Devoir maison n° 8

(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

L'exercice est à ma connaissance inédit, bien que la démonstration soit bien connue (surtout dans le cas de l'exponentielle matricielle).

Le problème est une compilation : la première partie donne les théorèmes banals sur les séries de Fourier, déclinés en plusieurs questions ; la seconde partie est extraite et adaptée de l'épreuve de Mathématiques II du Concours Commun Mines-Ponts, année 2012, filière MP ; la dernière partie est une adaptation très lointaine de l'épreuve de Mathématiques MPI 2 du concours Inter-ENS, année 2007 (parties III et IV).

Exercice. L'exercice démontre la surjectivité de l'exponentielle et définit rigoureusement π (on comprend aisément que ces deux problématiques sont intimement reliées si l'on se souvient que 2π engendre le noyau de $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$, et que le théorème d'isomorphisme relie image et noyau). La démarche la plus classique pour démontrer la surjectivité est de fabriquer un logarithme de tout nombre complexe non nul (ce qui, on le sait, nécessite beaucoup de prudence). De la même manière que le logarithme réel est l'unique primitive de la fonction inverse s'annulant en 1, il est tentant de définir le logarithme d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ comme étant :

$$\ln(z) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\gamma(t)} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\mathrm{d}t,$$

où γ est un chemin liant 1 et z. C'est-à-dire, si l'on prend pour γ la paramétrisation la plus banale $t \mapsto 1 + t(z-1)$, on aurait : $\ln(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(z-1)}{1+t(z-1)}\mathrm{d}t$. Cette définition n'est pas sans défaut. Ne les décrivons pas tous, et contentons-nous de noter le seul qui concerne notre problème direct : il faut un chemin γ reliant 1 et z qui soit continûment dérivable, le plus simple possible étant un segment (ce qui correspond au choix explicite ci-dessus). Or le segment $[1, z]$ n'est pas contenu dans $\mathbb{C}^*$ si z est un réel négatif ; dans ce cas, l'intégrale ci-dessus n'est pas définie.

Une stratégie est alors de montrer que pour $z \notin \mathbb{R}_-$, le nombre $\ln(z)$ défini ci-dessus vérifie bien : $\exp(\ln(z)) = z$ (on y parvient en dérivant $x \mapsto \exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{(z-1)}{1+t(z-1)}\mathrm{d}t\right)$ et en réintégrant le résultat obtenu entre 0 et 1), de sorte que z ait un antécédent par l'exponentielle. Si $z = -a$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, on utilise un antécédent de $i\sqrt{a}$ (qui existe par ce qui précède) pour fabriquer un antécédent de z grâce à la propriété de morphisme de l'exponentielle.

Telle est la démonstration classique de la surjectivité de l'exponentielle (qui définit en passant la **détermination principale** du **logarithme complexe**)... Que j'ai choisi de ne pas suivre. Ma démonstration topologique vous permet d'appliquer concrètement plusieurs résultats de topologie qui peuvent paraître bien éthérés autrement :

- le **théorème du point fixe** de Banach-Picard ;
- la connexité par arcs (et donc **connexité**) de $\mathbb{C}^*$;

— la structure des **sous-groupes** de $(\mathbb{R}, +)$.

Le théorème du point fixe de Banach-Picard est un outil très puissant d'analyse pour montrer l'existence (et éventuellement l'unicité si elle nous intéresse) d'une solution d'une équation (ici l'équation $\omega = \exp(z)$). Cela nécessite cependant de reconnaître une application contractante ; *via* l'inégalité des accroissements finis, on sait que c'est vrai dès qu'une fonction admet une dérivée « petite ». Ici il y avait deux problèmes à régler pour faire apparaître une application contractante : 1° vous n'avez pas vu la dérivation au sens complexe (qui n'a pas grand'chose à voir avec la dérivation au sens classique, si ce n'est la définition), ce qui semble empêcher de se servir l'inégalité des accroissements finis, 2° l'équation $\omega = \exp(z)$ n'est pas un problème de point fixe : comment s'y ramener, et de sorte à avoir une application contractante ?

Le problème 1° est réglé fort heureusement pour l'exponentielle puisque cette fonction est égale à sa propre dérivée : il n'y a pas à définir la dérivée au sens complexe dans ce cas spécifique. Pour comprendre comment j'ai ramené l'équation ci-dessus à un problème de point fixe faisant intervenir une application contractante, il est certes aisé de se contenter de partir de : $\omega = \exp(z)$, et d'ajouter z de chaque côté pour avoir l'équation équivalente : $z + \omega = \exp(z) + z$, ou : $z = \exp(z) - \omega + z$, qui se ramène à un problème de point fixe (ici de l'application $f : z \mapsto \exp(z) + z - \omega$). Seulement l'équation proposée ici n'a aucune chance de donner une application contractante en général vu que formellement : $f'(z) = \exp(z) + 1$, qui n'est pas « petit » en général. L'inégalité des accroissements finis ne permet pas d'en déduire que f est contractante. Pour obtenir une dérivée nulle au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ (et donc strictement inférieure à 1 en module autour de ce point), on introduit plutôt :

$$f : z \mapsto z - \exp(z_0)^{-1} \left(\exp(z) - \omega\right).$$

On a alors, formellement : $f'(z_0) = 0$, et donc f' est « petite » près de z_0, si bien que f est contractante dans une boule de petit rayon centrée en z_0. C'est l'idée qui préside notre définition de f. En choisissant convenablement une telle boule et ω (qu'on choisit proche de $\exp(z_0)$), on arrive à montrer grâce au théorème du point fixe que tous les éléments près de $\exp(z_0)$ ont un antécédent par f.

Pour simplifier l'étude, on a pris $z_0 = 0$, sachant que les propriétés de morphisme permettent de ramener l'étude autour de tout point à une étude en 0.

En généralisant ce raisonnement, on obtient le **théorème d'inversion locale** qui est l'un des théorèmes les plus importants du calcul différentiel. Je le formule ici dans un cas particulier :

Théorème d'inversion locale (cas holomorphe). Soit f une fonction dérivable au sens complexe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in U$ tel que : $f'(z_0) \neq 0$. Il existe alors un voisinage V de z_0 tel que f induise une bijection entre V et $f(V)$, dont la réciproque est également dérivable au sens complexe.

Ne perdons pas de vue un intérêt majeur de ce théorème : il est évident que f induit une surjection de V dans $f(V)$, donc cet aspect peut paraître pauvre. Ce qui est réellement intéressant, outre le caractère injectif, c'est que $f(V)$ est un *voisinage* de $f(z_0)$ (pourquoi ?). Autrement dit : tout élément proche de $f(z_0)$ admet un antécédent, qui est par ailleurs proche de z_0.

C'est plutôt cet aspect que nous exploitons dans cet exercice, c'est-à-dire : on sait que $1 = \exp(0)$, et on en déduit que tout élément proche de 1 admet un antécédent proche de 0. Par translation, on en déduit que cela vaut en remplaçant 1 (et 0) par n'importe quel élément de l'image de l'exponentielle (et son antécédent).

On a donc un résultat **local** : si un élément admet un antécédent par l'exponentielle, tous ses voisins proches aussi. On veut montrer que cela vaut **globalement** (tout élément de $\mathbb{C}^*$ admet un antécédent par l'exponentielle). Un des moyens de passer du local au global est la connexité. Quand on utilise la connexité, la stratégie est toujours la suivante : si l'on veut montrer que tout élément d'un ensemble

E vérifie une propriété $\mathcal{P}$, on introduit :

$$A = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathcal{P}\},$$

et on espère montrer que A est ouvert (cela montre que $\mathcal{P}$ est vérifiée localement). Si, en plus, A est fermé (ce qui permet de « toujours repousser les limites » de A, heuristiquement : l'aspect ouvert permet de propager la propriété $\mathcal{P}$, en étant potentiellement limité par la frontière des voisinages des points de A ; l'aspect fermé permet de montrer que cette frontière est aussi dans A, ce qui permet d'encore propager la propriété $\mathcal{P}$ en partant de cette frontière ; et ainsi de suite) dans E qui est **connexe** (propriété qui assure que cette propagation finit par s'étendre sur tout l'espace), alors : $A = E$, et donc la propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée globalement. C'est également ainsi que l'on montre que :

— tout ouvert connexe est connexe par arcs (comme les boules ouvertes sont convexes, un ouvert est localement connexe par arcs, et la connexité permet de rendre globale cette propriété) ;

— une fonction de gradient nul sur un ouvert connexe par arcs est constante (chapitre XIII).

Une fois la surjectivité de l'exponentielle obtenue, on montre aisément qu'elle ne peut pas être injective ; son noyau est donc non trivial. Il reste à montrer qu'il est engendré par un seul élément, et la définition de π en découle. On se ramène à une situation où l'on sait que les noyaux sont monogènes en étudiant plutôt le morphisme $t \mapsto \exp(it)$ défini sur $\mathbb{R}$ et en exploitant la structure de ses sous-groupes.

Puisque presque tout découle de la propriété de morphisme de l'exponentielle, on pourrait volontiers généraliser le raisonnement de l'exercice, pour avoir la surjectivité de nombreux morphismes à valeurs dans un groupe connexe. Le seul point épineux à généraliser (et qui fait que tous les morphismes ne sont pas surjectifs) est la surjectivité locale.

Problème. Le problème tourne autour des séries de Fourier et de leurs conséquences. L'idée est d'approcher une fonction périodique f d'aussi près que possible par des combinaisons linéaires de cosinus et sinus. L'intérêt est évident : ces deux fonctions sont élémentaires et bien connues, nous avons donc tout intérêt à nous y ramener. Or cette question d'approximation revient précisément à minimiser la distance :

$$\mathrm{d}(f, F) = \inf_{g \in F} \|f - g\|,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme à spécifier et F l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de cosinus et sinus (de la forme $t \mapsto \cos(nt)$ et $t \mapsto \sin(nt)$ avec n entier). Nous ne savons en général pas expliciter une telle distance, ni un élément de F qui la réalise... Sauf si F est de dimension finie et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à un produit scalaire, puisque dans ce cas il suffit de prendre pour g la projection orthogonale de f sur F ! Or on sait la calculer explicitement, dès que F est muni d'une base explicite ! Nous montrons alors dans ce problème qu'en introduisant un produit scalaire convenable, qui fait des cosinus et sinus une famille orthonormée (après normalisation éventuellement), nous obtenons la fonction la plus « proche » de f à être composée de combinaison linéaire de cosinus et sinus. C'est la série de Fourier *tronquée à l'indice* N de f :

$$\mathscr{S}_N(f)(x) = a_0(f) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right)$$

où les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont des produits scalaires (la normalisation que j'utilise dans ce problème n'est en général pas celle que vous rencontrerez dans la littérature).

Seulement il est évident qu'avec une combinaison linéaire finie de telles fonctions, nous n'aurons pas toutes les fonctions périodiques : elles ne sont pas toutes continues, par exemple. Un passage à la limite est éventuellement nécessaire. C'est le **théorème d'approximation de Weierstraß** qui assure qu'en procédant ainsi, la distance ci-dessus est bien nulle :

$$\lim_{N \to +\infty} \|\mathscr{S}_N(f) - f\| = 0.$$

Cette convergence implique déjà la fort utile **formule de Parseval**, que nous employons de deux façons différentes dans ce problème : 1° pour montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction périodique caractérisent la fonction, 2° pour calculer des sommes remarquables.

Hélas, comme la convergence pour $\|\cdot\|$ n'implique pas la convergence simple *a priori*, cette convergence ne permet pas de « vraiment » écrire f comme combinaison linéaire (infinie) de cosinus et sinus. Et comme la norme infinie n'est pas la norme « naturelle » pour l'étude des séries de Fourier (dont nous venons d'expliquer l'origine géométrique), nous devons nécessairement ajouter des hypothèses pour qu'en toute généralité il y ait convergence au moins simple d'une série de Fourier vers sa fonction. Pour avoir facilement des applications pratiques, je me suis contenté du cas où l'on sait que la convergence de la série de Fourier est *normale* : dans ce cas, sa somme est nécessairement la fonction qui lui est associée.

Néanmoins le résultat le plus général à ce sujet est le **théorème de Dirichlet** : soit f une fonction continue et de classe C^1 par morceaux. Alors $(\mathscr{S}_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f (définie en remplaçant f à ses points de discontinuité par la moyenne de ses limites à gauche et à droite) :

$$f(x) = a_0(f) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right).$$

Si vous voulez une démonstration de ce résultat dans un sujet de concours (pour vous forcer à une résolution active), lisez le sujet d'EPITA-IPSA-ESME 2023, partie IV. Les deux principaux outils nécessaires à la démonstration du théorème de Dirichlet sont :

— la démonstration de l'identité : $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(ku) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$, très importante à savoir démontrer (vous en avez eu une variante plus sophistiquée au DST n° 1) ;

— le lemme de Riemann-Lebesgue.

Ce même sujet en donne une application en démontrant l'identité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\pi\cdot\frac{1+\exp(-2\pi)}{1-\exp(-2\pi)} - 1\right).$$

Pour ma part, j'utilise les séries de Fourier pour montrer la formule d'inversion de Fourier dans le cas particulier des fonctions de Schwartz (aussi appelées fonctions *à décroissance rapide*), ce qui nous rassure sur l'utilité de la transformation de Fourier dont je parle déjà dans les commentaires du DM n° 2 : après avoir simplifié un problème *via* cette transformation, nous pouvons *revenir en arrière* grâce à l'injectivité de $f \mapsto \hat{f}$. Grâce à cette formule d'inversion de Fourier, je fabrique une « ondelette » (la fonction φ de la question 18) puis une fonction monstre dans les questions qui suivent.

Ce qu'on retiendra en bref. Différents théorèmes d'interversion (intégration terme à terme, dérivation terme à terme). Introduction d'un chemin afin de se ramener à une fonction réelle pour lui appliquer l'inégalité des accroissements finis. Théorème du point fixe pour obtenir des homéomorphismes locaux. Connexité et passage du local au global. Argument de théorie des groupes pour se ramener à l'étude autour d'un point. Sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$. Projection orthogonale sur un sous-espace à l'aide d'une base orthonormée. Les séries de Fourier ont une origine géométrique naturelle. Une fonction est somme de sa série de Fourier si elle converge normalement. Construction d'une fonction infiniment plate et d'une fonction de classe C^∞ à support compact.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— EXERCICE : questions 1 à 5, question 11 ;

— PROBLÈME, PREMIÈRE PARTIE : toutes les questions ;

— PROBLÈME, DEUXIÈME PARTIE : questions 9 à 11 ;

— PROBLÈME, TROISIÈME PARTIE : questions 15 à 18.

2 Corrigé

Exercice

1. Montrons d'abord que l'exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}$. L'application f_n est continue sur $\mathbb{C}$ car polynomiale pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient K un compact de $\mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $K \subseteq \mathrm{B}_f(0, R)$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in K$, $|f_n(z)| \leqslant \dfrac{R^n}{n!}$, donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|f_n\|_{\infty,K}}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R^n}{n} = \exp(R) < +\infty,$$
Ce qui démontre la convergence normale donc uniforme de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur tout compact de $\mathbb{C}$. On en déduit que sa somme $\exp = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C}$ en tant que limite uniforme (sur tout compact) de fonctions continues : d'où le résultat.
Le raisonnement est le même pour la dérivation (restreinte à $\mathbb{R}$) : l'application f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ n'est rien d'autre que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ (puisque : $f_0' = 0$, et : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{n!} = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$), dont on peut reprendre l'étude mot pour mot pour montrer sa convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (voir plus haut) et $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur tout compact inclus dans $\mathbb{R}$, donc par le théorème de dérivation terme à terme $\exp_{|\mathbb{R}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x),$$
ce qu'il fallait démontrer.
Autre démonstration. Plus tard, nous dirons sobrement que l'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, de sorte qu'elle soit continue sur $\mathbb{C}$ et dérivable sur son intervalle ouvert de convergence (qui est $\mathbb{R}$), dérivable terme à terme. La vérification de la convergence uniforme sera superflue.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Peut-on montrer la convergence normale sur $\mathbb{C}$ directement ? La convergence uniforme par encadrement du reste ?
> — J'affirme que la définition $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ne vient pas de nulle part. On tombe NATURELLEMENT dessus lorsqu'on cherche une solution de $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$. Pourquoi ?

2. L'exponentielle d'un nombre réel est une somme de série de nombres réels, donc c'est un nombre réel. L'identité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ avec $y = -x$, implique par ailleurs : $1 = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x)$, ce qui prouve que l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puisque dans le cas contraire cette identité donnerait : $1 = 0$.
On en déduit que $\exp(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}^*$, par continuité de l'exponentielle et le théorème des valeurs intermédiaires : c'est donc un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, mais l'égalité $\exp(0) = 1$ exclut la seconde possibilité, donc : $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Ainsi l'exponentielle réelle est strictement positive.
Enfin, par la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) > 0$, donc $\exp_{|\mathbb{R}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** On a apparemment seulement eu besoin du fait que l'exponentielle soit un morphisme continu. Peut-on obtenir de même le signe ou le sens de variation des autres fonctions que vous connaissez à vérifier les mêmes hypothèses ? (le logarithme, les fonctions puissances...)

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, comme la conjugaison complexe est un automorphisme de corps, on a : $\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{z}^n}{n!}$. Le membre de droite converge vers $\exp(\bar{z})$ quand $N \to +\infty$, par définition de l'exponentielle. Pour justifier que le membre de gauche converge vers $\overline{\exp(z)}$, on note que l'application $\omega \mapsto \bar{\omega}$ est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$ qui est un espace vectoriel de dimension finie, donc elle est continue. Par la caractérisation séquentielle de la continuité :

$$\lim_{N\to+\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp(z)}.$$

Par conséquent l'égalité ci-dessus donne, quand $N \to +\infty$, l'égalité voulue : $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
Remarque. Cet argument de continuité n'est pas du pinaillage. Il est en général faux que, si f est linéaire, on a : $f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n)$. Par exemple on peut montrer, grâce au développement en série entière de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ qui sera vu au chapitre VIII :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Peu importe l'expression exacte du terme général, que nous notons u_n dans ce qui suit : tout ce qui importe est qu'il est un nombre rationnel, et qu'il est donc invariant par l'automorphisme de corps de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ défini par : $f : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ (avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$). Quand on prend l'image par f dans cette égalité, on a :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n).$$

Cette dernière somme est en effet égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et on a : $-\frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour que l'interversion entre f et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ soit licite, il faut la continuité de f (comme ce fut illustré dans le traitement de cette question). Notre contre-exemple ci-dessus montre en passant que f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$). En fait, hormis l'identité et la conjugaison complexe, aucun automorphisme d'un sous-corps de $\mathbb{C}$ n'est continu.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Bien comprendre pourquoi c'est un argument de continuité (et plus précisément de caractérisation séquentielle) qui permet de conjuguer la somme comme on le pense. Y songer même pour les opérations les plus banales, surtout avec des sommes de séries matricielles (transposition, trace, multiplication par une matrice, etc.).
> — Pourquoi ne suis-je pas passé par l'expression de la conjugaison complexe avec la partie réelle et la partie imaginaire ?
> — Trouver d'autres contre-exemples du même acabit que celui ci-dessus.
> — Pourquoi seules l'identité et la conjugaison complexe définissent des automorphismes continus sur un sous-corps de $\mathbb{C}$? (Ce n'est pas immédiat.)

4. On a :
$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z+\bar{z}) = \exp(2\mathrm{Re}(z)),$$
donc : $|\exp(z)| = \sqrt{\exp(2\mathrm{Re}(z))}$. Or la propriété de morphisme de l'exponentielle donne : $\exp(2\mathrm{Re}(z)) = (\exp(\mathrm{Re}(z)))^2$, donc : $|\exp(z)| = |\exp(\mathrm{Re}(z))|$. L'exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on conclut : $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$.
On en déduit : $\exp(z) = 0 \iff \exp(\mathrm{Re}(z)) = 0$; or $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et on sait que l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc cette égalité est impossible. On en déduit que l'exponentielle ne s'annule jamais sur $\mathbb{C}$ et qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. De plus :
$$\exp(z) \in \mathbb{U} \iff |\exp(z)| = 1 \iff \exp(\mathrm{Re}(z)) = 1,$$
et comme l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est injective sur $\mathbb{R}$; or $1 = \exp(0)$, donc l'égalité ci-dessus équivaut à : $\mathrm{Re}(z) = 0$, c'est-à-dire : $z \in i\mathbb{R}$. D'où le résultat.
Remarque. Pour montrer que l'exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, on peut aussi, comme dans la question 2, utiliser l'identité $\exp(z)\exp(-z) = 1$ valable pour tout $z \in \mathbb{C}$.

5. L'exponentielle est continue sur $\mathbb{C}$, donc en particulier en 0. Par définition de la continuité avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, nous avons bien l'existence de $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $z \in \mathrm{D}_R$, on ait : $|\exp(z)-1| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
On a alors, pour tout $(z_1, z_2) \in (\mathrm{D}_R)^2$, en notant γ l'application $t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$:
$$|f_\omega(z_2) - f_\omega(z_1)| = |f_\omega(\gamma(1)) - f_\omega(\gamma(0))| = \left|\int_0^1 (f_\omega \circ \gamma)'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |(f_\omega \circ \gamma)'(t)|\,\mathrm{d}t.$$
Or la dérivation terme à terme de la question 1 s'adapte parfaitement à la dérivation de l'application $\exp \circ \gamma$ (il suffit de se placer sur un compact et d'y majorer $|\gamma|$ et $|\gamma'|$ par leur maximum, qui existe par continuité et le théorème des bornes atteintes) et montre que l'on a : $(\exp \circ \gamma)' = \gamma' \exp \circ \gamma$. On en déduit, pour tout $(z_1, z_2) \in (\mathrm{D}_R)^2$:
$$\begin{aligned}|f_\omega(z_2) - f_\omega(z_1)| \leqslant \int_0^1 |\gamma'(t) - (\exp \circ \gamma)'(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 |z_2 - z_1 - (z_2 - z_1)\exp(\gamma(t))|\,\mathrm{d}t \\ &= |z_2 - z_1| \int_0^1 |1 - \exp(\gamma(t))|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{|z_2 - z_1|}{2},\end{aligned}$$
où la dernière majoration découle de celle obtenue plus haut, et qui est valable avec $z = \gamma(t)$ car γ est à valeurs dans D_R par convexité des boules fermées. Ceci montre que f_ω est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne donc contractante quand on la restreint à D_R.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
— Vérifier *vraiment* ce que je n'ai pas détaillé (la dérivabilité de $\exp \circ \gamma$ à l'aide de l'expression sous forme de série entière). Pourquoi ne me contenté-je pas de dire : « c'est dérivable par composition de fonctions dérivables » ?
— Retenir deux choses de cette question : 1° une façon de montrer qu'une application est lipschitzienne (normalement l'idée ne doit pas vous paraître totalement neuve, mais on se demandera en quelle circonstance on procède ainsi), 2° cette idée d'introduire un segment liant deux points pour se ramener à une fonction de la variable réelle, et lui appliquer l'inégalité des accroissements finis. Peut-on en déduire une version de l'inégalité des accroissements finis valable dans des espaces vectoriels normés quelconques ?

6. Nous voulons montrer l'existence de $r > 0$ tel que : $\mathrm{B}(1, r) \subseteq \exp(\mathbb{C})$. Cela revient à montrer l'existence de $r > 0$ tel que tout élément $\omega \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|\omega - 1| < r$ admette un antécédent par l'exponentielle. Or on a trivialement :
$$\forall \omega \in \mathbb{C}^*, \quad (\exists z \in \mathbb{C},\ \omega = \exp(z) \iff \exists z \in \mathbb{C},\ f_\omega(z) = z).$$

Nous aurons donc démontré le résultat voulu si nous parvenons à démontrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|\omega - 1| < r$, l'application f_ω admet un point fixe.
Or f_ω est une application contractante sur D_R ; si nous montrons qu'elle est aussi à valeurs dans D_R pour ω bien choisi, nous pourrons utiliser le théorème du point fixe de Banach-Picard pour en déduire l'existence de ce point fixe. Or d'après l'inégalité de la question précédente on a :

$$\forall z \in \mathrm{D}_R, \quad |f_\omega(z) - (1-\omega)| = |f_\omega(z) - f_\omega(0)| \leqslant \frac{|z|}{2} \leqslant \frac{R}{2},$$

donc par l'inégalité triangulaire :

$$\forall z \in \mathrm{D}_R, \quad |f_\omega(z)| \leqslant |f_\omega(z) - (1-\omega)| + |\omega - 1| \leqslant \frac{R}{2} + |\omega - 1|.$$

Prenons donc : $r = \dfrac{R}{2}$. Fixons $\omega \in \mathbb{C}^*$ tel que : $|\omega - 1| < r$. On a : $\forall z \in \mathrm{D}_R$, $|f_\omega(z)| \leqslant R$, donc f_ω induit une application contractante de D_R dans D_R. Or D_R est une partie fermée de $\mathbb{C}$ qui est un espace complet, donc D_R est complet (voir la remarque plus bas pour le détail de cette étape) ; par le théorème du point fixe de Banach-Picard, il existe un (unique) $z \in \mathrm{D}_R$ tel que : $f_\omega(z) = z$, et d'après les équivalences plus haut cela revient à l'existence de $z \in \mathrm{D}_R$ tel que : $\omega = \exp(z) \in \exp(\mathbb{C})$.
On a donc montré :

$$\exists r > 0,\ \forall \omega \in \mathrm{B}(1,r), \quad \omega \in \exp(\mathbb{C}),$$

donc : $\exists r > 0$, $\mathrm{B}(1,r) \subseteq \exp(\mathbb{C})$, ce qui démontre que 1 est à l'intérieur de $\exp(\mathbb{C})$ (relativement à $\mathbb{C}^*$). D'où le résultat.

Remarque. Justifions ici que si A est une partie fermée d'un espace complet E, alors A est complet : soit $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors cette suite est aussi de Cauchy dans E, donc elle converge dans E. Soit $\vec{\ell} \in E$ sa limite. Comme c'est la limite d'une suite à valeurs dans A, qui est fermé, on a : $\vec{\ell} \in A$, d'où le résultat : toute suite de Cauchy à valeurs dans A converge dans A.

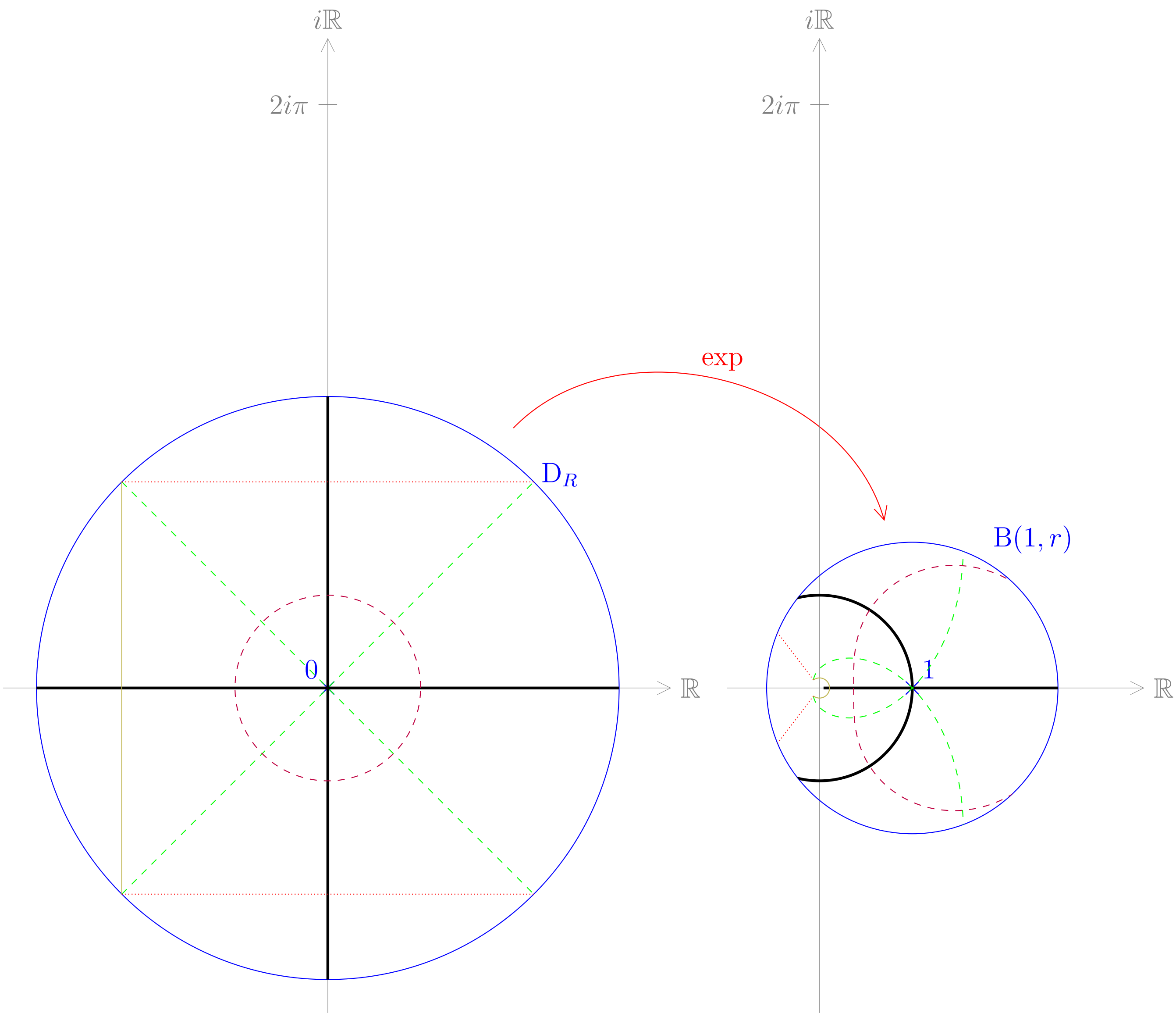
Remarque. Rappelons que le théorème du point fixe de Banach-Picard n'est pas du cours et que les espaces complets sont hors programme. Pour achever la démonstration dans les clous du programme, on reprend la démonstration de ce théorème ici : soient $u_0 \in \mathrm{D}_R$ et posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f_\omega(u_n)$. Cela définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans D_R, puisque cet ensemble est stable par f_ω. Comme f_ω est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne par la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant \frac{|u_n - u_{n-1}|}{2}$, et une récurrence facile permet alors de montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{|u_1 - u_0|}{2^n},$$

et donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_1 - u_0| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2|u_1 - u_0| < +\infty$. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument donc converge, et par le lien suite-série la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, et sa limite z est dans D_R puisque c'est un ensemble fermé (en tant que boule fermée). Par continuité de f_ω, l'égalité $u_{n+1} = f_\omega(u_n)$ donne, quand $n \to +\infty$, l'égalité : $z = f_\omega(z)$, donc z est un point fixe de f_ω, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. On a montré mieux que la simple surjectivité : l'unicité du point fixe assure que l'exponentielle induit une *bijection* d'un voisinage convenable de 0 (et en fait de n'importe quel point) dans un voisinage convenable de 1. Au fond vous le saviez déjà, puisque deux nombres complexes ayant même image par l'exponentielle complexe diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$; mais notez bien que cet exercice est traité dans un grand état de dépouillement vis-à-vis de ce que vous devez savoir de l'exponentielle complexe, et qu'il est donc intéressant de retrouver au moins en partie cela : cette question permettrait déjà de retrouver que les fibres de l'exponentielle doivent former des parties discrètes de $\mathbb{C}$ (en attendant la définition de π plus bas).

J'illustre la bijection en question ci-dessous. Pour mieux comprendre comment l'exponentielle opère sur les éléments de D_R, j'ai mis en évidence l'image par l'exponentielle de certains segments et cercles inclus dans D_R (en vérité, ces images sortent de $\mathrm{B}(1,r)$, mais je les ai tronquées pour ne pas gâter davantage la lisibilité). Vous devriez observer une propriété géométrique remarquable (quitte à regarder de très près), qui fait de l'exponentielle une transformation *conforme*. À quoi fais-je allusion ?



> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Avoir le réflexe qu'une application contractante, en dehors de la simple étude de suites vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$, sert à utiliser le théorème du point fixe.
> — Pourquoi était-il plus simple de montrer que f_ω admet un point fixe, plutôt que de chercher à montrer directement l'existence de z tel que $\omega = \exp(z)$? Répondre à cette question, c'est comprendre comment fut construite f_ω (comment l'aurait-on construite si l'on n'avait pas voulu montrer que 1 est intérieur à $\exp(\mathbb{C})$ par cette méthode, mais un autre point ?). Que nous a-t-il fallu, ultimement, pour montrer que f_ω est contractante ?
> — Aurait-on pu obtenir l'existence du point fixe en appliquant la méthode de Newton à $z \mapsto f_\omega(z) - z$? ou la surjectivité de l'exponentielle (au moins localement) en appliquant la méthode de Newton à $z \mapsto \exp(z) - \omega$?
> — Sur le dessin ci-dessus, sauriez-vous expliquer l'allure de chacune des images tracées ?

7. Soit $\omega \in \exp(\mathbb{C})$. Introduisons $z \in \mathbb{C}$ tel que : $\omega = \exp(z)$. On veut montrer que ω est intérieur à $\exp(\mathbb{C})$. L'idée est de se ramener au cas précédent par « translation » (au sens multiplicatif ici). On a en effet montré l'existence de $r > 0$ tel que : $\mathrm{B}(1, r) \subseteq \exp(\mathbb{C})$; or, si $\omega' \in \mathrm{B}\left(\omega, r\,|\omega|\right)$, alors :

$$\left|\omega'\omega^{-1} - 1\right| = \left|\omega^{-1}\right| |\omega' - \omega| < r,$$

donc : $\omega'\omega^{-1} \in \mathrm{B}(1, r) \subseteq \exp(\mathbb{C})$. On en déduit qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que : $\omega'\omega^{-1} = \exp(z')$, puis :

$$\omega' = \exp(z')\omega = \exp(z')\exp(z) = \exp(z' + z) \in \exp(\mathbb{C}).$$

En posant $r' = r\,|\omega| > 0$, on a donc montré : $\mathrm{B}(\omega, r') \subseteq \exp(\mathbb{C})$. Ceci vaut pour tout $\omega \in \exp(\mathbb{C})$, donc $\exp(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathbb{C}^*$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Comprendre pourquoi j'ai pensé à cette idée de « translation » pour me ramener à la boule $\mathrm{B}(1, r)$. Quelle propriété de l'exponentielle assurait la pertinence de cette idée ? Si vous avez compris, vous pouvez aussi expliquer pourquoi il s'agissait d'une translation au sens multiplicatif et non additif.
> — Songer à de nombreuses situations analogues en algèbre où l'on se contente de faire une vérification en 0 ou 1 pour avoir un résultat plus général. Y penser spontanément.

8. Comme l'exponentielle est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, son image $\exp(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Comme $\mathbb{C}^*$ est une réunion disjointe de ses classes d'équivalence pour la relation d'équivalence associée au sous-groupe $\exp(\mathbb{C})$, on a :

$$\mathbb{C}^* = \bigsqcup_{\bar{x} \in \mathbb{C}^*/\exp(\mathbb{C})} x\exp(\mathbb{C}),$$

d'où le résultat en prenant pour X un système complet de représentants de $\mathbb{C}^*/\exp(\mathbb{C})$ (et en prenant 1 pour représentant de la classe de 1). On en déduit :

$$\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \setminus \bigcup_{x \in X\setminus\{1\}} x\exp(\mathbb{C}).$$

Ainsi $\exp(\mathbb{C})$ est fermé dans $\mathbb{C}^*$ puisque c'est le complémentaire d'une réunion d'ouverts (qui est donc un ouvert). Le fait que $x\exp(\mathbb{C})$ soit un ouvert pour tout $x \in X \setminus \{1\}$ découle du fait que ce soit l'image réciproque de $\exp(\mathbb{C})$ par l'application $z \mapsto zx^{-1}$, qui est évidemment continue.

En conclusion : $\exp(\mathbb{C})$ est à la fois un ouvert et fermé relatif dans $\mathbb{C}^*$, qui est connexe en tant que partie connexe par arcs de $\mathbb{C}$: comme $\exp(\mathbb{C})$ est de plus non vide (on a $1 \in \exp(\mathbb{C})$), on a nécessairement : $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, donc l'exponentielle est surjective. D'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Est-ce que cette idée aurait aussi permis de montrer la surjectivité de l'exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$? (ou de $i\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$?) Et pourquoi aurait-on $\mathbb{R}_+^*$ au lieu de $\mathbb{R}^*$ si l'on voulait imiter cette démonstration dans le cas réel ? Quelle étape serait en défaut ?

— En fin de compte, quelles propriétés de l'exponentielle ont été utilisées ? Peut-on en déduire un énoncé plus général permettant de conclure à la surjectivité d'une application ? Voyez-vous d'autres fonctions de référence auxquelles l'appliquer ?

— Observer comment la connexité permit d'étendre globalement un résultat vrai localement (l'existence d'antécédents par l'exponentielle). C'est vraiment l'usage n° 1 de cette propriété.

9. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$, alors n'importe quelle valeur de t convient. Supposons donc : $z \neq 0$. Alors : $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{C}^*$, et comme l'exponentielle est surjective il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que : $\frac{z}{|z|} = \exp(\omega)$. Cependant $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$, donc par la question 4 on a : $\omega \in i\mathbb{R}$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\omega = it$, et on en déduit : $z = |z|\exp(it)$. D'où le résultat.

   Remarque. Vous n'aviez jamais démontré que tout nombre complexe non nul admet une forme exponentielle. C'est désormais chose faite. Un réel t vérifiant cette égalité est appelé un *argument* de z.

10. La propriété de morphisme de l'exponentielle, conjointement à la question 4, montrent que l'application $g : t \mapsto \exp(it)$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$. Son noyau est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, fermé puisqu'il est l'image réciproque par g du fermé $\{1\}$ (et g est continue par la question 1 et par composition avec $t \mapsto it$ qui est bien sûr continue) ; un tel sous-groupe est nécessairement de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \geqslant 0$.

    Il reste à démontrer que a est non nul. Il suffit pour cela de montrer que g n'est pas injective. Montrons-le en construisant deux antécédents de 1. Un premier antécédent est bien sûr 0, et un second va être construit à l'aide d'un antécédent de -1 : soit $t \in \mathbb{R}$ tel que : $-1 = \exp(it)$. Un tel réel t existe par la question précédente, et il est non nul. Alors : $g(2t) = (\exp(it))^2 = (-1)^2 = 1$, et $2t \neq 0$, ce qui montre bien que g n'est pas injectif. Ainsi : $\ker(g) \neq \{0\}$, et donc : $a \neq 0$. D'où le résultat, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\ker(g) = a\mathbb{Z}$, et cela veut bien dire :

    $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (\exp(it) = 1 \Longleftrightarrow t \in a\mathbb{Z}).$$

    L'unicité est triviale.

    L'implication réciproque de l'équivalence : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(\exp(z) = 1 \Longleftrightarrow z \in ia\mathbb{Z})$, en découle aussitôt. Pour le sens direct : si $\exp(z) = 1$, alors en particulier $\exp(z) \in \mathbb{U}$ et donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $z = it$, par la question 4. On est alors ramené à la situation précédente et on en déduit que si : $\exp(z) = 1$, alors : $t \in a\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à : $z \in ia\mathbb{Z}$. D'où le résultat.

    Remarque. La connaissance des sous-groupes de $\mathbb{R}$ n'est pas un résultat de cours. Retrouvons-la, sachant que l'on peut gagner du temps en utilisant le fait que $\ker(g)$ soit un sous-groupe fermé. On a montré plus haut que g n'est pas injectif, donc $\ker(g)$ contient un élément non nul, strictement positif quitte à remplacer un élément non nul par son opposé (qui appartient toujours à $\ker(g)$). Il est donc licite de poser : $a = \inf(\ker(g) \cap \mathbb{R}_+^*) \geqslant 0$. Comme $\ker(g)$ est fermé, en utilisant l'existence d'une suite minimisante on a : $a \in \ker(g)$, et a est non nul. En effet, dans le cas contraire pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existerait $x_n \in \ker(g)$ tel que : $0 < x_n < \frac{1}{n}$ (sinon $\frac{1}{n}$ contredirait la propriété de plus petit minorant de $a = 0$), et $t_n = \left(1 + \left\lfloor \frac{t}{x_n} \right\rfloor\right) x_n$ serait un élément de $\ker(g)$ compris strictement entre t et $t + \frac{1}{n}$; par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t$, et par continuité de g on aurait donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} g(t_n) = g(t)$, ce qui est absurde puisque $g(t) = -1 \neq 1$ tandis que $g(t_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (vu que $t_n \in \ker(g)$).

    Une fois établi que $a \in \ker(g) \cap \mathbb{R}_+^*$, voici comment conclure que $\ker(g) = a\mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \ker(g)$, on note que l'on a : $0 \leqslant x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a < a$, et : $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \in \ker(g)$. On a donc, pour ne pas contredire la minimalité de a, l'égalité : $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a = 0$, d'où : $x = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \in a\mathbb{Z}$. Ceci vaut pour tout $x \in \ker(g)$, donc : $\ker(g) \subseteq a\mathbb{Z}$. L'inclusion réciproque est immédiate : d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi t est effectivement non nul ?

— Pourquoi suis-je passé par $t \mapsto \exp(it)$ pour avoir l'existence de a, au lieu de raisonner directement sur le noyau de exp ?

— Observer comment j'ai adapté le raisonnement général donnant la structure des sous-groupes de $\mathbb{R}$, au contexte de cette question. En situation pratique, il est rarement utile de reproduire l'intégralité d'un raisonnement classique.

11. Pour répondre à cette question, nous aurons plusieurs fois à trancher des indéterminations sur le signe, ce qui n'est possible qu'en raisonnant avec des quantités réelles. C'est ce qui conduit à définir :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \overset{(q.\,3)}{=} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) \overset{(q.\,3)}{=} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Ce sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables grâce à la question 1 (facilement adaptée pour donner aussi la classe C^1 de $\theta \mapsto e^{i\theta}$). En particulier elles sont continues. Un calcul direct montre que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = \left| e^{i\theta} \right|^2 = 1,$$

de sorte qu'en connaissant la valeur de $\cos(\theta)$, on en déduit aisément $|\sin(\theta)|$, et donc $\sin(\theta)$ si le signe de cette quantité est connu (et de même en inversant les rôles du cosinus et sinus). C'est pourquoi nous nous échinons à connaître ce signe en premier lieu. Remarquons :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta) = 0 \iff e^{i\theta} = e^{-i\theta} \iff e^{2i\theta} = 1 \iff 2\theta \in 2\pi\mathbb{Z} \iff \theta \in \pi\mathbb{Z}.$$

On en déduit, par continuité, que le sinus est de signe constant sur $]0, \pi[$. On peut déterminer ce signe de bien des manières :

— soit en notant que $\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{2 \cdot n!} i^{n-1} \theta^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$, qui est une série alternée ; lorsque θ est au voisinage de 0 (en fait $0 \leqslant \theta \leqslant 3$ suffit), son terme général est absolument décroissant et converge vers 0, donc par le théorème spécial des séries alternées cette somme est du signe de son premier terme, à savoir $\theta > 0$;

— soit en notant que la dérivée du sinus en 0 est : $\sin'(0) = i\frac{1+1}{2i} = 1$, et donc par définition de la dérivée on a : $\sin(\theta) \underset{\theta \to 0^+}{\sim} \theta > 0$.

On a donc démontré que le sinus s'annule en 0 et π, tandis qu'il est strictement positif sur $]0, \pi[$. Passons maintenant au calcul de $\exp(i\theta)$ pour tout $\theta \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi \right\}$.

Calcul pour $\theta = \pi$. On a : $(\exp(i\pi))^2 = \exp(2i\pi) = 1$ par définition de π. Donc : $\exp(i\pi) \in \{-1,1\}$. Le cas $\exp(i\pi) = 1$ est exclu, puisque 2π engendre le noyau de $t \mapsto e^{it}$ et π n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$ (car $\pi > 0$). On a donc : $\exp(i\pi) = -1$.

Calcul pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. On a : $\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \exp(i\pi) = -1$, donc il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ tel que : $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon i$. Pour déterminer ε, on prend la partie imaginaire dans l'égalité précédente, pour obtenir : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon$. Or $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$, donc : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Ceci impose : $\varepsilon = 1$, puis : $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$.

Ce calcul montre en passant : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$. Or :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos'(\theta) = \frac{i\exp(i\theta) - i\exp(-i\theta)}{2} = -\frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i} = -\sin(\theta),$$

donc : $\forall \theta \in]0,\pi[$, $\cos'(\theta) < 0$. On en déduit que le cosinus est strictement décroissant sur $[0,\pi]$ en plus d'être continu : il s'annule une unique fois, et c'est en $\frac{\pi}{2}$ par le calcul qui précède. À ce stade du raisonnement, nous avons déjà une connaissance exhaustive des signes du cosinus et du sinus sur $[0,\pi]$:

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0

Calcul pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. On peut imiter le raisonnement fait ci-dessus. Il reviendrait ici à chercher les racines carrées complexes de i. On y parviendrait en cherchant à résoudre $(a+ib)^2 = i$, d'inconnues a et b réels, en identifiant parties réelles et parties imaginaires puis en se ramenant à des équations polynomiales du second degré. Je vais utiliser une approche moins calculatoire, profitant de ma connaissance *a priori* du résultat sur lequel on doit tomber. On a :

$$\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \left(\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) + \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\right)^2 = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) + 2 + \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = 2,$$

donc : $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, et comme : $\frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, le tableau de signe ci-dessus implique : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient le sinus soit en raisonnant de même, soit en écrivant :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et donc : $\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Calcul pour $\theta = \frac{\pi}{3}$. On a :

$$0 = \exp(i\pi) + 1 = \left(\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) + 1\right)\left(\left(\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)\right)^2 - \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) + 1\right),$$

donc $\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)$ est racine du polynôme $X^2 - X + 1$. Son discriminant est $-3 < 0$, donc ses racines sont $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Pour trancher entre ces deux racines, on note que $\mathrm{Im}\left(\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$ d'après l'étude de signe ci-dessus, donc :

$$\exp\left(\frac{i\pi}{3}\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Calcul pour $\theta = \frac{\pi}{6}$. On a :

$$\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{3}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right) = i\overline{\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)},$$

donc le calcul ci-dessus donne : $\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

Calcul pour $\theta \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\exp(i(\pi-\theta)) = \exp(i\pi)\exp(-i\theta) = -\overline{\exp(i\theta)}$$

En appliquant cette égalité avec $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$, on obtient :

$$\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Conclusion. On a obtenu le tableau de valeurs suivant :

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\exp(i\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	i	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$	-1

Remarque. Nos manipulations pour la détermination des différentes valeurs de $\exp(i\theta)$ sont purement algébriques (on ne fait qu'utiliser le fait qu'il définisse un morphisme dont on connaît le noyau), hormis pour la détermination des différents signes où nous avions besoin d'arguments analytiques. Cela implique qu'en particulier qu'elles se généralisent à d'autres anneaux. Par exemple, si a est un élément d'ordre 8 dans $A^\times$, où A est un anneau intègre (ce serait l'analogue de $\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)$ ici), alors $a + a^{-1}$ devrait donner une racine carrée de $2 \cdot 1_A$. Pensons par exemple à la matrice de rotation de mesure d'angle $\frac{\pi}{4}$:

$$R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $R\left(\frac{\pi}{4}\right) + R\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} = R\left(\frac{\pi}{4}\right) + R\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont le carré donne bien $2\mathrm{I}_2$.

Autre exemple dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$: un élément d'ordre 8 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ est $\bar{2}$ (on a : $2^4 \equiv -1 \bmod 17$, et : $2^8 \equiv 1 \bmod 17$), et : $\bar{2} + \bar{2}^{-1} = \bar{2} + \bar{9} = \overline{11}$, dont on vérifie que c'est une racine carrée de 2 puisque : $\overline{11}^2 = (-\bar{6})^2 = \overline{36} = \bar{2}$.

Cette idée est utilisée dans le DST n$^{\text{o}}$ 4, pour montrer que 2 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv \pm 1 \bmod 8$ (voir mes commentaires de ce devoir).

Je l'ai souvent formulé : une identité algébrique a de fortes chances de se généraliser à tout anneau (éventuellement intègre, ou commutatif, cela dépend de ce dont on a besoin) ! Faites preuve de hauteur et osez vous inspirer du cas réel ou complexe pour résoudre certains problèmes dans des anneaux abstraits !

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Bien comprendre ce qui a motivé l'introduction des cosinus et sinus. Pour se convaincre de leur importance : comment auriez-vous tranché le signe lors du calcul de $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, sans y recourir ?

— Vérifier l'expression proposée du sinus sous forme de série, et que le théorème spécial des séries alternées est effectivement utilisable ici.

— On a donné les valeurs de l'exponentielle pour les mesures d'angle remarquables entre 0 et π. Et en dehors de cet intervalle ? A-t-on tous les ingrédients nécessaires pour retrouver tout ce que vous connaissez ?

— Est-ce que l'interprétation géométrique du cosinus et du sinus (abscisse et ordonnée des points du cercle trigonométrique, ou relations dans un triangle rectangle) se retrouve à partir de notre étude ?

— Vous avez découvert π comme étant le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre (ou la variante avec l'aire). Pourquoi cette définition n'était-elle pas convenable ? Peut-on retrouver cette interprétation de π à l'aide de la définition ici donnée ?

— Pourquoi l'hypothèse d'intégrité sur A, dans la remarque ci-dessus ? Où cela intervient-il ?

Problème

Origine géométrique des séries de Fourier.

1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est évidemment à valeurs dans $\mathbb{R}$, clairement bilinéaire par linéarité de l'intégrale (et distributivité du produit par rapport à l'addition) et symétrique par commutativité du produit de fonctions réelles. Montrons qu'elle est définie positive.

   Soit $f \in E$. On a :
$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \mathrm{d}t \geqslant 0,$$
   car $t \mapsto (f(t))^2$ est positive en tant que fonction réelle au carré, et par croissance de l'intégrale. On suppose à présent : $\langle f, f \rangle = 0$, et on veut montrer que f est la fonction nulle. Pour cela, introduisons une subdivision de $[-\pi, \pi]$ en sous-intervalles où les restrictions de f sont continues, afin d'utiliser la propriété de séparation de l'intégrale : soit $(a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille strictement croissante de réels telle que $a_0 = -\pi$, $a_n = \pi$, et telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ se prolonge en une application continue $\tilde{f}_i$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Une telle subdivision existe par définition d'une application continue par morceaux. Alors :
$$0 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\tilde{f}_i(t))^2 \mathrm{d}t.$$
   Par croissance de l'intégrale, chaque terme de la somme ci-dessus est positif. Or une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme est nul. On en déduit : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} (\tilde{f}_i(t))^2 \mathrm{d}t = 0$. Or, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, l'application $t \mapsto (\tilde{f}_i(t))^2$ est CONTINUE, positive et d'intégrale nulle sur $[a_i, a_{i+1}]$, donc par propriété de séparation de l'intégrale : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\tilde{f}_i = 0$. Mais on se souvient que, par définition des $\tilde{f}_i$, on a : $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$, $\tilde{f}_i(x) = f(x)$. La nullité des $\tilde{f}_i$ implique donc :
$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad f(x) = 0,$$
   ou encore, formulé de manière équivalente :
$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}, \quad f(x) = 0.$$
   Il reste à justifier que f s'annule également en $a_0, \ldots, a_n$. C'est là qu'on utilise la définition de E. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a :
$$f(a_i) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0^+} \left(f(a_i + h) - f(a_i - h) \right).$$
   Or, pour tout h strictement positif et suffisamment petit (pour avoir $a_i + h \in]a_i, a_{i+1}[$ et $a_i - h \in]a_{i-1}, a_i[$; cela revient à prendre $0 < h < \min(a_{i+1} - a_i, a_i - a_{i-1})$, du moins pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, mais le cas $i \in \{0, n\}$ est analogue), on a $f(a_i + h) = f(a_i - h) = 0$ d'après ce qui précède. Donc : $f(a_i + h) + f(a_i - h) = 0$, et on en déduit : $f(a_i) = 0$. On peut conclure :
$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = 0,$$
   et par 2π-périodicité on en déduit que $\langle f, f \rangle = 0$ implique $f = 0$. Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie, en plus d'être une forme bilinéaire symétrique positive : c'est donc un produit scalaire sur E.

   Questions à se poser, réflexes à acquérir. Bien noter comment j'expédie la plupart des vérifications rapidement pour me concentrer sur la propriété de séparation. Ne pas y oublier l'hypothèse de continuité, tout à fait essentielle.

2. Soit $g \in E$ la limite pour $\|\cdot\|_\infty$ de $(f_n)_{n\geqslant 0}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n - g\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f_n-g)^2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\|f_n-g\|_\infty)^2} = \|f_n-g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty}\|f_n-g\| = 0$, donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans $(E,\|\cdot\|)$ vers g.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Faire le lien avec les différents laïus du cours sur l'équivalence des normes. Les deux normes ci-dessus le sont-elles, d'ailleurs ?

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour montrer que la famille $(C_0, C_1, \ldots, C_N, S_1, \ldots, S_N)$ est orthogonale, il suffit de montrer que :
   — la famille $(C_0, C_1, \ldots, C_N)$ est orthogonale ;
   — la famille $(S_1, \ldots, S_N)$ est orthogonale ;
   — pour tout $(k,\ell) \in [\![0,N]\!]\times[\![1,N]\!]$, on a : $\langle C_k, S_\ell\rangle = 0$.

   Faisons. Commençons par le dernier point. Soit $(k,\ell) \in [\![1,N]\!]\times[\![1,N]\!]$ (le cas $k=0$ sera aisément étudié par le lecteur). On a :

$$\langle C_k, S_\ell\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\sin(\ell t)\mathrm{d}t,$$

   or $t \mapsto \cos(kt)\sin(\ell t)$ est une fonction impaire. Une fonction impaire est d'intégrale nulle sur un intervalle centré en 0, donc : $\langle C_k, S_\ell\rangle = 0$. Ensuite, on montre simultanément l'orthogonalité des familles $(C_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ et $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ en notant que si $k \neq \ell$, alors :

$$\begin{aligned}\langle C_k, C_\ell\rangle + \langle S_k, S_\ell\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(kt)\cos(\ell t)+\sin(kt)\sin(\ell t)\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((k-\ell)t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((k-\ell)t)}{k-\ell}\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= 0,\end{aligned}$$

   car le sinus s'annule en les multiples de π, et de même :

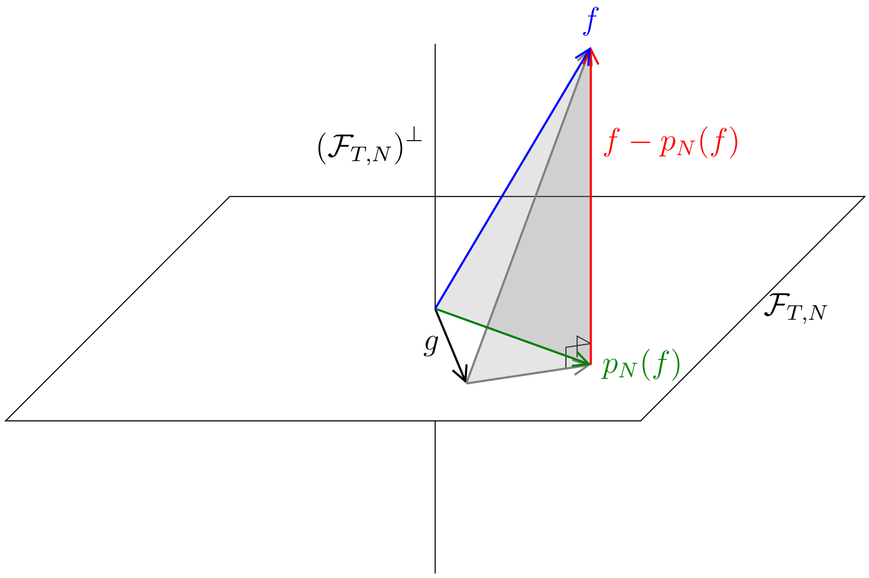
$$\begin{aligned}\langle C_k, C_\ell\rangle - \langle S_k, S_\ell\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(kt)\cos(\ell t)-\sin(kt)\sin(\ell t)\right)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((k+\ell)t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((k+\ell)t)}{k+\ell}\right]_{-\pi}^{\pi}\\ &= 0,\end{aligned}$$

   En sommant ces deux égalités, on a : $\langle C_k, C_\ell\rangle = 0$. En les soustrayant : $\langle S_k, S_\ell\rangle = 0$. Ceci vaut pour tous k et ℓ distincts, donc les familles $(C_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ et $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ sont orthogonales. Ayant vérifié les trois items ci-dessus, on en déduit que la famille $(C_0, C_1, \ldots, C_n, S_1, \ldots, S_n)$ est orthogonale. On vérifie que ses vecteurs sont unitaires :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \langle C_k, C_k\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(kt))^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(2kt))\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[t+\frac{\sin(2kt)}{2k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1,$$

   le cas $k=0$ donnant trivialement la même chose, et de même : $\langle S_\ell, S_\ell\rangle = 1$. Ainsi $(C_0, C_1, \ldots, C_N, S_1, \ldots, S_N)$ est une famille génératrice et orthonormée de $\mathcal{F}_{T,N}$, nécessairement libre comme toute famille orthonormée, donc c'en est une base orthonormée. On en déduit que

FIGURE 1 – Distance au sous-espace vectoriel $\mathcal{F}_{T,N}$.



si $p_N : E \to E$ désigne le projecteur orthogonal de E sur $\mathcal{F}_{T,N}$, qui est bien défini car $\mathcal{F}_{T,N}$ est de dimension finie, on a :

$$\forall f \in E, \quad p_N(f) = \sum_{n=0}^{N} \langle C_n, f\rangle\, C_n + \sum_{n=1}^{N} \langle S_n, f\rangle\, S_n = \sum_{n=0}^{N} a_n(f) C_n + \sum_{n=1}^{N} b_n(f) S_n = \mathscr{S}_N(f).$$

Or on sait que le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fournit les vecteurs minimisant la distance à ce sous-espace. C'est-à-dire :

$$\forall g \in \mathcal{F}_{T,N}, \quad \|f - p_N(f)\| \leqslant \|f - g\|,$$

ce qui fournit l'inégalité demandée puisque $p_N(f) = \mathscr{S}_N(f)$.

Remarque. C'est cette question qui motive la définition d'une série de Fourier : c'est la fonction qui minimise l'écart entre f et l'espace des fonctions trigonométriques (au sens de $\|\cdot\|$). C'est donc la plus susceptible de converger vers f.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Réviser si besoin les propriétés de base des projecteurs orthogonaux.

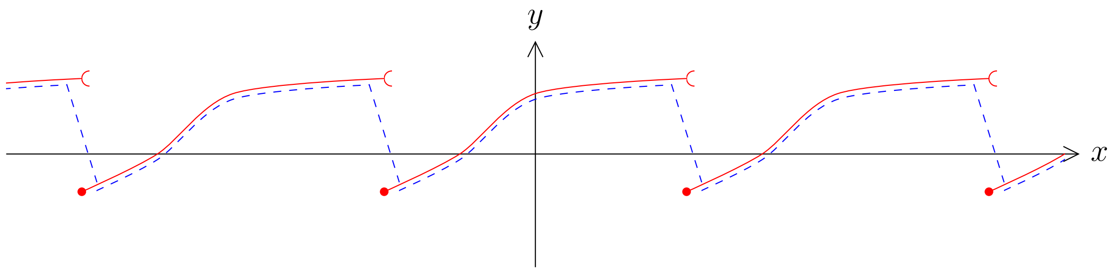
— Noter le gain de temps considérable (dans cette question et les suivantes) lorsqu'on utilise la parité pour détecter rapidement une intégrale nulle.

— Auriez-vous pu démontrer l'orthogonalité des C_k entre eux, et des S_k entre eux, par un autre moyen ?

— Pourriez-vous sur le même modèle obtenir une approximation explicite d'une fonction continue quelconque sur un segment par des applications polynomiales ? Pourquoi le théorème de Weierstraß n'adopte pas une telle approche d'explicitation ? Comprendre, à la lumière de cette question, ce qui fait que le cadre naturel des séries de Fourier est *géométrique*, alors que ce n'est pas le cas pour d'autres séries.

— Que peut-on dire de la monotonie de la suite $(\|f - \mathscr{S}_N(f)\|)_{N\in\mathbb{N}}$? Qu'est-il tentant de conjecturer ? Faire le lien avec la question suivante.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Il est facile de se convaincre qu'il existe une fonction g *continue* et 2π-périodique telle que : $\|g - f\| \leqslant \varepsilon$ (la construction explicite est fastidieuse et peu intéressante à détailler : il suffit de légèrement modifier f autour de ses points de discontinuité ainsi que sur le graphe ci-dessous).



Par le théorème de Weierstraß trigonométrique, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathcal{F}_{T,N}$ tels que : $\|g-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Or, comme on l'a vu à la question 2, on a : $\|g-P\| \leqslant \|g-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$, donc d'après la question 3 on a :

$$\|f - \mathscr{S}_N(f)\| \leqslant \|f-P\| \leqslant \|f-g\| + \|g-P\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Or, pour tout $N' \geqslant N$, on a : $\mathscr{S}_N(f) \in \mathcal{F}_{T,N'}$, donc : $\|f - \mathscr{S}_{N'}(f)\| \leqslant \|f - \mathscr{S}_N(f)\| \leqslant 2\varepsilon$. On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall N' \in \mathbb{N}, \quad N' \geqslant N \implies \|f - \mathscr{S}_{N'}(f)\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Cela signifie exactement que $(\mathscr{S}_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ vers f : d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Faire la construction de g que j'ai omise.
- Observer ici une utilisation *pratique* de la comparaison entre normes (cela revient dans la question 7).
- Pourquoi passer par la fonction g ? Ne peut-on pas approcher directement f par une fonction trigonométrique ?
- Pourquoi être revenu à la définition de limite, au lieu d'introduire une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions trigonométriques convergeant vers g dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

5. Pour obtenir l'égalité demandée, nous avons besoin de la question précédente : on a $\mathscr{S}_N(f) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $(E, \|\cdot\|)$ et donc, par continuité de la norme : $\|\mathscr{S}_N(f)\|^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|^2$. Or la norme de $\mathscr{S}_N(f)$ se calcule aisément puisque $\mathscr{S}_N(f)$ est exprimé dans une base orthonormée. Sa norme au carré est alors la somme des coordonnées au carré, c'est-à-dire :

$$\forall N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \|\mathscr{S}_N(f)\|^2 = (a_0(f))^2 + \sum_{n=1}^{N}\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right) = \sum_{n=0}^{N}\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right),$$

et donc la limite ci-dessus équivaut à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right) = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat : on a démontré la formule de Parseval (et en même temps la sommabilité demandée).

La formule reste valable même si f n'est pas dans E mais seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. En effet, il suffit dans ce cas d'introduire sa régularisée $\tilde{f} : x \mapsto \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$: elle coïncide avec f en tout point de continuité de f et ne diffère de f qu'en les points de discontinuité, qui sont en nombre fini sur $[-\pi,\pi]$. Comme elle appartient à E, on peut appliquer la formule de Parseval à $\tilde{f}$; comme deux fonctions différant en un nombre fini de points ont même intégrale, on en déduit que f vérifie la même formule.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Réviser si besoin les propriétés des bases orthonormées utilisées.
- La norme 2 n'a qu'une toute petite place dans le chapitre de topologie. Cette question et la précédente vous donnent un exemple concret de son utilisation, là où les autres normes n'auraient pas le même mérite : pourquoi ce qu'on a fait là n'aurait pas pu être imité avec la norme 1 ou la norme infinie ?

6. Comme l'application $f \mapsto (a_n(f), b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire, il suffit de montrer que son noyau ne contient que la fonction nulle. Soit $f \in E$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = b_n(f) = 0$. Par la formule de Parseval :
$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2\right) = 0.$$
Par propriété de séparation de la norme : $f = 0$, d'où le résultat.
Remarque. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) + ib_n(f) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\mathrm{d}t$ (formule analogue pour $a_n(f) - ib_n(f)$), cette question permet d'affirmer que si f et g sont deux fonctions de E telles que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}\mathrm{d}t,$$
alors : $f = g$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** La remarque doit vous faire penser à un exemple traité dans le chapitre d'intégration. Auriez-vous pu procéder comme dans ce chapitre, au lieu de passer par la formule de Parseval ?

Condition suffisante de convergence uniforme d'une série de Fourier vers la fonction associée.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a clairement, en majorant le cosinus et le sinus par 1 :
$$|u_n(f)(x)| \leqslant \sqrt{2}\left(|a_n(f)| + |b_n(f)|\right),$$
donc :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n(f)\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(f)| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n(f)|\right) < +\infty.$$
Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément. Notons g la limite dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ de cette série. D'après la question 2, cette série converge également vers g dans $(E, \|\cdot\|)$, et d'après la question 5 cette série (qui n'est rien d'autre que la série de Fourier de f) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_2)$. Par unicité de la limite : $f = g$, ce qui montre que $\sum_{n\geqslant 0} u_n(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.
Remarque. En particulier, f doit être continue en tant que limite uniforme de fonctions continues. Il est intéressant de voir que la taille des coefficients de Fourier de f conditionne sa régularité (et cela se généralise à la classe C^k).

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Bien noter une autre utilisation décisive de la comparaison entre les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$.
> — Pouvez-vous expliciter ce que je dis dans ma remarque ? Si f est de classe C^k, que peut-on dire de la taille des coefficients de Fourier de f ?

Première application : calcul de sommes remarquables.

8. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et est donc dans E. Par parité de f on a :
$$\begin{aligned} a_n(f) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\mathrm{d}t &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t\right) \quad \text{(intégration par parties)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \end{aligned}$$

Si $n=0$, on a sobrement : $a_0(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi t\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}$.
Le calcul de $b_n(f)$ est immédiat : la fonction $t\mapsto f(t)\sin(nt)$ est impaire en tant que produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire, donc : $b_n(f)=0$.
Pour en déduire la valeur des sommes demandées : comme les familles $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ sont manifestement sommables (la série de Riemann d'exposant $2>1$ converge), on peut appliquer la question précédente. La convergence uniforme implique la convergence simple, donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(f)(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cdot\sqrt{2}\cos(nx)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos(nx).$$

En ne retenant que les termes non nuls de la somme, cela donne :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x).$$

Posons $x=0$ et isolons la somme cherchée. On obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-f(0)\right)=\frac{\pi^2}{8}.$$

Par le théorème de sommation par paquets, appliqué aux paquets $\mathbb{N}=(2\mathbb{N})\bigsqcup(2\mathbb{N}+1)$ (et qu'on peut utiliser sans contrainte si l'on somme des réels positifs), on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

donc :

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Comme : $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Pour obtenir la somme des inverses des bicarrés, nous utilisons la formule de Parseval. Elle donne ici :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n(f))^2=\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4},$$

qui implique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2\mathrm{d}t-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\pi^3}{3\pi}-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^4}{96}.$$

En utilisant comme plus haut le théorème de sommation par paquets, on conclut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\left(1-\frac{1}{2^4}\right)^{-1}\cdot\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Peut-on généraliser le lien entre la parité de f et ses coefficients de Fourier ?
- Est-ce que cette méthode se généralise aisément au calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ pour $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ quelconque ? Et au cas d'un exposant impair ?

Deuxième application : formule sommatoire de Poisson et inversion de Fourier.

9. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. L'application f est continue sur $\mathbb{R}$, et on a par définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (avec $p = 0$ et $n = 2$) : $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Or la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$ car $2 > 1$, donc par comparaison des intégrales de fonctions positives il en est de même de f. D'où l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$, et : $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   Remarque. L'ensemble de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est l'espace des *fonctions de Schwartz* (avec un t !).

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème de sommation par paquets (avec : $\mathbb{Z} = \{0\} \sqcup \bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty}\{n, -n\}$), la famille $(f(x+2\pi n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si la famille $(f(x))\cup(f(x+2\pi n)+f(x-2\pi n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ l'est. Or la relation de prépondérance de la question précédente, adaptée ici, donne :

$$f(x + 2\pi n) + f(x - 2\pi n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$ donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(f(x + 2\pi n) + f(x - 2\pi n))$ converge absolument, ce qui équivaut à la sommabilité de $(f(x)) \cup (f(x + 2\pi n) + f(x - 2\pi n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Ainsi $\tilde{f}$ est bien définie, et on a par ailleurs cette double expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(x + 2\pi n) + f(x - 2\pi n)).$$

Nous nous servirons souvent, dans la suite du problème, de cette écriture alternative pour nous ramener à des séries.

La 2π-périodicité de $\tilde{f}$ découle immédiatement de la formule du changement d'indice avec l'application $n \mapsto n + 1$ qui permute $\mathbb{Z}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x + 2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi + 2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi(n + 1)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n) = \tilde{f}(x).$$

Pour la continuité de f sur $\mathbb{R}$, il suffit de la vérifier sur $[-\pi, \pi]$. Nous allons montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} (x \mapsto f(x + 2\pi n) + f(x - 2\pi n))$ *via* la convergence normale, en raffinant la relation de domination plus haut (afin de s'assurer qu'il n'y a pas de dépendance en x dans nos majorations). Soit $A \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant A \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ (un tel réel existe vu que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$). Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que : $2\pi n - \pi \geqslant A$, on a en particulier $|2\pi n + x| = 2\pi n + x \geqslant A$ et $|x - 2\pi n| = 2\pi n - x \geqslant A$, donc :

$$\begin{aligned}|f(x + 2\pi n) + f(x - 2\pi n)| \leqslant |f(x + 2\pi n)| + |f(x - 2\pi n)| &\leqslant \frac{1}{(x + 2\pi n)^2} + \frac{1}{(x - 2\pi n)^2} \\ &\leqslant \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{(2n - 1)^2}.\end{aligned}$$

Cette majoration est indépendante de x. Par propriété de la borne supérieure, on a pour tout entier $n \geqslant \dfrac{A + \pi}{2\pi}$:

$$\|x \mapsto f(x + 2\pi n) + f(x - 2\pi n)\|_\infty \leqslant \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{(2n - 1)^2}. \qquad (\bigstar)$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ converge, puisque : $\frac{1}{(2n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} (x \mapsto f(x+2\pi n) + f(x-2\pi n))$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$. De plus son terme général est continu sur $[-\pi, \pi]$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $\tilde{f}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ en tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues, puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Remarque. Le procédé de l'énoncé (fabriquer une fonction périodique à partir d'une fonction quelconque) se généralise : moyenner, c'est créer de l'invariance. C'est-à-dire, si l'on considère une représentation linéaire (c'est-à-dire un morphisme $\varphi : G \to \mathrm{GL}(E)$ où G est un groupe et E un espace vectoriel), alors pour tout $x \in E$ l'objet :

$$\sum_{g\in G} \varphi(g)(x)$$

s'il a un sens (et s'il n'y a pas de problème de discontinuité ; question qui ne se pose pas en cas de groupe fini), est invariant par φ, au sens où : $\forall g' \in G$, $\varphi(g')\left(\sum_{g\in G} \varphi(g)(x)\right) = \sum_{g\in G} \varphi(g)(x)$. On utilise pour cela la linéarité de $\varphi(g)$ et le fait que : $\forall (g, g') \in G^2$, $\varphi(g') \circ \varphi(g) = \varphi(g'g)$. Comme $g \mapsto g'g$ permute le groupe G, on en déduit la relation voulue.

En prenant pour φ l'application définie par : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\varphi(k)(f) = x \mapsto f(x+2k\pi)$, on retrouve bien la définition de la régularisée d'une fonction.

On utilise souvent cette observation en théorie des groupes (calcul de sommes indexées par des sommes finies).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Je me suis restreint à $[-\pi, \pi]$ pour mon étude de la convergence uniforme. Pourquoi ? Qu'est-ce qui m'aurait embêté sur $\mathbb{R}$?

— Appliquer la remarque ci-dessus à d'autres opérations φ pour se convaincre de sa pertinence. Elle est très utile en bien des circonstances (non nécessairement algébriques, la preuve ici).

— Pourquoi, dans la remarque ci-dessus, parlé-je de « problème de discontinuité » ? Si vous ne voyez pas : lire ma remarque de la question 3.

11. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On aimerait montrer, sous réserve que les calculs soient licites :

$$\begin{aligned}
a_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad (*) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} f(u)\cos(n(u-2\pi k))\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

tandis que $a_0(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$, et par un calcul analogue : $b_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(nu)\mathrm{d}u$.

La seule étape potentiellement litigieuse est l'égalité $(*)$, puisqu'il s'y pose un problème d'interversion. Pour cela : on se ramène déjà à des séries de fonctions classiques en écrivant, grâce au théorème de sommation par paquets (dont on justifie qu'il s'applique ci-dessous) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} f(t+2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} f(t-2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t \qquad (\dagger)$$

La scission de cette somme est licite à condition que la famille $(f(t+2\pi k)\cos(nt))_{k\in\mathbb{Z}}$ soit sommable. C'est le cas puisque :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(t+2\pi k)\cos(nt)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(t+2\pi k)|$$

et on a justifié dans la question précédente que cette dernière somme a une valeur finie. Ceci étant dit : nous allons utiliser le théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment avec les deux intégrales de (†). Posons : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[-\pi,\pi]$, $g_k(t)=f(t+2\pi k)\cos(nt)$. Alors :

— pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'application g_k est continue sur $[-\pi,\pi]$;

— la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} g_k$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi,\pi]$, puisqu'en reprenant le raisonnement (★) de la question précédente on a : $\|g_k\|_\infty = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, et on conclut par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k^2}$.

Les hypothèses du théorème d'interversion s'appliquent et on peut en particulier écrire : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} g_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_k$. On fait de même avec la seconde intégrale de (†). Cela assure que l'on a, grâce à l'interversion et en imitant les calculs plus haut :

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t+2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-2\pi k)\cos(nt)\mathrm{d}t\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-\pi-2\pi k}^{\pi-2\pi k} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u\\
&= \int_{-\pi}^{+\infty} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{-\pi} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer : $a_n(f) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u$. On obtient de même $b_n(f)$. En conclusion :

$$a_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u,\quad b_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(nu)\mathrm{d}u.$$

Pour $n=0$, on a bien sûr $b_0(\tilde{f})=0$, et par le même raisonnement : $a_0(\tilde{f}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\pi}\hat{f}(0)$. On remarque que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n(\tilde{f}) + ib_n(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{int}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(-n),$$

et de même : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a_n(\tilde{f}) - ib_n(\tilde{f}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(n)$. On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad a_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\hat{f}(-n)+\hat{f}(n)\right),\quad b_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}i}\left(\hat{f}(-n)-\hat{f}(n)\right).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. À l'instar de ce que j'ai fait dans cette question et la précédente, peut-on généraliser tout le vocabulaire et tous les résultats sur les séries de fonctions (modes de convergence, théorèmes d'interversion) à des sommes indexées par $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, etc. ?

12. D'après l'énoncé on a : $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, donc facilement : $\hat{f}(n) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et : $\hat{f}(-n) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Les égalités de la question précédente donnent donc :

$$a_n(\tilde{f}) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad b_n(\tilde{f}) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc les familles $(a_n(\tilde{f}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(\tilde{f}))_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables. Par la question 7, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(\tilde{f})$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$. En particulier il y a convergence simple, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(a_n(\tilde{f})C_n(x) + b_n(\tilde{f})S_n(x)\Big).$$

Posons $x = 0$. On a : $\tilde{f}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)$, et :

$$C_0(0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ C_n(0) = \sqrt{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n(0) = 0,$$

donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = a_0(\tilde{f}) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\Big)\right).$$

Comme la famille $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable d'après les relations de domination ci-dessus, et que : $\mathbb{N} = \{0\} \sqcup \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{n,-n\}$, le théorème de sommation par paquets permet de réécrire cette égalité ainsi :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

d'où le résultat.

Remarque. En appliquant cette formule à $x \mapsto \exp(-\alpha x^2)$ (avec une bonne valeur de α), dont on a calculé la transformée de Fourier dans le DM n° 2, on obtient cette formule célèbre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-xn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\frac{(\pi n)^2}{x}}.$$

Elle est notamment utilisée de manière décisive pour démontrer l'équation fonctionnelle de la fonction dzêta de Riemann.

Remarque. Si l'énoncé fait admettre que $\hat{f}$ est bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, ce n'est pas parce que c'est difficile mais parce que c'est assez long (dans un devoir déjà long). Montrons-le ici. On va commencer par montrer que $\hat{f}$ est de classe C^∞, en montrant que c'est une application de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$. Posons :

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,\xi) = f(x)e^{-ix\xi}.$$

Alors :

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto g(x,\xi)$ est de classe C^∞ et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(x,\xi) = (-ix)^p f(x) e^{-ix\xi}\,;$$

— pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto \frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(x,\xi)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;

— pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\left|\frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(x,\xi)\right| = |x^p f(x)|, \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $x \mapsto |x^p f(x)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$ parce que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$: ceci démontre à la fois l'intégrabilité de toutes les dérivées partielles de g par rapport à ξ, et l'hypothèse de domination.

Par le théorème de classe C^p des intégrales à paramètres, l'application $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x,\xi)\mathrm{d}\xi$ est de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ (donc de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}^{(p)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(x,\xi)\mathrm{d}x = (-i)^p \int_{\mathbb{R}} x^p f(x) e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

Justifions à présent que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \xi^n \hat{f}^{(p)}(\xi) = 0$. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $\xi \in \mathbb{R}^*$. Notons g_p l'application $x \mapsto x^p f(x)$. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Intégrons par parties $\hat{f}^{(p)}(\xi)$, en dérivant g_p et en intégrant $x \mapsto e^{-ix\xi}$. L'existence du terme entre crochets est vérifiée puisque, f étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et l'exponentielle complexe bornée :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^p f(x)}{-i\xi} e^{-ix\xi} = 0,$$

donc :

$$\hat{f}^{(p)}(\xi) = \frac{(-i)^p}{i\xi} \int_{\mathbb{R}} g_p'(x) e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

On recommence n fois. Par la formule de dérivation de Leibniz, $g_p^{(k)}$ est, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto x^\ell f(x)$, qui tendent vers 0 en $\pm\infty$ car f est une fonction de Schwartz. Cela assure l'existence (et nullité) du terme entre crochets. On a alors :

$$\hat{f}^{(p)}(\xi) = \frac{(-i)^p}{(i\xi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} g_p^{(n+1)}(x) e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

On en déduit :

$$0 \leqslant \left|\xi^n \hat{f}^{(p)}(\xi)\right| \leqslant \frac{1}{\xi} \int_{\mathbb{R}} \left|g_p^{(n+1)}(x)\right| \mathrm{d}x \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \xi^n \hat{f}^{(p)}(\xi) = 0$, d'où le résultat : $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Vérifier la formule annoncée dans la première remarque ci-dessus.
- On note que les hypothèses du théorème de classe C^p des intégrales à paramètres ne sont pas exactement formulées de la même manière dans le cours, et dans la remarque ci-dessus. S'assurer que je ne commets pas d'impair.
- Vérifier effectivement que toutes les dérivées de g_p sont aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, de sorte que l'existence du terme entre crochets ne pose problème à aucune étape de nos intégrations par parties.
- Plus généralement, noter que $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel stable par multiplication par $x \mapsto x^n$. Est-il stable par produit interne ? Par dérivation ? etc.

13. Soit $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$, que l'on fixe. La forme du membre de gauche de l'égalité à démontrer, comparée à la formule de Poisson, incite à poser :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = f(x+t) e^{-i\frac{t}{2\pi}\xi}.$$

Vérifions que cela donne bien l'identité voulue. Tout d'abord, le fait que f soit dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ implique facilement que g l'est aussi : nous vous laissons le vérifier. En appliquant la formule de Poisson, on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n).$$

Simplifions chaque membre de l'égalité. On a : $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} g(n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)e^{-in\xi}$. Pour le membre de droite, exprimons d'abord $\hat{g}(n)$ en fonction de $\hat{f}$ *via* un changement de variable affine :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \hat{g}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)e^{-i\frac{t}{2\pi}\xi}e^{-int}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{(u-x)}{2\pi}\xi}e^{-in(u-x)}\mathrm{d}u = e^{\frac{ix\xi}{2\pi}}e^{inx}\hat{f}\left(n+\frac{\xi}{2\pi}\right).$$

La formule de Poisson donne donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)e^{-in\xi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(n+\frac{\xi}{2\pi}\right)e^{\frac{ix\xi}{2\pi}}e^{inx},$$

ce qu'il fallait démontrer.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Bien noter ce qui me permit d'identifier la fonction g à utiliser.

14. Soit $\xi\in\mathbb{R}$. Le membre de droite de l'égalité précédente est $\dfrac{1}{2\pi}\widetilde{F_x}(\xi)$, puisque par définition :

$$\widetilde{F_x}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_x(\xi+2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(\frac{\xi+2\pi n}{2\pi}\right)e^{ix\frac{\xi+2\pi n}{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}\left(n+\frac{\xi}{2\pi}\right)e^{\frac{ix\xi}{2\pi}}e^{inx}.$$

On nous demande de vérifier que le membre de gauche est la somme de la série de Fourier de $\widetilde{F_x}$. Ramenons-nous à une somme indexée par les entiers naturels en regroupant les termes d'indice opposé (c'est encore possible grâce au théorème de sommation par paquets, la sommabilité se justifiant comme aux questions précédentes) :

$$\frac{1}{2\pi}\widetilde{F_x}(\xi) = f(x) + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(f(x+2\pi m)e^{-im\xi} + f(x-2\pi m)e^{im\xi}\right).$$

Pour faire apparaître les coefficients de Fourier de $\widetilde{F_x}$, multiplions cette égalité par $\cos(n\xi)$ ou $\sin(n\xi)$, et intégrons. Nous ne le faisons que pour le cosinus, le cas du sinus étant analogue. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned} a_n\left(\widetilde{F_x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{F_x}(\xi)\cos(n\xi)\mathrm{d}\xi &= \sqrt{2}f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\xi)\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(f(x+2\pi m)e^{-im\xi}+f(x-2\pi m)e^{im\xi}\right)\cos(n\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(f(x+2\pi m)e^{-im\xi}+f(x-2\pi m)e^{im\xi}\right)\cos(n\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Il y a cependant une interversion à justifier pour poursuivre. On y parvient encore une fois par convergence normale (donc uniforme) sur $[-\pi,\pi]$ de la série de fonctions $\sum\limits_{m\geqslant 1}\left(\xi\mapsto\left(f(x+2\pi m)e^{-im\xi}+f(x-2\pi m)e^{im\xi}\right)\cos(n\xi)\right)$, qui découle du fait que f soit dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$a_n\left(\widetilde{F_x}\right) = \sqrt{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\left(f(x+2\pi m)\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\xi}\cos(n\xi)\mathrm{d}\xi + f(x-2\pi m)\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\xi}\cos(n\xi)\mathrm{d}\xi\right).$$

En utilisant le résultat d'orthonormalité de la question 3, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\xi} \cos(n\xi) \mathrm{d}\xi = 2\pi \langle C_m, C_n \rangle - 2i\pi \langle S_m, C_n \rangle = \begin{cases} 2\pi & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et de même pour la seconde intégrale, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad a_n\left(\widetilde{F_x}\right) = 2\pi\sqrt{2}\,(f(x+2\pi n) + f(x-2\pi n)).$$

Pour $n = 0$, on obtient : $a_0(\widetilde{F_x}) = 2\pi f(x)$. En faisant le même calcul mais en multipliant par $\sin(n\xi)$ au lieu de $\cos(n\xi)$, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad b_n\left(\widetilde{F_x}\right) = 2i\pi\sqrt{2}\,(-f(x+2\pi n) + f(x-2\pi n)).$$

Or, si l'on réarrange le membre de gauche de l'égalité précédente grâce au théorème de sommation par paquets (en écrivant : $\mathbb{Z} = \{0\} \sqcup \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{n, -n\}$), on a également :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)e^{-in\xi} \\
&= f(x) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left((f(x+2\pi n) + f(x-2\pi n))\cos(n\xi) + (f(x-2\pi n) - f(x+2\pi n))\sin(n\xi)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}a_0(\widetilde{F_x}) + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(\widetilde{F_x})\cos(n\xi) + b_n(\widetilde{F_x})\sin(n\xi)\Big).
\end{aligned}$$

On reconnaît bien la somme de la série de Fourier de $\dfrac{1}{2\pi}\widetilde{F_x}$. C'est cependant plus qu'il n'en faut pour obtenir la formule d'inversion de Fourier. En effet, en combinant le calcul de $a_0(\widetilde{F_x})$ ci-dessus et celui effectué à la question 11, on obtient :

$$a_0(\widetilde{F_x}) = 2\pi f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{F_x}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Au vu de la définition de $\widetilde{F_x}$, cette intégrale donne après changement de variable :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{F_x}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) e^{\frac{ix\xi}{2\pi}}\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u)e^{ixu}\mathrm{d}u.$$

En conclusion :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Remarque. On a montré : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)$.

Remarque. On préfère parfois définir la transformation de Fourier de f par $\xi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\mathrm{d}x$ ou $\xi \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$. De la sorte, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$, ce qui fournit une formule d'inversion plus élégante. Cela revient à dire que l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un automorphisme *unitaire* de l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (les endomorphismes *unitaires* sont l'analogue complexe des isométries).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Vérifier la convergence normale que j'ai expédiée en invoquant simplement le fait que f soit une fonction de Schwartz.

— Bien garder en tête les relations d'orthogonalité des fonctions cosinus et sinus, très utiles pour le calcul pratique (et pour la théorie aussi, comme on l'a vu à la question 3). Remarquer des relations analogues pour les fonctions $x \mapsto e^{inx}$.

— À l'instar de ce que j'ai fait dans cette question et d'autres avant, peut-on généraliser tout le vocabulaire et tous les résultats sur les séries de fonctions (modes de convergence, théorèmes d'interversion) à des sommes indexées par $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, etc. ?

Troisième application : un peu de tératologie.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f_n : x \mapsto a_n \exp(i\lambda_n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty,$$

par hypothèse sur la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, et $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i\lambda_n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme de fonctions continues.

16. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x_0} \exp(i\lambda_n(x - x_0))$. Si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n e^{i\lambda_n x_0}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{i\lambda_n x}$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = G(x - x_0)$, de sorte que :

$$F \text{ est dérivable en } x_0 \text{ si et seulement si } G \text{ est dérivable en } 0.$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = |b_n|$, donc $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ converge absolument, et :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n |a_n| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \lambda_n |b_n| = 0.$$

Ainsi il suffit de montrer que le résultat est vrai pour une fonction G dérivable en 0 de la forme attendue pour avoir, *via* les équivalences ci-dessus, le résultat pour la dérivabilité en x_0 de F.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Comme ce fut le cas dans l'exercice, on a ramené une étude en tout point à une étude en 0 (ou 1). Qu'est-ce qui permit cela, là encore ? Chercher les points communs entre ces situations analogues !

17. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} - F'(0) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Comme F est dérivable en 0, on a : $\lim_{x\to 0} G(x) = F'(0) - F'(0) = 0$, donc G est continue en 0. La continuité en tout autre point est immédiate par continuité sur $\mathbb{R}$ de F et de $x \mapsto x$. Montrons que G est bornée. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned} |G(x)| = \left|\frac{F(x) - F(0)}{x} - F'(0)\right| \leqslant |F(x)| + |F(0)| + |F'(0)| &\leqslant \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i\lambda_n x)\right| + |F(0)| + |F'(0)| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + |F(0)| + |F'(0)|, \end{aligned}$$

donc G est bornée sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Par continuité sur le segment $[-1,1]$, elle est bornée sur $[-1,1]$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi G est bornée sur $\mathbb{R}$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Le caractère borné de G peut se démontrer autrement. Comment ?

18. La formule d'inversion de Fourier peut se reformuler en disant que l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans lui-même (ici seule la surjectivité nous servira, mais il n'est pas inutile de constater ce résultat plus fort). Justifions-le brièvement. L'inversion de Fourier implique

trivialement que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vérifie : $\hat{f}=0$, alors : $f=0$, donc $f \mapsto \hat{f}$ est injective. Pour la surjectivité : soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{g}(-\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}\xi=\int_{\mathbb{R}}f(\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}\xi=\hat{f}(x),$$

ce qui montre que pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que : $\hat{f}=g$, d'où la surjectivité de $f \mapsto \hat{f}$.

Ceci étant dit : pour définir l'application φ de l'énoncé, il suffit de construire une application $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ nulle en dehors de $\left[-\rho,-\frac{1}{\rho}\right]$ et telle que : $h(-1)=1$, puis d'utiliser la surjectivité que l'on vient de montrer en appelant φ l'antécédent de h par la transformation de Fourier. La difficulté est d'avoir la classe C^∞, le reste ne posant pas le moindre problème. Un produit de convolution d'une fonction convenable affine par morceaux, avec une approximation de l'unité de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, serait une solution potentielle. Mais il y a plus simple : produisons d'abord une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R}_-$. Par composition et produit, nous en déduirons une fonction de classe C^∞ identiquement nulle hors de $\left[-\rho,-\frac{1}{\rho}\right]$. Considérons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x)=\begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Montrons que g est de classe C^∞ au voisinage de 0, l'étude sur $\mathbb{R}^*$ étant triviale. On va montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X]\setminus\left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)g(x), \tag{P_n}$$

par récurrence sur n. Pour $n=0$ il n'y a rien à raconter (il suffit de prendre $P_0=1$). Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_n. En dérivant l'expression ci-dessus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g^{(n+1)}(x)=-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)g(x)+P_n\left(\frac{1}{x}\right)g'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)g(x)+\frac{1}{x^2}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)g(x).$$

En posant : $P_{n+1}=X^2(P_n-P_n')$, on a donc P_{n+1}.

Voyons comment en déduire la classe C^∞ de g sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons a_dX^d le terme de plus haut degré de P_n. On a :

$$g^{(n)}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{a_d}{x^d}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

et donc, par le théorème des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x)=\lim\limits_{u\to+\infty} a_du^d\exp(-u)=0$. La limite quand $x \to 0^-$ est trivialement la même, donc ce qui précède montre que :

- l'application g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (et facilement continue sur $\mathbb{R}$) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $g^{(n)}$ admet une limite finie en 0.

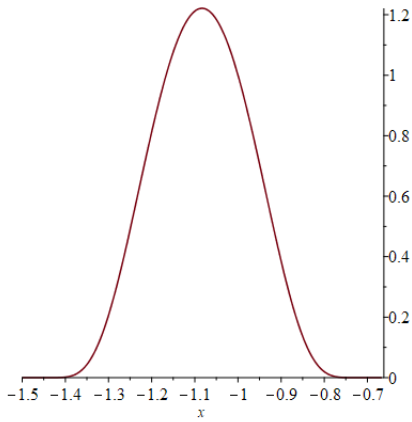
Par le théorème de la limite de la dérivée, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ g^{(n)}(0)=0$.

On a ainsi construit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-$.

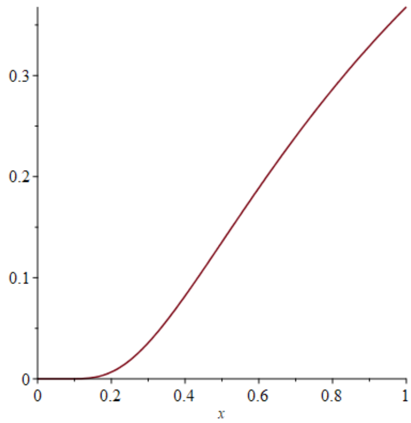
À présent, pour avoir une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle hors de $\left[-\rho,-\frac{1}{\rho}\right]$, il suffit de considérer :

$$h : x \mapsto g(x+\rho)g\left(-\frac{1}{\rho}-x\right).$$

Pour avoir en plus la condition : $h(-1)=1$, il suffit de remplacer h par $\frac{h}{h(-1)}$. Elle est trivialement dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. L'unique fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que : $\hat{\varphi}=\frac{h}{h(-1)}$, répond donc à la question posée.



Remarque. La fonction g est dite *infiniment plate*, comme toute fonction indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées d'ordre supérieur sont nulles en un point.



Remarque. On fait mieux que de démontrer que $f \mapsto \hat{f}$ est bijective, *via* l'inversion de Fourier. Son inverse est $g \mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{2\pi}\hat{g}(-x)\right)$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Se demander ce qui put conduire à la définition de g puis de h. Retenir cette construction, très utile dès qu'on veut des fonctions de classe C^∞ à support compact (typiquement lorsqu'on fait de la convolution).
- Obtenir le résultat voulu par convolution, comme suggéré plus haut.

19. Soit $n \in \mathbb{N}$. On aimerait écrire, sous réserve que les calculs soient licites :

$$\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \exp\left(i\frac{\lambda_k x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} a_k \exp\left(i\frac{\lambda_k x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\hat{\varphi}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right).$$

Si ce calcul est licite, il suffit alors d'utiliser le fait que $\hat{\varphi}$ soit nulle en dehors de $\left[-\rho, -\frac{1}{\rho}\right]$ pour simplifier cette somme et obtenir le résultat voulu. Seulement l'égalité $(*)$ est un problème d'interversion, que nous allons résoudre avec le théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = a_k \exp\left(i\frac{\lambda_k x}{\lambda_n}\right)\varphi(x).$$

Alors :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application f_k est intégrable sur $\mathbb{R}$, car : $|f_k| = |a_k\varphi|$, et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par construction ;

— la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto F\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)$ par définition de F, et cette somme est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$;

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\mathrm{d}x < +\infty,$$

parce que la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k$ converge absolument ; ainsi la série $\sum_{k\geqslant 0} \int_{\mathbb{R}} |f_k|$ converge également.

Par le théorème d'intégration terme à terme, l'égalité $(*)$ ci-dessus est donc valable. En utilisant la nullité de $\hat{\varphi}$ hors de $\left[-\rho, -\frac{1}{\rho}\right]$ et le fait que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ -\frac{\lambda_k}{\lambda_n} \geqslant -\rho^{k-n} \geqslant -\frac{1}{\rho}, \quad \forall k \geqslant n+1,\ -\frac{\lambda_k}{\lambda_n} \leqslant -\rho^{k-n} \leqslant -\rho,$$

on a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$, $\hat{\varphi}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) = 0$. Les calculs entamés en début de question donnent donc :

$$\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \hat{\varphi}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right) = a_n\hat{\varphi}(-1) = a_n,$$

d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— La résolution de cette question permet de comprendre la motivation derrière la définition de φ, qui peut paraître *ad hoc* au premier abord. Où intervient-elle de manière décisive ? À quoi servait-elle ?

— Ce problème donne différentes techniques d'inversion (ou, dit autrement : étant donnée une identité $f(x) = \sum_n \bigstar_n$, exprimer $\bigstar_n$ pour tout n en fonction de f) : soit en utilisant une formule d'orthogonalité, soit en utilisant une « ondelette » (le nom de la fonction φ). Intégrer tout cela à votre culture scientifique – et aux autres formules d'inversion déjà rencontrées – pour savoir reconnaître à l'avenir des situations analogues.

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\lambda_n a_n = \lambda_n \int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x &= \lambda_n \int_{\mathbb{R}} \left(F(0) + F'(0)\frac{x}{\lambda_n} + \frac{x}{\lambda_n}G\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda_n F(0)\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x + F'(0)\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} xG\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or : $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = \hat{\varphi}(0) = 0$ (par construction de φ). Exprimons la seconde intégrale ci-dessus à l'aide de $\hat{\varphi}$. En reprenant les calculs de la remarque de la question 12, on montre que c'est égal à $\hat{\varphi}'(0)$. On a donc, par construction de φ :

$$\int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)\mathrm{d}x = \hat{\varphi}'(0) = 0.$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n a_n = \int_{\mathbb{R}} xG\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Pour en déduire le résultat voulu, à savoir : $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n|a_n| = 0$, nous allons utiliser le théorème de convergence dominée avec l'expression intégrale de $\lambda_n a_n$ ci-dessus. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = xG\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)$. Alors :

— comme $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers l'infini (en vertu de l'inégalité $\lambda_n \geqslant \rho^n\lambda_0$ découlant d'une récurrence immédiate, et de l'inégalité $\rho > 1$), et l'application G étant continue en 0, la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $g : x \mapsto G(0)x\varphi(x)$;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ car G et φ le sont, et de même g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;

— on sait que G est bornée sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|g_n(x)| \leqslant \|G\|_\infty |x\varphi(x)|, \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

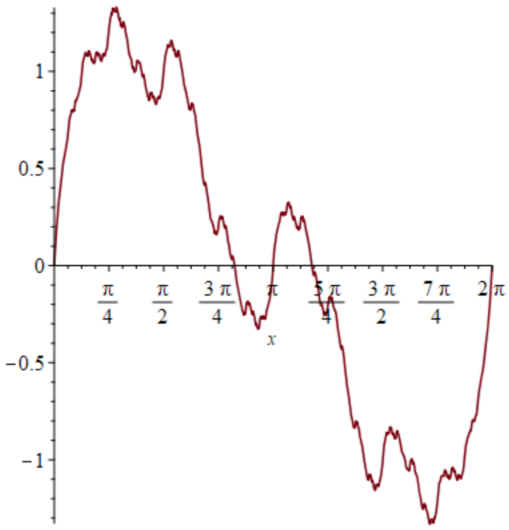
et on sait que $x \mapsto \|G\|_\infty |x\varphi(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (on l'a justifié pour l'hypothèse de domination précédente).

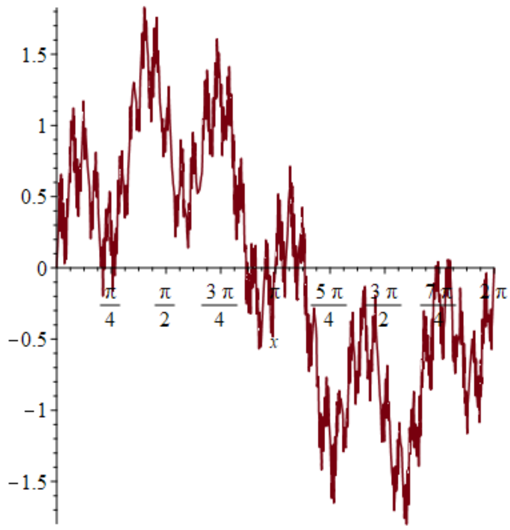
Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} xG\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} xG(0)\,\varphi(x)\mathrm{d}x \right| = |G(0)\hat{\varphi}'(0)| = 0,$$

d'où le résultat : si F est dérivable en 0 (et en fait en n'importe quel point d'après la question 16), alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n|a_n| = 0$.

21. On utilise la contraposée du résultat démontré à la question précédente : si $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites vérifiant les hypothèses de l'énoncé, mais telles que $(\lambda_n a_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0, alors $F : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i\lambda_n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part.
On l'applique avec $(a_n)_{n\geqslant 0} = (a^n)_{n\geqslant 0}$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 0} = (b^n)_{n\geqslant 0}$, avec $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $ab \geqslant 1$. Sous ces conditions, on a bien la convergence absolue de la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n = \sum\limits_{n\geqslant 0} a^n$, et la condition $ab \geqslant 1$ assure que la suite $(\lambda_n a_n)_{n\geqslant 0} = ((ab)^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. Par ce qui précède, $W_{a,b} : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n \exp(ib^n x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part : d'où le résultat.
Remarque. On pourrait sans difficulté adapter le raisonnement des questions précédentes pour montrer que sous les mêmes hypothèses sur a et b, ni $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n x)$ ni $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n \sin(b^n x)$ n'est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
Remarque. Cet exemple a été présenté par Weierstraß en 1872. C'est historiquement le premier exemple publiquement présenté de fonction monstre (Bolzano en avait découvert une autre en 1833, mais on n'en a trouvé la trace dans ses manuscrits qu'en 1920). J'ai représenté ci-dessous les graphes des sommes partielles d'indice $N \geqslant 500$ des parties imaginaires de $W_{\frac{1}{2},2}$ et $W_{\frac{1}{2},6}$:





Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Fabriquer d'autres fonctions nulle part dérivables grâce au critère de la question précédente.

— Contrairement à ce que laissent penser les graphes ci-dessus, toute tentative de représentation manuelle d'une fonction continue nulle part dérivable est vouée à l'échec : pourquoi ?