Devoir maison n° 8 – Compte rendu

Redite des devoirs précédents.

1. Vos raisonnements obsessionnels par l'absurde rallongent l'argumentation. Je peux dire sans aucune exagération que moins d'un dixième des raisonnements par l'absurde que j'ai lus depuis le début de l'année scolaire étaient pertinents. Si vous montrez que $f = g$ avec g ne s'annulant pas (dans ce devoir : $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$), alors concluez directement que f ne s'annule pas, au lieu de raisonner par l'absurde en introduisant un zéro de f !

   Dans le cas de l'inégalité $|\exp(z) - 1| \leqslant \frac{1}{2}$, on voulait montrer que si z est proche de 0 alors $\exp(z)$ est proche de $\exp(0) = 1$; mais n'est-ce pas *exactement* la définition de la continuité ? Que diable vient apporter un raisonnement par l'absurde ?

   La seule situation qui me vient à l'esprit, où il est pertinent de raisonner par l'absurde pour avoir une inégalité du type : $|f(z) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ (ou variantes), est lorsqu'on veut faire une *inversion de quantificateurs* ($\forall$ et $\exists$) et qu'on est sur un *compact*. Dans ce cas-là, bien souvent, on raisonne par l'absurde de sorte à avoir une infinité de contre-exemples à l'inégalité souhaitée, et on utilise la compacité pour déduire de ces contre-exemples une suite convergente ; raisonner sur la limite donne l'absurdité (c'est ce qu'on fait en démontrant le théorème de Heine, ou la continuité des racines d'un polynôme dans le DST n° 6).

   Dans les autres situations, c'est la *régularité* de f qui permet de contrôler cette distance, avec d'autant plus de précision que f est très régulière (cf. l'inégalité de Taylor-Lagrange).

2. Efforcez-vous de reconnaître des structures. Peu d'élèves se servent de la propriété de morphisme de l'exponentielle, de laquelle découlent immédiatement : 1° le fait que $\exp(0) = 1$ (un morphisme envoie l'élément neutre sur l'élément neutre), 2° l'identité $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$ (un morphisme préserve les inverses), 3° le fait que $\{t \in \mathbb{R} \mid e^{it} = 1\}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (c'est un noyau).

   Outre les propriétés algébriques, il y a désormais aussi les propriétés topologiques à prendre en compte. Certaines ne sont pas nouvelles : si l'on utilise que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle, il est immédiat que l'inclusion $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^*$ implique $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+^*$.

3. Mentionnez la continuité d'une fonction dont vous démontrez l'intégrabilité. *D'emblée.* Je me réserve le droit, à l'avenir, de ne pas lire une question où vous ne le faites pas. Même en devoir noté.

Imprécisions mathématiques.

4. Vous ne savez pas ce qu'est la classe C^1 d'une fonction de la variable complexe. Cela n'a pas empêché de nombreux élèves de dire que l'exponentielle est de classe C^1 sur $\mathbb{C}$, ou que $f_\omega \circ \gamma$ l'est en tant que composition de fonctions de classe C^1 (chose qui n'est pas définie pour $f_\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$). De fait, l'intérêt d'introduire un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ n'a probablement pas été compris (il permet *justement* de se ramener à une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, afin de la dériver classiquement).

5. Beaucoup d'élèves affirment que $\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{C}$ sans le justifier (dire par exemple que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ de dimension finie).

6. La caractérisation séquentielle de la continuité de la conjugaison complexe est en jeu pour passer de : $\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(z)$, à : $\overline{\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\exp(z)}$. Tout le monde ne l'a pas remarqué.

7. Seules l'injectivité et donc la stricte monotonie sont nécessaires pour passer de : $\exp(\mathrm{Re}(z)) = \exp(0)$ à : $\mathrm{Re}(z) = 0$. Le théorème de la bijection croissante est superflu : la continuité n'intervient pas.

8. Les différents théorèmes de point fixe que j'ai vus (pour montrer qu'une application contractante f admet un point fixe) nécessitent tous que l'ensemble de départ de f soit *stable*. Subtilité pas toujours vue. Il n'a pas choqué certains élèves que sans cette vérification, leur démonstration (incomplète) donnât directement la surjectivité de l'exponentielle (sans exclure $0 \in \exp(\mathbb{C})$ d'ailleurs) *via* le théorème de point fixe sans avoir besoin des questions suivantes.

9. La connexité de $\mathbb{C}^*$, décisive pour conclure à la surjectivité de l'exponentielle, fut rarement justifiée.

10. Vous n'avez pas tous compris pourquoi je demandais le calcul de $e^{i\theta}$ pour différents angles remarquables : puisque vous n'aviez jamais défini π *rigoureusement* par le passé, il va de soi que les calculs des valeurs remarquables de cosinus et sinus étaient jusque-là fautifs. Il s'agissait d'y remédier.
11. Lors de la manipulation des fonctions C_n, peu ont prêté attention au cas différent $n = 0$.
12. Une famille orthonormée est *toujours* libre. Inutile de le redémontrer.
13. Le théorème de sommation par paquets n'est presque jamais nommé pour séparer les termes pairs et impairs, ou dire que sommer sur $\mathbb{Z}$ peut se faire en séparant les indices positifs des négatifs.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

14. Il est ARCHI-FAUX de penser que la convergence uniforme sur tout compact équivaut à la convergence uniforme partout. C'est probablement une des plus grosses erreurs possibles dans ce chapitre.
    C'est un concept très subtil et je le concède volontiers, mais vous avez rencontré énormément de contre-exemples depuis le premier cours de l'année et n'avez plus d'excuse. Si j'ai donné l'exemple de la série géométrique sur $]-1,1[$ dans le cours, c'est bien pour vous en faire prendre conscience.
    Combien de fois ai-je formulé la phrase : « on voit par la contraposée du théorème de la double limite qu'il n'y a pas convergence uniforme sur I, vérifions-la donc sur des intervalles adaptés » ? Quel sens aurait cette démarche si la convergence sur des compacts impliquait la convergence partout ?!
15. Pire encore : ceux qui affirment sans aucune justification que la série exponentielle converge uniformément sur $\mathbb{C}$. Vous ne pouvez pas faire pire entame d'un devoir : 1° c'est archi-faux (voir ci-dessous), 2° même si c'était vrai, une affirmation gratuite d'une propriété si subtile ne mérite aucun point, 3° vous montrez que vous sous-estimez l'importance d'une des notions les plus importantes de MP, et le correcteur peut légitimement se demander ce que vous avez retenu de l'analyse de 2^e^ année. Cela peut avoir des répercussions *sur tout le reste de la copie*, parce que cela donne un *a priori* très négatif au correcteur sur votre « sens de l'analyse » et votre rigueur en général.
    Un exercice classique (cf. le chapitre préliminaire) est de montrer que la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite d'applications polynomiales est *toujours* polynomiale. Je vous recommande plus que chaudement de savoir le démontrer (utiliser le fait qu'une suite convergente soit de Cauchy). Ayant ce résultat en tête, on comprend aisément que l'immense majorité des séries entières croisées ne convergent pas uniformément sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et qu'affirmer le contraire vous expose au ridicule.
16. Il est faux de penser que *toutes* les sommes de séries alternées convergentes sont du même signe que leur premier terme. Sinon : $-1 = \cos(\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$ serait positif. Il faut pour cela vérifier le théorème spécial des séries alternées. La décroissance n'étant pas vérifiée pour $\left(\frac{|z|^n}{n!}\right)_{n \geqslant 0}$ ici (avec $z < 0$), il fallait obtenir le signe de $\exp(z)$ autrement.
17. La vérification du caractère défini d'un produit scalaire, ou du caractère séparé d'une norme, ne doit JAMAIS être faite à la va-vite. C'est là-dessus que se concentrent les points du barème.
18. Dans le problème sur les séries de Fourier, il fallait prêter attention au fait que les fonctions développées en série fussent souvent continues par morceaux (et non continues). À cet effet, le théorème de Weierstraß et la propriété de séparation de l'intégrale n'étaient pas directement utilisables.
19. Il est INADMISSIBLE d'affirmer que l'intégrale d'une fonction périodique sur une période est toujours nulle. Il suffit d'ajouter n'importe quelle fonction constante à une fonction périodique, ou de l'élever au carré, pour fournir un contre-exemple.
20. Si l'on introduit un produit scalaire, c'est pour faire de la géométrie. À quoi bon le faire si c'est pour finalement n'utiliser aucun théorème, aucune relation d'orthogonalité, et remplacer tous les produits scalaires par leurs définitions pour faire du calcul brutal ? Par ailleurs, des dessins permettent de *voir* les relations d'orthogonalité en question (représenter $\mathcal{F}_{T,N}$ par un plan, dessiner une base orthonormée de ce plan pour représenter $\{C_n\} \cup \{S_n\}$, puis les vecteurs f, g et $\mathscr{S}_N(f)$, permet de voir *immédiatement* que l'inégalité $\|f - \mathscr{S}_N(f)\| \leqslant \|f - g\|$ est la conséquence de l'observation enfantine que l'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle).
    Remarquer que $\mathscr{S}_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{F}_{T,N}$ tuait la question.