Devoir maison n° 7 – Compte rendu

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Écrire « non-nul » est un anglicisme, comme tous les tirets que vous avez coutume de mettre après le « non » qui nie une propriété mathématique. C'est « non nul », tout simplement.
2. Il va de soi qu'une réunion dénombrable et une réunion indexée par les entiers naturels sont la même chose : nul besoin de détailler le passage de l'une à l'autre.
3. Le lemme de Baire étant un lemme, il serait utile d'apprendre à le rédiger succinctement : si on vous le fait démontrer, c'est pour l'appliquer ensuite au problème qui nous intéresse réellement. Cinq pages consacrées à sa démonstration, c'est beaucoup trop.

Imprécisions mathématiques.

4. Les boules ouvertes et fermées ne sont pas toujours distinguées. La plupart des propriétés topologiques sont formulées avec des boules ouvertes, ce qui se traduit concrètement par des inégalités strictes : $\vec{x} \in \mathrm{B}(\vec{a}, r) \iff \|\vec{x} - \vec{a}\| < r$.
5. Si une boule vérifie $\mathrm{B}_f(\vec{x}_1, r_1) \subseteq U_1 \cap \mathrm{B}(\vec{x}, r)$, toute boule de rayon plus petit convient aussi puisqu'elle est incluse dans $\mathrm{B}_f(\vec{x}_1, r_1)$: il n'y a pas à changer le choix de $\vec{x}_1$ en le prenant « près ou loin du bord ». Représentez-vous les choses par des dessins pour éviter de dire des bizarreries.
6. Que ce soit en passant par la caractérisation séquentielle des fermés ou par des images réciproques de fonctions continues, vous avez été nombreux à démontrer que Γ_X est un fermé relatif de $\mathbb{R}_+$, et non un fermé (sous-entendu : dans $\mathbb{R}$) comme vous le souhaitiez.

   Pourquoi donc ? Soit parce que vous présupposiez que la limite de votre suite convergente était *a priori* dans $\mathbb{R}_+$ (au lieu de la supposer dans $\mathbb{R}$), soit parce que vos fonctions étaient définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ (au lieu de $\mathbb{R}$).
7. Dans la démonstration de l'égalité $\theta(\alpha X) = \theta(X)$, je ne suis pas certain d'avoir vu une seule fois la raison pour laquelle on prenait α positif (en plus d'être non nul).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

8. Beaucoup d'élèves, après avoir montré : $\vec{\ell} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$, concluent à tort que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est dense, oubliant un peu vite ce qu'on cherche à montrer (il faut montrer que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$ rencontre toute boule ouverte, c'est-à-dire avec les notations de l'exercice : $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k \cap \mathrm{B}(\vec{x}, r) \neq \emptyset$).
9. Dans la vérification que des matrices sont stochastiques, presque tout le monde a oublié que les coefficients de telles matrices doivent être *positifs*. Vous avez seulement vérifié (pour la plupart) que la somme des coefficients de chaque colonne égale 1.
10. Si, dans tout le sujet, vous n'avez pas utilisé une seule fois le fait que P soit égale à $(\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$ (pourquoi cette expression, plutôt qu'un polynôme en T quelconque ?), c'est forcément suspect.

    On en avait besoin pour un résultat admis dans la dernière question de l'énoncé, mais pas seulement : pour montrer que si $X \in B$ et $T \geqslant 0$, alors $TX \in B$: il a échappé à beaucoup d'élèves que l'inégalité $TX \geqslant 0$ ne suffisait pas pour appartenir à B, qui contenait les vecteurs positifs *non nuls*. Montrer la non nullité de TX était loin d'être trivial, et nécessitait l'hypothèse de stricte positivité de $P = (\mathrm{I}_n + T)^{n-1}$.