI (le sujet est le même dans les deux filières, présenté différemment ; j'ai enlevé la partie probabiliste du sujet de MP, et permuté deux parties pour avoir une progression me semblant plus naturelle).

Il porte sur le nombre p_n de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire le nombre de façons de l'écrire comme somme d'entiers naturels. On se convainc aisément que c'est difficile d'expliciter une telle quantité à moins de fixer le nombre d'entiers non nuls que l'on somme pour obtenir n. Néanmoins Euler remarqua que si l'on considérait la série génératrice de la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$, on obtenait la jolie formule :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-z^k}.$$

C'est une illustration parmi d'autres de l'intérêt du pont entre suites et fonctions permis par les séries entières : certaines relations pénibles à écrire avec des suites ont une description fonctionnelle compacte. Ramanujan en déduisit plus tard l'expression explicite (abominable) de p_n suivante :

$$p_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{k}{8}} \left[\sum_{\substack{m=0 \\ \mathrm{pgcd}(m,k)=1}}^{k-1} \exp\left(\pi i \left(\sum_{r=1}^{m-1} \frac{r}{m}\left[\frac{nr}{m} - \left\lfloor \frac{nr}{m} \right\rfloor - \frac{1}{2}\right] - \frac{2nm}{k}\right)\right)\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\exp\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)\right)$$

qui n'a aucun intérêt calculatoire. Il est plus instructif de chercher un équivalent asymptotique de p_n.

Pour cela le point de départ est classique et utilise encore la théorie des séries entières. La **formule intégrale de Cauchy**, qui est en quelque sorte une formule d'inversion, permet d'écrire :

$$\forall r \in]0,1[, \quad p_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-(re^{i\theta})^k} \mathrm{d}\theta.$$

Cette formule est obtenue à la fin de la partie B. Une estimation de p_n passe alors par une estimation de l'intégrande puis de son intégrale.

C'est là que les choses se gâtent : d'abord à cause du produit infini, même si on est en mesure de l'exprimer à l'aide de l'exponentielle et du **logarithme complexe** (c'est ce qu'on fait dans la partie A du sujet). Ensuite : le comportement des fonctions même usuelles dans le plan complexe est assez délicat, et des majorations naïves de l'intégrande (en module) donnent souvent des majorations beaucoup trop fortes de l'intégrale *via* l'inégalité triangulaire. En effet, procéder ainsi élimine le terme oscillant $e^{-in\theta}$, et on perd ainsi toute trace des compensations (un peu de la même manière que majorer

$\int_0^{2\pi N} \sin(t)\mathrm{d}t$ en utilisant $|\sin(t)| \leqslant 1$ donne un résultat très éloigné de la réalité, parce qu'on perd le fait que le sinus est autant positif que négatif sur $[0,2\pi N]$). Pour y remédier il existe différentes méthodes plus ou moins proches du programme des classes préparatoires, à peu près toutes tombées en désuétude : **méthode de Laplace**, **méthode du col**... La plus élaborée de ces techniques (et très éloignée du programme) est la **méthode du cercle de Hardy-Littlewood**. C'est en l'utilisant que Hardy et Ramanujan ont obtenu l'équivalent :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n}.$$

Le sujet de MP cité plus haut démontre effectivement cet équivalent (la méthode du cercle étant remplacée par des méthodes probabilistes) en admettant un résultat. Le résultat que nous obtenons dans ce devoir est plutôt proche de cet équivalent, puisqu'on montre que p_n est dominé par le membre de droite.

Ce devoir vous fait utiliser toutes les techniques d'analyse de 2e année (intégration et dérivation terme à terme, utilisation de la continuité des intégrales à paramètres et des sommes de séries de fonctions, transformation d'Abel, formule intégrale de Cauchy, théorème de convergence dominée, etc.). Malgré certaines questions affreusement techniques, il permet une excellente révision de tout le programme d'analyse. Songez-y à l'orée de vos écrits.

Ce qu'on retiendra en bref. Logarithme complexe. Étudier une suite en passant par sa série entière génératrice (nombre de partitions) et par la formule intégrale de Cauchy. Transformation d'Abel. Convergence subtile de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$. Continuité subtile en 0 d'une intégrale à paramètre en l'écrivant comme une somme de série de fonctions alternée.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PARTIE A : toutes les questions ;
— PARTIE B : toutes les questions sauf éventuellement la question 7 ;
— PARTIE C : questions 9 et 12, question 13.

2 Rapport officiel de l'épreuve

2.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet porte sur l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers, en ne tenant pas compte de l'ordre des termes.

C'est un problème d'analyse, avec quelques questions de dénombrement. Pratiquement toutes les notions et les outils développés en analyse pendant les deux années de classes préparatoires sont utilisés : séries, séries de fonctions, séries entières, intégrales à paramètre discret ou continu, interversion de symboles, convergence dominée, étude asymptotique.

Les questions sont de difficultés variées. Certaines sont très proches du cours, d'autres demandent une bonne maîtrise des théorèmes, d'autres enfin sont vraiment difficiles.

Le sujet est très long et [la partie D n'a] pour ainsi dire pas été [abordée]. Les trois premières, relativement indépendantes et traitant de thèmes divers, ont cependant permis aux candidats de montrer leurs qualités, et d'étalonner les copies de manière très satisfaisante.

La maîtrise des techniques et des résultats du cours est indispensable pour réussir les concours. Beaucoup de candidats l'ont heureusement compris.

2.2 Analyse détaillée des questions

— **Q 1. (MP)** Elle était très classique mais il fallait éviter de parler de logarithme népérien d'un nombre complexe. Par ailleurs, le développement en série entière de la fonction $x \in]-1,1[\mapsto \ln(1-x)$ peut être considéré comme un résultat du cours, il n'est pas utile de le redémontrer.

(PSI) On demande ici la convergence d'une série, qui est en fait une série entière. Divers arguments, corrects, ont été donnés : utilisation du lemme d'Abel afin de déterminer le rayon de convergence de la série entière, critère de d'Alembert pour les séries ou les séries entières (avec des modules et des limites), comparaison à une série géométrique... Pour la variable réelle, on reconnaît une série bien connue, dont on peut donner directement la somme.

— **Q 2. (MP)** L'emploi des séries entières était périlleux à cause des confusions entre la série en z et la série en t, et un raisonnement rigoureux supposait la détermination précise du rayon de convergence de la série entière en t. Les meilleurs résultats sur cette question ont été obtenus par ceux qui ont utilisé la dérivation d'une série de fonctions.

(PSI) Beaucoup de confusions chez les candidats. Peu d'entre eux reconnaissent une série entière dont le rayon est strictement supérieur à 1. Certains appliquent le théorème de régularité C^1 des séries de fonctions en confondant « inclus dans $[-1,1]$ » et « incluant $[-1,1]$ ». D'autres enfin dérivent terme à terme sans aucune justification.

On ne peut ici utiliser le logarithme principal. On attend l'argument classique : une fonction dérivable sur un intervalle et de dérivée nulle est constante.

— **Q 3. (MP)** Il s'agissait surtout d'éviter les inégalités et logarithmes de nombres complexes.

(PSI) Pour le 1er point, on retrouve l'expression donnée à la question 1. Pour le 2e, on attend deux arguments : z^n est dans le disque D et $-\ln(1-|z|^n)$ est équivalent à $|z|^n$ quand $n \to +\infty$.

— **Q 4. (PSI)** Peu de candidats ont traité correctement cette question, *a priori* facile. Le 1er point est souvent faux : la plupart des candidats justifient la non nullité de $P(z)$ par le fait que l'exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui est évidemment faux sur $\mathbb{C}$. Pour le 2e, on attend l'utilisation de sommes partielles. Enfin, pour le dernier, il faut préciser que les termes sont dans $[0,1[$.

— **Q 5. (MP)** Cette question sortait des sentiers battus, pourtant les performances ont été plutôt bonnes, mettant en évidence des capacités d'adaptation à une situation inhabituelle très intéressantes pour de futurs ingénieurs.

(PSI) C'est une question de dénombrement, pour laquelle des arguments concis mais précis sont attendus.

— **Q 6. (MP)** Cette question et la suivante étaient relativement difficiles, elles ont été traitées partiellement dans les meilleures copies et souvent pratiquement évitées dans les autres.

(PSI) La question est assez élémentaire, mais on a vu beaucoup de coefficients de la série entière dépendant de z (note de moi-même : vous apprécierez la cohérence des rapports de jury des deux filières).

— **Q. 8. (MP)** On retrouvait une technique classique, puisqu'il s'agissait d'inverser une intégrale de Riemann et une somme. La convergence normale a été en général bien justifiée, mais le calcul de l'intégrale a quelquefois manqué de précision.

— **Q 9. (PSI)** Question très élémentaire, souvent imparfaitement traitée. Rappelons que le caractère continu par morceaux nécessite l'existence de limites à gauche et à droite aux bornes. Pour la parité de $|q|$, il faut distinguer le cas des entiers.

Très peu de candidats ont le réflexe de tracer un ou deux graphes. Les correcteurs ont apprécié et valorisé cette initiative.

— **Q 10. (PSI)** On attend le caractère borné de q, ainsi qu'une étude du comportement de la fonction au voisinage de $+\infty$.

— **Q 11. (PSI)** Il est nécessaire ici de découper l'intégrale en morceaux, soit en rédigeant une récurrence, soit en utilisant une somme. Le calcul n'est bien mené que chez une petite moitié de candidats.

— **Q 12. (PSI)** On attend ici une majoration effective pour le premier point, un découpage et un passage à la limite utilisant la question 11 et la formule de Stirling pour la suite.

— **Q 13. (PSI)** On utilise ici une permutation série intégrale soit avec le théorème [d'intégration terme à terme], soit avec le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles. Un calcul uniquement formel était faiblement récompensé.

— **Q 14. (PSI)** Cette question est très difficile. Les correcteurs ont valorisé toutes les initiatives prises par les candidats.

— **Q 15. (PSI)** Question difficile demandant l'utilisation du théorème de continuité des intégrales à paramètre, avec un prolongement à la limite. Beaucoup de candidats ont compris qu'il fallait appliquer ce théorème et l'on appliqué assez correctement sur $\mathbb{R}_+^*$. La continuité en 0 est plus délicate.

— **Q 16. (PSI)** On cherche à appliquer le théorème des séries alternées.

— **Q 17. (PSI)** Question traitée par une poignée de candidats. On utilise la convergence uniforme et la continuité pour passer à la limite dans l'intégrale.

— **Q 18. (PSI)** Question peu abordée, sans difficulté particulière.

— **Q 19. (PSI)** Question de synthèse utilisant les résultats précédents et nécessitant l'utilisation précise de développements asymptotiques.

— **Q. 20–21. (MP)** Questions très techniques. Une proportion non négligeable de candidats a pris la décision de les éviter. Pourtant la question 20 était abordable. La disjonction à la fin de la question 21 a laissé perplexe la quasi-totalité des candidats.

(MP) En conclusion, ce problème, en dépit de sa longueur, a bien joué son rôle de classement, aussi bien par les connaissances et la maîtrise du programme (on balaye presque complètement les parties d'analyse et de probabilités) que par la gestion stratégique du temps et de l'énoncé. Le conseil principal que l'on peut donner aux futurs candidats face à un sujet très long est d'éviter de survoler le problème, et de se concentrer sur des parties précises. On voyait des notes supérieures à la moyenne de l'épreuve avec 10 questions abordées et une note proche de 0 avec 20 questions abordées.

3 Corrigé

Partie A. Fonctions L et P.

1. Multiplier par n le terme général d'une série entière ne change pas le rayon de convergence. On en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} z^n$, dont on sait qu'elle converge si et seulement si $|z| < 1$ (en tant que série géométrique de raison z). Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ également ; en particulier, elle converge pour tout $z \in D$. On sait que si $z \in]-1,1[$, on a de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z). \qquad (*)$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Revoir, si besoin, pourquoi le calcul de cette somme (vu en cours) nécessite de se placer sur $]-1,1[$, alors qu'il faut davantage d'efforts pour la calculer sur D.

2. On note que Φ est la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(tz)^n}{n}$ (selon la variable t, à $z\in D$ fixé). Or d'après la question précédente, elle converge pour tout $t\in\mathbb{R}$ tel que $|tz|<1$, c'est-à-dire pour tout $t\in\mathbb{R}$ tel que : $|t|<\frac{1}{|z|}$, où l'on pose $\frac{1}{|z|}=+\infty$ si $z=0$. On en déduit que cette série entière est de rayon de convergence au moins $\frac{1}{|z|}$, et sa somme Φ est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $\left]-\frac{1}{|z|},\frac{1}{|z|}\right[$. Comme $[-1,1]\subseteq\left]-\frac{1}{|z|},\frac{1}{|z|}\right[$ (en effet, $|z|<1$ implique : $1<\frac{1}{|z|}$), on en déduit en particulier que Φ est dérivable sur $[-1,1]$. On a de plus :

$$\forall t\in[-1,1],\quad \Phi'(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nt^{n-1}z^n}{n}=z\sum_{n=1}^{+\infty}(tz)^{n-1}=\frac{z}{1-tz}. \tag{$\dagger$}$$

L'application Ψ est alors dérivable en tant que produit de deux fonctions dérivables, et on a :

$$\forall t\in[0,1],\quad \Psi'(t)=-ze^{\Phi(t)}+(1-tz)\Phi'(t)e^{\Phi(t)}\overset{(\dagger)}{=}\left(-z+(1-tz)\times\frac{z}{1-tz}\right)e^{\Phi(t)}=0.$$

Ainsi Ψ est de dérivée nulle sur l'intervalle $[0,1]$, donc Ψ est une application constante. On détermine la valeur de cette constante grâce à une évaluation en $t=0$:

$$\Psi(0)=(1-0\times z)e^{L(0\times z)}=e^{L(0)}\overset{(*)}{=}e^0=1.$$

Ainsi : $\forall t\in[0,1]$, $\Psi(t)=1$. En particulier, pour $t=1$, on a $\Psi(1)=1$, c'est-à-dire, en remplaçant $\Psi(1)$ par son expression explicite :

$$(1-z)\exp(L(z))=1,$$

et donc : $\exp(L(z))=(1-z)^{-1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Il devrait y avoir *a priori* une subtilité : Φ est dérivable sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, tandis que l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$: la composition semble poser problème ! Pourtant j'affirme comme une évidence que $t\mapsto e^{\Phi(t)}$ est dérivable : pourquoi ?

— Ici l'énoncé nous donnait une indication, mais songez-y de vous-mêmes : on ne sait pas dériver ailleurs que sur un intervalle de $\mathbb{R}$, mais on contourne la difficulté en composant une fonction $f:A\to F$ que l'on veut « dériver » (avec A partie d'un espace vectoriel normé E) avec un chemin $\gamma:I\to A$ liant deux points de A, de sorte que $f\circ\gamma:I\to F$ soit dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Cela apparut dans l'exercice du DM n° 8 et on utilisera encore cette stratégie aux chapitres X et XIII.

3. Soit $z\in D$. on a $|z|\in[0,1[$, et donc d'après la question 1 :

$$|L(z)|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n}\overset{(*)}{=}-\ln(1-|z|),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Or, si $z\in D$, alors $z^n\in D$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad 0\leqslant|L(z^n)|\leqslant-\ln(1-|z^n|)=-\ln(1-|z|^n). \tag{$\ddagger$}$$

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}-\ln(1-|z|^n)$ converge. On a : $|z|^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, car $|z|<1$, et donc :

$$-\ln(1-|z|^n)\underset{n\to+\infty}{\sim}|z|^n>0.$$

Or la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}|z|^n$ est de raison $|z|<1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}-\ln(1-|z|^n)$ converge également.

Toujours par comparaison, grâce à la majoration ($\ddagger$), on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}L(z^n)$ converge absolument, donc converge, et ce pour tout $z\in D$: d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Cette majoration d'une fonction *via* son développement en série entière peut donner très facilement des inégalités inattendues. Par exemple, trouvez une majoration de $\exp(z)$ en fonction du cosinus hyperbolique par cette méthode, et jugez de sa qualité (cela dépend de la taille de z).

4. L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, donc : $P(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right) \neq 0$. De plus, pour tout entier $N \geqslant 1$ on a, d'après la question 2 :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) = \prod_{n=1}^{N} \exp\left(L(z^n)\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}.$$

Quand $N \to +\infty$, le membre de gauche tend vers $P(z)$, par définition de P et continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$. Par conséquent :

$$P(z) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}.$$

Toujours d'après l'égalité ci-dessus, pour tout $t > 0$ on a $e^{-t} \in]0,1[$, et donc :

$$\forall t > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \exp\left(\sum_{n=1}^{N} L\left(e^{-nt}\right)\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}.$$

Chaque terme du produit ci-dessus est strictement positif, du fait que $e^{-nt} < 1$. On peut donc en considérer le logarithme :

$$\ln\left(\exp\left(\sum_{n=1}^{N} L\left(e^{-nt}\right)\right)\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}\right) = -\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

On a : $\lim_{N\to+\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} L\left(e^{-nt}\right)\right) = P\left(e^{-t}\right) > 0$. Par continuité du logarithme, le membre de gauche tend donc vers $\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right)$ quand $N \to +\infty$. On en déduit que le membre de droite de l'égalité ci-dessus a une limite finie quand $N \to +\infty$, et :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \lim_{N\to+\infty} -\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1-e^{-nt}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right),$$

d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi ces arguments de continuité çà et là ?
> — Si l'on se souvient de ce qu'est L, pourquoi la première formule à démontrer était-elle facile à conjecturer ?
> — Pouvait-on déduire la non nullité de $P(z)$ à partir de son expression comme produit « infini » ?

Partie B. Développement de P en série entière.

5. Soit $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Tout d'abord, $P_{n,N}$ est non vide, puisque $(n,0,\dots,0) \in P_{n,N}$. Justifions que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0,n]\!]^N$: soit $(a_1,\dots,a_N) \in P_{n,N}$. Alors :

$$\forall \ell \in [\![1,N]\!], \quad n = \sum_{k=1}^{n} k a_k = \ell a_\ell + \sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{N} \underbrace{k a_k}_{\geqslant 0} \geqslant \ell a_\ell \geqslant a_\ell.$$

On a montré que $a_\ell \leqslant n$ pour tout $\ell \in [\![1,N]\!]$, et par hypothèse on a déjà $a_\ell \geqslant 0$, donc : $(a_1,\ldots,a_N) \in [\![0,n]\!]^N$. Ceci vaut pour tout $(a_1,\ldots,a_N) \in P_{n,N}$, d'où l'inclusion demandée.

Ceci montre que l'ensemble $P_{n,N}$ est fini, et donc que son cardinal $p_{n,N} \in \mathbb{N}$ est bien défini. On a $p_{n,N} \geqslant 1$ pour tout $(n,N) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ car $P_{n,N} \neq \emptyset$.

Montrons que la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est croissante ; pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une injection de $P_{n,N}$ dans $P_{n,N+1}$ pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (en effet, une application injective ne peut être à valeurs que dans un ensemble plus grand que celui de départ). Il suffit de prendre l'application :

$$\Phi_{n,N} : \left\{ \begin{array}{rcl} P_{n,N} & \longrightarrow & P_{n,N+1} \\ (a_1,\ldots,a_N) & \longmapsto & (a_1,\ldots,a_N,0), \end{array} \right.$$

clairement à valeurs dans $P_{n,N+1}$ (si $\sum\limits_{k=1}^{N} ka_k = n$, alors $(N+1)\times 0 + \sum\limits_{k=1}^{N} ka_k = n$ également) et injective : si $(a_1,\ldots,a_N) \in P_{n,N}$ et $(b_1,\ldots,b_N) \in P_{n,N}$ vérifient : $\Phi_{n,N}((a_1,\ldots,a_N)) = \Phi_{n,N}((b_1,\ldots,b_N))$, alors l'identification coordonnée par coordonnée donne : $(a_1,\ldots,a_N) = (b_1,\ldots,b_N)$, d'où l'injectivité.

Puisqu'il existe une application injective de $P_{n,N}$ dans $P_{n,N+1}$, on a : $\mathrm{card}(P_{n,N}) \leqslant \mathrm{card}(P_{n,N+1})$. C'est-à-dire : $p_{n,N} \leqslant p_{n,N+1}$. Ceci vaut pour tout $N \geqslant 1$, donc la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est croissante.

Il reste à justifier qu'elle est constante à partir du rang $n_0 = \max(n,1)$: si $n = 0$, alors on a clairement $p_{0,N} = 1$ pour tout $N \geqslant 1 = \max(n,1)$, vu que l'égalité $0 = \sum\limits_{k=1}^{N} ka_k$ impose : $\forall k \in [\![1,N]\!]$, $a_k = 0$ (une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul), de sorte que le N-uplet $(0,\ldots,0)$ soit le seul à convenir pour tout $N \geqslant 1$. Supposons à présent $n \geqslant 1$. Montrons :

$$\forall N \geqslant \max(n,1), \quad p_{n,N} = p_{n,N+1}.$$

Pour cela, il suffit de démontrer que l'application $\Phi_{n,N}$ ci-dessus, en plus d'être injective, est surjective : cela assure que c'est une bijection, et une bijection conserve les cardinaux. Soit, donc, $(b_1,\ldots,b_N,b_{N+1}) \in P_{n,N+1}$, et construisons un antécédent par $\Phi_{n,N}$ de cet élément. Notons d'abord que le dernier coefficient b_{N+1} est nul. On a en effet, comme $(b_1,\ldots,b_N,b_{N+1}) \in P_{n,N+1}$:

$$n = \sum_{k=1}^{N+1} kb_k = (N+1)b_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} kb_k.$$

Or $N+1 \geqslant \max(n,1)+1 \geqslant n+1 > n$. Par conséquent, si $b_{N+1} \neq 0$, alors $b_{N+1} \geqslant 1$ (c'est un entier naturel), et donc on aurait :

$$n = (N+1)b_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{kb_k}_{\geqslant 0} \geqslant (N+1)b_{N+1} \geqslant N+1 > n.$$

C'est absurde : on ne peut pas avoir $n > n$. Par l'absurde, on a montré : $b_{N+1} = 0$, et par ailleurs l'égalité ci-dessus devient : $n = \sum\limits_{k=1}^{N} kb_k$, ce qui démontre qu'on a : $(b_1,\ldots,b_N) \in P_{n,N}$. En résumé, on a montré :

$$(b_1,\ldots,b_N,b_{N+1}) = (b_1,\ldots,b_N,0) = \Phi_{n,N}((b_1,\ldots,b_N))$$

avec $(b_1,\ldots,b_N) \in P_{n,N}$, donc tout élément de $P_{n,N+1}$ admet un antécédent par $\Phi_{n,N}$, ce qui démontre sa surjectivité (si $N \geqslant \max(n,1)$).

Étant une application surjective et injective, c'est une bijection, et une bijection est nécessairement entre deux ensembles de même cardinal. On en déduit : $\forall N \geqslant \max(n,1)$, $p_{n,N} = p_{n,N+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Des arguments combinatoires précis mais plus courts et informels seraient acceptés, si je me fie au rapport du jury.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Se représenter concrètement le sens de $p_{n,N}$, afin de rendre plus digeste ma démonstration (comprendre, surtout, pourquoi je fais ce que je fais).

6. Soient $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $z \in D$. On a : $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $|z^k| < 1$, et donc :

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \prod_{k=1}^{N} \sum_{a_k=0}^{+\infty} \left(z^k\right)^{a_k} = \prod_{k=1}^{N} \sum_{a_k=0}^{+\infty} z^{ka_k}.$$

Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, la série $\sum_{k\geqslant 0} z^{ka_k}$ converge absolument et donc la famille $\left(z^{ka_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable. Un produit fini de familles sommables reste sommable, donc :

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N} \prod_{k=1}^{N} z^{ka_k} = \sum_{(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{N}^N} z^{\sum\limits_{k=1}^{N} ka_k}.$$

En utilisant le théorème de sommation par paquets (possible par sommabilité, qu'on vient de justifier) avec le recouvrement : $\mathbb{N}^N = \bigsqcup\limits_{n=0}^{+\infty} P_{n,N}$, on a :

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}} z^{\sum\limits_{k=1}^{N} ka_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(a_1,\dots,a_N)\in P_{n,N}} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{card}(P_{n,N}) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n,$$

d'où le résultat. On a démontré en passant que la série $\sum_{n\geqslant 0} p_{n,N} z^n$ converge pour tout $z \in D$ et tout $N \in \mathbb{N}$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Se convaincre que le recouvrement proposé en est effectivement un.
> — On aurait plutôt pu être tenté de faire un produit de Cauchy, *a priori* (on a un produit de séries entières). Comprendre pourquoi j'ai voulu m'en dispenser ici.
> — Retenir le choix des paquets, souvent pertinent lorsque notre produit fait apparaître un terme général de la forme $\bigstar z^{\clubsuit}$: pour tout n on regroupe tous les termes de la somme tels que $\clubsuit = n$. Y penser plus particulièrement lorsqu'on considère la série génératrice du cardinal de l'ensemble des solutions d'une équation. C'est aussi une stratégie qui apparaît lorsqu'on obtient le produit eulérien de la fonction dzêta de Riemann.

7. On nous demande d'étudier la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n)_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$. Comme la suite $(p_{n,N})_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\forall (n,N) \in \mathbb{N}^2$, $|p_{n,N+1} - p_{n,N}| = p_{n,N+1} - p_{n,N}$, et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{(n,N)\in\mathbb{N}^2} |(p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n| &= \sum_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} (p_{n,N+1} - p_{n,N})|z|^n && \text{(Fubini positif)}\\
&= \sum_{N=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N+1}|z|^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N}|z|^n \right)\\
&= \frac{1}{1-|z|} + \sum_{N=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k} - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-|z|^k} \right) && \text{(q. 6)}\\
&= \frac{1}{1-|z|} + \lim_{N\to+\infty} \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k} - \frac{1}{1-|z|} && \text{(télescopage)}\\
&= P(|z|) < +\infty,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N})z^n)_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Cela nous permet d'utiliser le théorème de Fubini :

$$\sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{N=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n.$$

Le membre de gauche donne $P(z)$ par des calculs en tous points analogues à ceux ci-dessus (il suffit de remplacer $|z|$ par z). Le membre de droite vaut, par le lien suite-série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{N=0}^{+\infty}(p_{n,N+1}-p_{n,N})z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(p_n-p_{n,0}\right)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}p_nz^n,$$

donc le théorème de Fubini donne : $P(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_nz^n$, ce qu'il fallait démontrer. Ceci vaut pour tout $z\in D$, donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}p_nz^n$ vérifie : $R\geqslant 1$.

Étudions la nature de la série pour $z=1$: on a $p_n\geqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après la question 5 (ceci découle du fait que $P_{n,N}\neq\emptyset$ pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$), de sorte que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne puisse pas converger vers 0, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}p_n$ diverge grossièrement. On en déduit : $R\leqslant 1$.

Puisque $R\geqslant 1$ et $R\leqslant 1$, on conclut : $R=1$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Pourquoi ai-je isolé le terme pour $N=0$ dans mon calcul ? Et pourquoi donne-t-il $\frac{1}{1-|z|}$?
- Ne pouvait-on pas obtenir le résultat en considérant une suite exhaustive de parties et en passant à la limite ? C'est le passage à la limite quand $N\to+\infty$ qui peut y faire penser. Remarquer, par ailleurs, que ce qui est demandé revient *presque* à procéder ainsi (pourquoi ? revoir si besoin la démonstration de ce résultat hors programme sur les suites exhaustives ; et pourquoi ce *presque* ?).

8. Soit $t>0$, et soit $\theta\in[-\pi,\pi]$. On a $|e^{-t+i\theta}|=e^{-t}<1$, donc d'après la question précédente :

$$e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right)=e^{-in\theta}\sum_{k=0}^{+\infty}p_k\left(e^{-t+i\theta}\right)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}p_ke^{-tk}e^{i\theta(k-n)}.$$

Nous allons en déduire :

$$2\pi p_ne^{-nt}=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un segment, dont nous vérifions les hypothèses. Posons :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall\theta\in[-\pi,\pi],\quad f_k(\theta)=p_ke^{-tk}e^{i\theta(k-n)}.$$

Alors :
- pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'application f_k est clairement continue (par morceaux) sur $[-\pi,\pi]$, par composition et continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$;
- pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $\theta\in[-\pi,\pi]$, on a : $|f_k(\theta)|=|p_k|e^{-tk}=p_ke^{-tk}$; on en déduit :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \|f_k\|_\infty=p_ke^{-tk},$$

or $|e^{-t}|<1$ car $t>0$, et la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 0}p_kz^k$ est de rayon de convergence 1, donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\|f_k\|_\infty=\sum\limits_{k\geqslant 0}p_k(e^{-t})^k$ converge ; on a donc démontré que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0}f_k$ converge normalement, donc uniformément, sur le segment $[-\pi,\pi]$, et de plus sa somme est continue (par morceaux) sur $[-\pi,\pi]$, puisqu'il s'agit d'une limite uniforme d'une série de fonctions continues.

D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, d'une part la série $\sum_{k\geqslant 0}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\mathrm{d}\theta$ converge, et d'autre part :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\theta)\mathrm{d}\theta=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Or, d'après les calculs effectués au début de la question :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} p_k e^{-tk}e^{i\theta(k-n)}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right)\mathrm{d}\theta,$$

et d'autre part :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\mathrm{d}\theta=p_k e^{-tk}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(k-n)}\mathrm{d}\theta=\begin{cases} p_k e^{-tk}\left[\frac{e^{i\theta(k-n)}}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0 & \text{si } k\neq n,\\ p_n e^{-tn}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi p_n e^{-tn} & \text{si } k=n,\end{cases}$$

étant donné que : $e^{i\pi(k-n)}-e^{-i\pi(k-n)}=(-1)^{k-n}-(-1)^{k-n}=0$ (pour le cas $k\neq n$). Donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi} f_n(\theta)\mathrm{d}\theta+\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{+\infty}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f_k(\theta)\mathrm{d}\theta}_{=0}=2\pi p_n e^{-tn}.$$

En conclusion, l'intégration terme à terme ci-dessus s'écrit plus simplement ainsi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right)\mathrm{d}\theta=2\pi p_n e^{-tn}.$$

Cela donne le résultat voulu, en isolant p_n :

$$p_n=\frac{e^{tn}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P\left(e^{-t+i\theta}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{e^{tn}P\left(e^{-t}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-t+i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta. \tag{$*$}$$

Remarque. On a démontré la formule intégrale de Cauchy dans un cas particulier.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Cette étape est classique et doit pouvoir être faite les yeux fermés. Identifier les principales étapes de ce raisonnement. Reconnaître ce qu'on a fait en exercice.

Partie C. Développement asymptotique en variable réelle.

9. La fonction q est somme de fonctions continues par morceaux, donc elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction partie entière vérifie : $\forall x\in\mathbb{R},\ \lfloor x+1\rfloor=\lfloor x\rfloor+1$, donc :

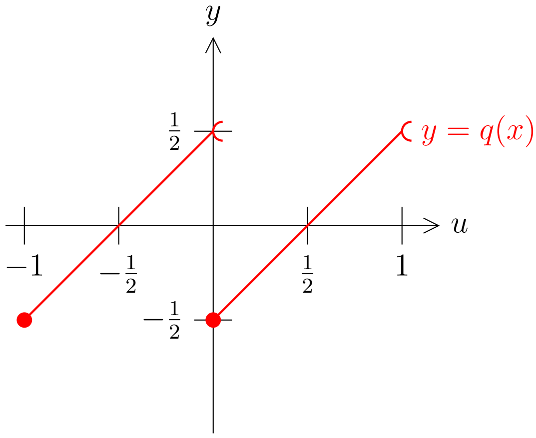
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad q(x+1)=(x+1)-\lfloor x+1\rfloor-\frac{1}{2}=x+1-\lfloor x\rfloor-1-\frac{1}{2}=x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}=q(x),$$

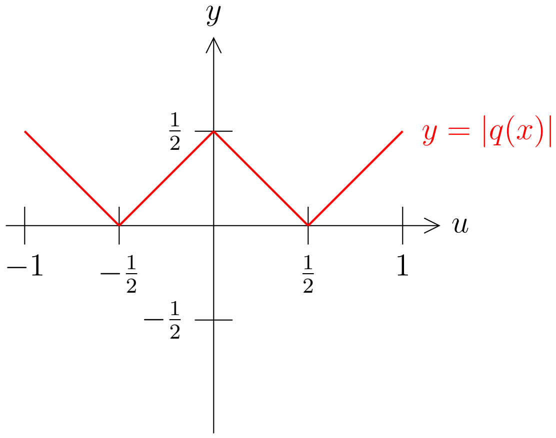
donc q est 1-périodique. Il reste à montrer que la fonction $|q|$ est paire. Comme q est 1-périodique, il suffit de démontrer que $|q(x)|=|q(-x)|$ pour tout $x\in[0,1[$. Pour $x=0$, il est évident que l'égalité est vraie, et on ne considère donc que $x\in]0,1[$.
Or, pour un tel x, on a plus simplement : $q(x)=x-\frac{1}{2}$, et : $q(-x)=-x-(-1)-\frac{1}{2}=-x+\frac{1}{2}$ (car : $-1<-x<0$). Afin de simplifier $|q(x)|$ et $|q(-x)|$, on traite deux cas :

— si $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, alors $q(x)=x-\frac{1}{2}\leqslant 0$ et $q(-x)=-x+\frac{1}{2}\geqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)|=-q(x)=-x+\frac{1}{2}=q(-x)=|q(-x)|$;

— si $x\in\left[\frac{1}{2},1\right[$, alors $q(x)=x-\frac{1}{2}\geqslant 0$ et $q(-x)=-x+\frac{1}{2}\leqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)|=q(x)=x-\frac{1}{2}=-q(-x)=|q(-x)|$.

Dans tous les cas, on a $|q(x)| = |q(-x)|$, pour tout $x \in]0,1[$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après la réduction expliquée ci-dessus. Ainsi $|q|$ est bien une fonction paire, ce qu'il fallait démontrer.





10. Soit $t > 0$. L'application $u \mapsto \left|\dfrac{q(u)}{e^{tu}-1}\right|$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (la continuité de $|q|$ serait en principe à justifier, bien qu'on la voie sur le graphe ci-dessus, en étudiant la limite en 0 par valeurs supérieures et inférieures ; la périodicité assure alors la continuité en tous les autres points éventuellement problématiques). Étudions l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.
On montre facilement qu'on a $|q(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ par 1-périodicité. Par conséquent, pour tout $u \geqslant 1$ on a :
$$0 \leqslant \left|u^2 \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{u^2}{e^{tu}-1} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
puisque : $\dfrac{u^2}{e^{tu}-1} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^2 e^{-tu} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (théorème des croissances comparées). On en déduit :
$$\left|\frac{q(u)}{e^{tu}-1}\right| \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ converge absolument, donc converge : d'où le résultat, pour tout $t > 0$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Vérifier la continuité aux points problématiques ainsi que la majoration de $|q|$ par $\frac{1}{2}$.
- La démonstration que l'intégrale converge absolument doit se faire les yeux fermés. Réétudier quelques natures d'intégrales généralisées (chapitre I) si cela vous a posé problème.

11. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a, par la relation de Chasles, et après le changement de variable affine $t = u - k$:
$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{q(t+k)}{t+k}\mathrm{d}t.$$
Comme q est 1-périodique, on a $q(t+k) = q(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, donc :
$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{q(t)}{t+k}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{t+k}\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 \left(1 - \frac{k+\frac{1}{2}}{t+k}\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(k+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+k}\right).\end{aligned}$$

Or : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+k} = [\ln(t+k)]_0^1 = \ln(k+1) - \ln(k)$. Il apparaît presque un télescopage : attention à ne pas oublier le terme $k + \frac{1}{2}$ en facteur. Utilisons cette observation à profit, et faisons apparaître un « vrai » télescopage :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u &= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) \\
&= (n-1) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) \\
&= (n-1) + \ln((n-1)!) - \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1) - \left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k)\right].
\end{aligned}$$

Cette dernière somme étant télescopique, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u &= (n-1) + \ln((n-1)!) - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) \\
&= (n-1) + \ln((n-1)! \times n) - \ln(n) - \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n) \\
&= (n-1) + \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. La seconde égalité de l'énoncé s'obtient en écrivant : $n = \ln(e^n)$, et : $\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(n^n\sqrt{n}\right)$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Se convaincre que l'idée de la relation de Chasles n'est pas absconse, au vu de l'intégrale à étudier.

— Qu'est-ce qui, exactement, dans l'identité à démontrer, pouvait me motiver à vouloir faire apparaître $\sum_{k=1} \ln(k)$? (Ce n'est pas la motivation que j'ai eue ci-dessus, disons que cela pouvait être une autre piste pour avoir le bon raisonnement.)

— Reconnaître une transformation d'Abel implicite.

12. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a :

$$0 \leqslant \left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{|q(u)|}{u}\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{2}\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right).$$

Or on a : $x - 1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$, donc : $1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1$. Et donc, par continuité du logarithme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\right) = \ln(1) = 0$. L'encadrement ci-dessus donne donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = 0.$$

Voyons comment en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge. D'abord, notons que la question précédente permet de démontrer que la suite $\displaystyle\left(\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 2}$ converge, puisque par la formule de Stirling :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

et donc, par continuité du logarithme :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

Alors, pour tout réel x au voisinage de $+\infty$, on se ramène au cas d'un paramètre entier avec la relation de Chasles :

$$\int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_1^{\lfloor x\rfloor} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u + \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Comme $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini quand $x \to +\infty$, ce qui précède montre que, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^{\lfloor x\rfloor} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$. La seconde intégrale a une limite nulle quand $x \to +\infty$ d'après la résolution en début de question. Alors, en tant que somme de quantités ayant une limite finie, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + 0.$$

Ceci démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge, et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— J'affirme que la stratégie de ces deux dernières questions, pour montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ (je ne parle pas de son calcul exact), aurait pu être trouvée sans indication de l'énoncé pour quiconque ayant bien assimilé les enseignements de *Méthodes*, chapitre I. Pourquoi ? Le relire à la section *Natures d'intégrales obtenues par comparaison à des séries*, si besoin.

— Toujours grâce à *Méthodes*, proposer une autre manière d'obtenir la convergence de cette intégrale, quitte à ne pas avoir sa valeur exacte.

— À la lumière de ces deux questions, j'affirme que l'idée de passer par une transformation d'Abel (voir commentaire de la question précédente) est naturelle pour montrer la convergence de cette intégrale. Pourquoi ? Pour répondre à cette question, il faut se demander ce qui complique la vérification directe que l'intégrale converge, et ce qu'on fait bien souvent pour y remédier dans ces cas-là ; enfin, on se demande pourquoi ce « remède classique » n'est pas ce qu'on a utilisé ici.

— Aurait-on pu obtenir la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ grâce à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ en passant à la limite quand $t \to 0$?

13. Pour tout $u > 0$ on a $e^{-u} \in]0,1[$, et donc, comme on l'a rappelé à la question 1 :

$$-\ln\left(1 - e^{-u}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nu}}{n}.$$

Nous allons en déduire l'égalité de l'énoncé *via* une intégration terme à terme, que nous allons justifier en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall u \in]0,+\infty[,\quad f_n(u) = \frac{e^{-nu}}{n}.$$

Alors :

— pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'application f_n est positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ (c'est une fonction intégrable de référence) ;

— la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $u \mapsto -\ln(1-e^{-u})$ d'après l'égalité rappelée ci-dessus.

Toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme positif étant vérifiées, on a :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u.$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nu}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nu}}{-n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2},$$

donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (d'après le résultat rappelé en début d'énoncé), tandis que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} -\ln(1-e^{-u})\mathrm{d}u$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} -\ln\left(1-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6},$$

d'où le résultat demandé après multiplication par -1.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Se convaincre qu'il était parfaitement naturel de penser à une intégration terme à terme ici. Il y a deux façons d'y être amené : 1° en connaissant le résultat sur lequel on est supposé tomber, 2° sans même connaître ce résultat, en retenant ce que j'ai plusieurs fois mis en avant sur l'intérêt des développements en série entière.

14. Suivant l'indication de l'énoncé, nous allons d'abord démontrer que l'application $g : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{e^{-x}x - (1-e^{-x})}{x^2} = \frac{(1+x)e^{-x}-1}{x^2}.$$

Or par convexité de l'exponentielle, son graphe est au-dessus de sa tangente en 0, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x, \tag{$**$}$$

puis : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 \geqslant (1+x)e^{-x}$, ce dont on déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) \leqslant 0$. Ainsi g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ln \circ g$ également (on a bien $g > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, étant donné que $e^{-x} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc la composition avec le logarithme est bien définie). On en déduit :

$$\forall t \in]0,1], \ \forall u \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \ln\left(g(tu)\right) \leqslant \lim_0 \ln \circ g.$$

La limite du membre de droite existe bien (et est finie), puisque pour tout x au voisinage de 0 :

$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1,$$

donc : $\lim\limits_0 \ln \circ g = \ln(1) = 0$. Ceci démontre en passant que la fonction $\ln \circ g$ se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, et donc qu'elle est intégrable sur $]0,1]$. Intégrons l'inégalité ci-dessus sur $]0,1]$, pour obtenir :

$$\forall t \in]0,1], \quad \int_0^1 \ln(g(t))\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 0\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u \leqslant 0.$$

Comme on l'a vu ci-dessus, on a : $\lim\limits_{t\to 0}\ln(g(t))=0$. Par conséquent, par le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre qu'on a : $\lim\limits_{t\to 0^+}\displaystyle\int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u=0$. On a donc démontré :

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u=0.$$

Or :

$$\forall t>0,\quad \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u=\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u+\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u,$$

donc : $\lim\limits_{t\to 0^+}\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u=\int_0^1\ln(u)\mathrm{d}u$, et il est très classique de démontrer, grâce à une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u=\left[u\ln(u)-u\right]_0^1=-1$. En conclusion :

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u=-1.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Je n'ai pas utilisé le théorème de convergence dominée. Pourquoi ? L'appliquer. Peut-on généraliser mon raisonnement de sorte à identifier une situation où l'on peut toujours obtenir la limite par un bête argument de monotonie et le théorème des gendarmes ?

— Pourquoi n'a-t-on pas calculé la limite de $\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u$ directement ? Quel intérêt à d'abord passer par l'intégrale $\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u$?

15. Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On note que u_k est une intégrale à paramètre. Montrons donc sa continuité sur $\mathbb{R}_+$ en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégrale. Posons :

$$\forall (u,t)\in\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]\times\mathbb{R}_+,\quad v_k(u,t)=\begin{cases}\dfrac{tq(u)}{e^{tu}-1} & \text{si } t>0,\\[2ex] \dfrac{q(u)}{u} & \text{si } t=0.\end{cases}$$

Alors :

— pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, l'application $u\mapsto v_k(u,t)$ est continue par morceaux sur $\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]$ (en fait, comme on le voit d'après l'étude de la question 9, la fonction q est continue sur $\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]$ quitte à éventuellement enlever une extrémité de l'intervalle ; l'extrémité à enlever dépendant de la parité de k ; il suffit alors de reconnaître en $u\mapsto v_k(u,t)$ un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) ;

— pour tout $u\in\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]$, la continuité de l'application $t\mapsto v_k(u,t)$ est évidente sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et on vérifie qu'elle est continue en 0 également par un calcul de limite :

$$\frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{tq(u)}{tu}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{q(u)}{u}=v_k(u,0)\,;$$

donc $t\mapsto v_k(u,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout $(u,t)\in\left[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}\right]\times\mathbb{R}_+$, on a :

$$|v_k(u,t)|\leqslant\frac{|q(u)|}{u}\,;\quad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

en effet, pour $t = 0$ c'est évident, et pour $t > 0$ on utilise $(**)$ (question précédente) pour obtenir :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^{tu}-1}{tu} \geqslant 1,$$

et donc :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbb{R}_+^*, \quad |v_k(u,t)| = \frac{|q(u)|}{u} \times \frac{tu}{e^{tu}-1} \leqslant \frac{|q(u)|}{u}.$$

L'application $\varphi : u \mapsto \dfrac{|q(u)|}{u}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ car $k > 0$, donc elle y est intégrable. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée.
On en déduit, par le théorème de continuité sous le signe intégrale, que l'application $u_k : t \mapsto \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} v_k(u,t)\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$: d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— D'habitude, j'expédie la rédaction concernant la régularité de l'intégrande par rapport à chaque variable (lorsqu'on applique un théorème sur les intégrales à paramètres). Pourquoi ne l'ai-je pas fait ici ?

— Pourquoi cette idée d'utiliser la minoration $e^x \geqslant 1 + x$ pour obtenir l'hypothèse de domination ? Si cela vous paraît complètement *ad hoc*, relire les conseils de *Méthodes* (chapitre I, *Comment vérifier l'hypothèse de domination ?*).

16. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme $\dfrac{t}{e^{tu}-1} > 0$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, le signe de l'intégrande de $u_k(t)$ ne dépend que du signe de q. Or l'expression de la fonction q montre que :

$$\forall x \in [0,1[\,, \quad \begin{cases} q(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ q(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[. \end{cases}$$

Par 1-périodicité de q, on a donc :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = \begin{cases} -|q(x)| \leqslant 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ |q(x)| \geqslant 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

J'exclus les bornes pour éviter les distinctions de cas fastidieuses, et inutiles (car l'intégrale ignore les valeurs en les points isolés : il ne coûte donc rien d'étudier son signe en excluant les extrémités de l'intervalle d'intégration).
On en déduit d'une part :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = (-1)^{k+1}|q(x)|,$$

et d'autre part que, par croissance de l'intégrale : $u_k(t) \leqslant 0$ si k est pair, et $u_k(t) \geqslant 0$ si k est impair (on a en effet établi plus haut que le signe de l'intégrande est dicté par le signe de q). On a donc aussi, pour tenir compte de cette distinction de cas selon la parité de k :

$$u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|.$$

La première égalité demandée est alors immédiate :

$$|u_k(t)| = (-1)^{k+1}u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t(-1)^{k+1}q(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u.$$

Tout ce qui précède démontre que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée. Montrons qu'elle vérifie le critère spécial des séries alternées :

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_k(t)| - |u_{k+1}(t)| &= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{(k+1)/2}^{(k+2)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(k+1-v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (v = k+1-u) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (|q| \text{ 1-pér. et paire}) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \underbrace{t|q(u)|}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{e^{tu}-1} - \frac{1}{e^{t(k+1-u)}-1}\right)}_{\geqslant 0} \mathrm{d}u \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

le signe du terme en facteur de $t|q(u)|$ découlant du fait que l'application $u \mapsto \dfrac{1}{e^{tu}-1}$ soit clairement décroissante (on a $u \leqslant k+1-u$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$) ; ceci montre que la suite $(|u_k(t)|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante ;

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant |u_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\mathrm{d}u}{e^{tu}-1} \overset{(**)}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(1)}{2} = 0,$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k(t)| = 0$.

Ainsi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée, et la valeur absolue de son terme général décroît en convergeant vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ converge (ce qu'en fait, on pouvait déjà déduire de la question 10), et son reste est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, en prenant le logarithme dans $(**)$, on a pour tout entier $n \geqslant 1$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n},$$

d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
>
> — Qu'ai-je voulu éviter comme distinction de cas fastidieuse en excluant les bornes $\frac{k}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$, en début de résolution ?
>
> — Comprendre pourquoi j'ai fait le changement de variable $v = k+1-u$ dans le calcul de $|u_k(t)| - |u_{k+1}(t)|$. Si on ne le fait pas, qu'est-ce qui nous ennuie pour avoir la minoration voulue ? Et surtout, quel est son sens « concret » ? (Je n'y ai pas songé par des motifs purement abstraits et calculatoires !)

17. De la question précédente, il résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left\|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui démontre que le reste de la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, et donc la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. En tant que limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ (question 15), la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La continuité sur $\mathbb{R}_+$ implique en particulier que, quand $t \to 0^+$, on a :

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0).$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u,$$

et, par le même argument :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0) = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Le calcul de limite ci-dessus se réécrit donc ainsi :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u \overset{(q.12)}{=} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1,$$

d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— On note une situation rare où l'on démontre la continuité d'une intégrale à paramètre en un point (ici 0) non pas en utilisant les théorèmes du cours, ni en intégrant par parties pour se ramener à une intégrale plus avantageuse, mais en l'écrivant comme une somme de série de fonctions, et en montrant plutôt la continuité de cette somme. Étonnant ! Voyez-vous pour quel type d'intégrales à paramètres vous pourriez avoir la même idée ? Pour éventuellement vous mettre sur la voie : montrer ainsi que la transformée de Laplace du sinus cardinal, à savoir $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t$, est continue en 0, et comparer avec la méthode que nous avions utilisée en travaux dirigés.

— Essayer de montrer la continuité en 0 de cette intégrale à paramètre *via* l'approche plus classique d'une intégration par parties. Comparer avec la méthode de ce sujet.

18. Soit $t > 0$. En reprenant les arguments de la question 10, il est clair que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$, $\int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u \rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ convergent. Écrivons :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u \rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{t\lfloor u \rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{tk}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Or une primitive de $u \mapsto \frac{t}{e^{tu}-1} = \frac{te^{-tu}}{1-e^{-tu}}$ est $u \mapsto \ln(1-e^{-tu})$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_k^{k+1} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln\left(1-e^{-t(k+1)}\right) - \ln\left(1-e^{-tk}\right)\right] + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).\end{aligned}$$

Simplifions les deux premiers termes du membre de droite. Commençons par la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln\left(1-e^{-t(k+1)}\right)-\ln\left(1-e^{-tk}\right)\right]$: pour obtenir $\ln(P(e^{-t}))$, il faudrait faire apparaître la somme $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-e^{-tk}\right)$. Nous y parvenons ainsi ; posons pour abréger :

$$\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_k=\ln\left(1-e^{-tk}\right),$$

de sorte que la somme à simplifier ci-dessus s'écrive : $\sum_{k=1}^{+\infty} k(a_{k+1}-a_k)$. Alors, pour tout $N\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\left(a_{k+1}-a_k\right)=\sum_{k=1}^{N} ka_{k+1}-\sum_{k=1}^{N} ka_k=\sum_{k=2}^{N+1}(k-1)a_k-\sum_{k=1}^{N} ka_k&=-\sum_{k=2}^{N+1}a_k+Na_{N+1}-a_1\\&=-\sum_{k=1}^{N+1}a_k+Na_{N+1}.\end{aligned}$$

Les séries $\sum_{k\geqslant 1} k(a_{k+1}-a_k)$ et $\sum_{k\geqslant 1} a_k$ convergent : pour la première, cela découle du calcul d'intégrale plus haut, et pour la seconde on note que c'est la série dont la somme apparaît dans la question 4. Par conséquent, il est sensé de prendre la limite quand $N\to+\infty$ dans cette égalité, et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right)=-\sum_{k=1}^{+\infty}a_k+\lim_{N\to+\infty}Na_{N+1}.$$

(Nous avons implicitement effectué une transformation d'Abel.)

D'après la question 4, on a : $-\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=\ln\left(P(e^{-t})\right)$, et de plus, pour N au voisinage de $+\infty$:

$$Na_{N+1}=N\ln\left(1-e^{-t(N+1)}\right)\underset{N\to+\infty}{\sim}Ne^{-t(N+1)}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

par le théorème des croissances comparées. On a donc montré :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right)=\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right),$$

et donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u=\int_1^{+\infty}\frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u-\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

Enfin, pour exprimer l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ en fonction de $\int_1^{+\infty}\ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ (l'intégrale qui figure dans l'identité de l'énoncé), nous allons effectuer une intégration par parties :

— en dérivant $u\mapsto u$, qui est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et de dérivée $u\mapsto 1$;

— en intégrant $u\mapsto\dfrac{t}{e^{tu}-1}$, qui est continue sur $[1,+\infty[$ et dont une primitive est, on l'a vu, $u\mapsto\ln\left(1-e^{-tu}\right)$.

Puisque l'intégrale est généralisée, nous devons préalablement vérifier l'existence du terme $\left[u\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty}$. On a :

$$\lim_{u\to+\infty}u\ln\left(1-e^{-tu}\right)=0,$$

par un calcul analogue à celui effectué plus haut avec Na_{N+1}. Il n'y a donc pas de problème d'existence. La formule de l'intégration par parties nous donne donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u=\left[u\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u=-\ln\left(1-e^{-t}\right)-\int_1^{+\infty}\ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

On peut enfin conclure :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \left(-\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

C'est-à-dire, après simplifications, le résultat voulu :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Comme à chaque fois qu'on fait une transformation d'Abel : se demander ce qui pouvait y inciter.

19. Soit $t>0$ au voisinage de 0. D'après la question précédente :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

Étudions le comportement asymptotique de chaque terme quand $t\to 0^+$. Tout d'abord, on a :

$$\ln\left(1-e^{-t}\right) = \ln\left(t + \underset{t\to 0}{o}(t)\right) = \ln\left(t\left(1+\underset{t\to 0}{o}(1)\right)\right) = \ln(t) + \ln\left(1+\underset{t\to 0}{o}(1)\right).$$

Il découle deux choses de ce développement asymptotique. D'abord, du fait que le second terme tende vers $\ln(1)=0$ quand $t\to 0^+$, on a :

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) = -\frac{\ln(t)}{2} + \underset{t\to 0}{o}(1).$$

D'autre part, on en déduit que : $-\ln\left(1-e^{-tu}\right) \underset{u\to 0}{\sim} -\ln(u) > 0$, et donc que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature (notons qu'on intègre bien une fonction continue sur $]0,1]$). Comme la seconde converge (c'est une intégrale de référence), on en déduit que la première converge aussi. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u - \ln(t).
\end{aligned}$$

La seconde intégrale a pour limite -1 quand $t\to 0^+$ d'après la question 14. Ensuite, on effectue le changement de variable $v=tu$ dans la première intégrale. On a $\mathrm{d}v = t\mathrm{d}u$, et donc :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-v}\right)\mathrm{d}v \overset{(q.\,13)}{=} -\frac{\pi^2}{6t}.$$

Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t) + \underset{t\to 0}{o}(1).$$

Si l'on compile tout ce qu'on a démontré jusqu'à présent dans cette question, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) &= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{\ln(t)}{2} - \left(-\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t)\right) + \underset{t\to 0}{o}(1)\\
&= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u + \frac{\ln(t)}{2} + \frac{\pi^2}{6t} - 1 + \underset{t\to 0}{o}(1).
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 17, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + \underset{t\to 0}{o}(1)$. On a donc, en conclusion :

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Noter qu'on pouvait obtenir plus rapidement un équivalent de $\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ quand $t\to 0$ par un changement de variable. Pourquoi n'est-ce pas ce que j'ai fait ? Pouvait-on affiner cette approche pour avoir malgré le même résultat que ci-dessus ?

Partie D. Contrôle de P et conclusion.

20. D'après la question 2, on a :

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| = \left|\exp\left(L(xe^{i\theta}) - L(x)\right)\right| = \exp\left(\mathrm{Re}\left(L(xe^{i\theta}) - L(x)\right)\right).$$

On a utilisé l'égalité suivante, valable pour tout $\omega\in\mathbb{C}$: $|e^\omega| = e^{\mathrm{Re}(\omega)}$, et qui se démontre ainsi :

$$\forall \omega\in\mathbb{C},\quad |e^\omega| = \sqrt{e^\omega\overline{e^\omega}} = \sqrt{e^\omega e^{\bar\omega}} = \sqrt{e^{\omega+\bar\omega}} = \sqrt{e^{2\mathrm{Re}(\omega)}} = e^{\mathrm{Re}(\omega)}.$$

Or :

$$\mathrm{Re}\left(L(x)\right) = L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n},\quad \text{et : } \mathrm{Re}\left(L\left(xe^{i\theta}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^ne^{in\theta}}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n},$$

donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n(\cos(n\theta)-1)}{n}\right) &= \exp\left(-(1-\cos(\theta))x - \sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right)\\ &= \exp\left(-(1-\cos(\theta))x\right)\exp\left(-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right),\end{aligned}$$

et comme : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $1-\cos(n\theta)\geqslant 0$, la seconde somme ne fait intervenir que des quantités positives, donc :

$$-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\leqslant 0.$$

On en déduit :

$$\exp\left(-\sum_{n=2}^{+\infty}(1-\cos(n\theta))\frac{x^n}{n}\right)\leqslant 1,$$

si bien que l'égalité ci-dessus implique :

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right|\leqslant \exp\left(-(1-\cos(\theta))x\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour majorer $\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right|$, on note que par la question 4 :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| = \lim_{N\to+\infty}\left|\prod_{n=1}^{N}\frac{1-x^n}{1-x^ne^{in\theta}}\right|.$$

Or, par ce qui précède (qu'on peut bien appliquer avec x^n au lieu de x, vu que $x^n \in [0{,}1[$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si $x \in [0{,}1[$), pour tout entier $N \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{n=1}^{N} \frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right| = \prod_{n=1}^{N} \left|\frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right| &\leqslant \prod_{n=1}^{N} \exp\left(-(1-\cos(n\theta))x^n\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n=1}^{N}(1-\cos(n\theta))x^n\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n=1}^{N} x^n + \sum_{n=1}^{N}\cos(n\theta)x^n\right).
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{n=1}^{N} x^n = \frac{1-x^N}{1-x} - 1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x} - 1,$$

et :

$$\sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta)x^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}x^n\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} \left(xe^{i\theta}\right)^n\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-\left(xe^{i\theta}\right)^N}{1-xe^{i\theta}} - 1\right).$$

On a $\left(xe^{i\theta}\right)^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car : $\left|xe^{i\theta}\right| = x < 1$. Donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta)x^n = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}} - 1\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) - 1.$$

Par conséquent, quand $N \to +\infty$, la majoration du produit ci-dessus donne :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| = \lim_{N\to+\infty} \left|\prod_{n=1}^{N} \frac{1-x^n}{1-x^n e^{in\theta}}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + 1 + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) - 1\right),$$

c'est-à-dire :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Question excessivement technique dont on peut tirer peu d'enseignement, si ce n'est qu'on a encore illustré l'avantage de passer par un développement en série entière pour majorer une quantité $\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right|$ qui, pourtant, semble suffisamment simple pour se majorer directement.

21. On a :

$$\frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{1-xe^{-i\theta}}{|1-xe^{i\theta}|^2} = \frac{1-x\cos(\theta)+ix\sin(\theta)}{|1-xe^{i\theta}|^2},$$

donc :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) = \frac{1-x\cos(\theta)}{|1-xe^{i\theta}|^2}.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left|1-xe^{i\theta}\right|^2 = (1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta}) &= 1 - x\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) + \left|xe^{i\theta}\right|^2 \\
&= 1 - 2x\cos(\theta) + x^2 \\
&= 1 - 2x + x^2 + 2x(1-\cos(\theta)) \\
&= (1-x)^2 + 2x(1-\cos(\theta)),
\end{aligned}$$

donc :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)=\frac{1-x\cos(\theta)}{(1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)&=\frac{((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta)))-(1-x)\,(1-x\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\\&=\frac{2x(1-\cos(\theta))+(1-x)((1-x)-(1-x\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\\&=\frac{2x(1-\cos(\theta))-x(1-x)(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\\&=\frac{x(1-\cos(\theta))(2-(1-x))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\\&=\frac{x(1-\cos(\theta))(1+x)}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\end{aligned}$$

comme $x\in[0,1[$, on a : $1+x\geqslant 1$. On en déduit :

$$\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\geqslant\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)},$$

ce qu'il fallait démontrer.
Supposons à présent : $x\geqslant\frac{1}{2}$. En combinant la question précédente et l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right|\leqslant\exp\left(-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}\right).$$

Pour majorer le membre de droite, suivons l'indication de l'énoncé, en distinguant les cas :

— si $x(1-\cos(\theta))\leqslant(1-x)^2$, alors par croissance de l'application $u\mapsto-\frac{1}{u}$ on a :

$$\begin{aligned}-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}&\leqslant-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-x)^2\right)}\\&=-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)^3\,(1+2x)}\\&\leqslant-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)^3\,(1+2)}&&(\text{car }1+2x\leqslant 3)\\&\leqslant-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3},&&(\text{car }-x\leqslant-\frac{1}{2})\end{aligned}$$

et donc :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right|\leqslant\exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right),$$

ce qui donne la première inégalité proposée ;

— si $x(1-\cos(\theta))\geqslant(1-x)^2$, alors on a, toujours par croissance de l'application $u\mapsto-\frac{1}{u}$:

$$\begin{aligned}-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}&\leqslant-\frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\cdot 3x(1-\cos(\theta))}\\&=-\frac{1}{3(1-x)},\end{aligned}$$

et donc :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right|\leqslant\exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

On a donc démontré que si $x \geqslant \frac{1}{2}$ alors, selon que $x(1-\cos(\theta))$ soit supérieur ou inférieur à $(1-x)^2$, on a :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right), \quad \text{ou :} \quad \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Retenir la formule $|z \pm z'|^2 = |z|^2 \pm 2\mathrm{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$ que j'ai utilisée en début de résolution. Pourquoi est-elle vraie ? Pour quels z et z' est-elle intéressante à utiliser, davantage en tout cas que la définition du module ?

22. Posons : $\forall \theta \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}$, $f(\theta) = \dfrac{1-\cos(\theta)}{\theta^2}$. Alors f est continue sur $[-\pi,\pi] \setminus \{0\}$, et on a au voisinage de 0 :

$$f(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} \frac{\theta^2/2}{\theta^2} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \frac{1}{2},$$

donc f se prolonge en une application $\tilde{f}$ continue sur le SEGMENT $[-\pi,\pi]$. Par le théorème des bornes atteintes, $\tilde{f}$ est bornée et atteint ses bornes. On en déduit l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\alpha = \inf\limits_{[-\pi,\pi]} \tilde{f} = \min\limits_{[-\pi,\pi]} \tilde{f}$. Comme $\tilde{f} \geqslant 0$ trivialement (on a $\cos \leqslant 1$) et ne s'annule pas sur $[-\pi,\pi]$ (en effet, pour $\theta \neq 0$ on a $\cos(\theta) \neq 1$ donc $\tilde{f}(\theta) = f(\theta) \neq 0$, et pour $\theta = 0$ on a $\tilde{f}(0) = \lim\limits_0 f = \frac{1}{2} \neq 0$), on a : $\alpha > 0$. Ainsi on a bien l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall \theta \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}, \quad f(\theta) = \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} \geqslant \alpha,$$

d'où le résultat en multipliant par $\theta^2 > 0$ (et pour $\theta = 0$ l'inégalité reste trivialement vérifiée).
Soit $t_0 > 0$ tel que : $e^{-t_0} = \frac{1}{2}$. C'est vérifié pour $t_0 = \ln(2)$. Alors, pour tout $t \in]0, t_0]$, en reprenant la minoration de $1-\cos(\theta)$ ci-dessus, et en posant $x = e^{-t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ dans les majorations de la question précédente, on obtient pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$:

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6\left(1-e^{-t}\right)^3}\right), \quad \text{ou :} \quad \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3\left(1-e^{-t}\right)}\right)$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $1-e^{-t} \leqslant t$ (voir $(**)$ à la question 14), donc par croissance de $u \mapsto -\frac{1}{u}$ on a :

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6t^3}\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{6}\left(\theta t^{-3/2}\right)^2\right),$$

ou :

$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3t}\right) = \exp\left(-\frac{1}{3}\frac{|\theta|^{2/3}t^{-1}}{|\theta|^{2/3}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3}\frac{|\theta|^{2/3}t^{-1}}{\pi^{2/3}}\right) = \exp\left(-\frac{\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}{3\pi}\right),$$

d'où le résultat en posant $\beta = \frac{\alpha}{6} > 0$ et $\gamma = \frac{1}{3\pi^{2/3}} > 0$ (il faudrait en principe traiter à part le cas $\theta = 0$, pour la seconde inégalité, mais il est trivial : nous laissons le lecteur s'en convaincre).
Remarque. Il est aussi possible de démontrer la minoration $1-\cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2$, et d'expliciter α, en écrivant : $1-\cos(\theta) = 2\sin(\theta/2)^2$. Il est alors relativement classique de démontrer, par concavité du sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \frac{2x}{\pi}$ (son graphe est au-dessus de la corde joignant $(0,0)$ et $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$). Par parité de $\sin^2$ et $x \mapsto \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$, on a même : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\sin(x))^2 \geqslant \frac{4x^2}{\pi^2}$. On en déduit alors, en prenant $x = \theta/2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall \theta \in [-\pi,\pi], \quad 1-\cos(\theta) \geqslant 2 \cdot \frac{4(\theta/2)^2}{\pi^2} = \frac{2\theta^2}{\pi^2},$$

d'où la minoration voulue en posant $\alpha = \frac{2}{\pi^2} > 0$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Est-ce que la constante $\frac{2}{\pi^2}$ est optimale ? Peut-on l'avoir sans passer par le sinus ?

23. Soit $t \in]0, t_0]$. D'après la question précédente (et pour éviter une distinction de cas), on a :

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], \qquad \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant \max\left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2}, e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}\right) \leqslant e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}.$$

On en déduit, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right|\mathrm{d}\theta &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}|\theta|\right)^{2/3}}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_{0}^{\pi}\left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2/3}}\right)\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

par parité des intégrandes. Le changement de variable $u = t^{-3/2}\theta$ donne alors :

$$\int_0^{\pi}\left(e^{-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^2} + e^{-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2/3}}\right)\mathrm{d}\theta = t^{3/2}\int_0^{t^{-3/2}\pi}\left(e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u.$$

Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\left(e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u$ converge : l'intégrande est continu sur $[0, +\infty[$, et par le théorème des croissances comparées il est dominé par $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ au voisinage de $+\infty$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ en tant que fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $u \mapsto e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}$ est également intégrable au voisinage de $+\infty$, d'où le résultat. Cela nous permet d'écrire, étant donné que l'intégrande est positif :

$$\int_0^{t^{-3/2}\pi}\left(e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty}\left(e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u,$$

et donc, en posant $C = \int_0^{+\infty}\left(e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u$ (qui est bien une constante de la variable t), les calculs qui précèdent montrent que :

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant 2Ct^{3/2},$$

et ce pour tout $t \in]0, t_0]$, ce qui montre bien qu'on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta = \underset{t\to 0^+}{O}\left(t^{3/2}\right).$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Peut-on obtenir une estimation plus précise de l'intégrale $\int_0^{t^{-3/2}\pi}\left(e^{-\beta u^2} + e^{-\gamma u^{2/3}}\right)\mathrm{d}u$ (idéalement : un équivalent asymptotique), par exemple grâce au théorème d'intégration des relations de comparaison ? Est-ce que la domination par $t^{3/2}$ est bonne ?

24. Posons $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans $(*)$, ce qui équivaut à $n = \frac{\pi^2}{6t^2}$ (c'est ce qui apparaît dans l'intégrande de la question précédente). Notons qu'on a $n \to +\infty$ si et seulement si $t \to 0^+$. On a alors :

$$p_n = \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta}\right)}{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}\mathrm{d}\theta.$$

Or, d'après la question précédente :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta}\right)}{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)} \mathrm{d}\theta = \underset{n\to+\infty}{O}\left(n^{-3/4}\right).$$

De plus, d'après la question 19 :

$$P\left(e^{-t}\right) = e^{\frac{\pi^2}{6t}} \cdot e^{\frac{\ln(t)}{2}} \cdot e^{-\frac{\ln(2\pi)}{2}} \cdot e^{o(1)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t} e^{\frac{\pi^2}{6t}} \cdot e^{-\frac{\ln(2\pi)}{2}},$$

donc, en particulier :

$$P\left(e^{-t}\right) = \underset{t\to 0^+}{O}\left(\sqrt{t} e^{\frac{\pi^2}{6t}}\right),$$

puis :

$$P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(n^{-1/4} e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}\right).$$

On a donc :

$$p_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}} \times n^{-1/4} e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}} \times n^{-3/4}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(n^{-1} e^{2\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}\right).$$

C'est-à-dire, étant donné que $\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$p_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right),$$

d'où le résultat.

Remarque. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule $(*)$, on peut en effet établir l'équivalent :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}n},$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Qu'est-ce qui put inciter au choix $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ de l'énoncé ? Songer qu'on veut minimiser la taille des fonctions présentes dans l'expression intégrale de p_n, afin d'avoir la meilleure estimation possible.

— De quoi aurions-nous besoin de plus, pour obtenir l'équivalent de la remarque ? Comprendre, alors, quel obstacle non trivial nous rencontrerions.

— Au-delà des calculs (très) techniques des parties C et D, reconnaître une stratégie globale : on veut une estimation asymptotique d'une quantité u_n. On explicite la somme de sa série génératrice $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n z^n$ et on utilise la formule intégrale de Cauchy pour exprimer u_n en fonction de cette somme.
Il ne reste plus qu'à faire une estimation précise de l'intégrande, puis de l'intégrale, pour conclure. Cela nécessite cependant de bien comprendre le comportement de la somme *dans le plan complexe*, et c'est cela qui est délicat.