Devoir maison n° 7

(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

L'exercice est sur le théorème de Baire, qui est plutôt un *lemme* : son utilité est illustrée dans les feuilles d'exercices du chapitre VI. Il permet des inversions de quantificateurs (pour passer de propriétés locales à des propriétés globales) et des constructions de parties denses à moindre frais (on n'est cependant pas exhaustif en disant cela : le théorème de Banach-Steinhaus et ses conséquences sont parmi les plus riches des corollaires du lemme de Baire).

L'énoncé originel avait certaines coquilles et imprécisions, rectifiées dans la version en ligne.

Le problème est une adaptation de l'épreuve de Mathématiques I au Concours Commun Mines-Ponts, année 2006, filière MP.

Il est sur le théorème de Perron-Frobenius, qu'on peut démontrer de manière très variée (ce qui en fait un problème apprécié des sujets de concours ; pour des exemples récents, tous en PSI parce que c'est là que je m'y connais le mieux pour le moment : voir Centrale-Supélec en 2020 et 2021, Mathématiques I, ou Mines-Ponts en 2017, Mathématiques I).

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (*PageRank*) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche. Le lien avec ce théorème est lorsqu'on représente Internet par un graphe orienté où les arêtes lient les pages dont l'une pointe vers l'autre (avec une pondération indiquant la pertinence du renvoi). La matrice d'incidence du graphe est alors une matrice stochastique dont le vecteur propre fourni par le théorème de Perron-Frobenius permet de trouver les pages de meilleure pertinence répondant à notre requête. Le sujet de Centrale-Supélec 2021 mentionné plus haut détaille cette application en fin de problème (partie III).

En ce qui vous concerne, j'ai donné ce problème pour vous initier aux problèmes de topologie matricielle : utilisation de la compacité, recherche d'extremums et application à la construction de vecteurs propres vérifiant des conditions prescrites, inégalités avec les matrices (on en reverra lors de l'étude des matrices symétriques).

> **Ce qu'on retiendra en bref.** Caractérisation des parties denses à l'aide de boules ouvertes. Importance de l'hypothèse de fermeture. Suites de Cauchy. Suites à valeurs matricielles. Utilisation de la compacité. Inégalités larges et strictes avec des vecteurs et matrices : pièges à éviter, règles toujours valables.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— EXERCICE : tout ;

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1 à 4, questions 7 et 8 ;

— DEUXIÈME PARTIE : questions 13 et 15, questions 17 et 18, questions 20 et 21.

2 Rapport officiel de l'épreuve (problème)

2.1 Le sujet

L'objet du problème est de prouver le classique théorème de Frobenius.

La partie I fait établir l'existence d'un vecteur propre strictement positif pour une matrice carrée à coefficients réels positifs ou nuls.

La partie II propose une méthode d'approximation pour construire un tel vecteur propre. Le sujet met en jeu une partie du programme d'analyse. Plus précisément, les notions suivantes jouent un rôle important dans le problème : notion de borne supérieure, topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, valeur d'adhérence, etc.

2.2 Remarques générales

Le problème est très long et comporte beaucoup de notations. La grande majorité des candidats a du mal à assimiler l'énoncé et à bien comprendre de quoi il retourne. Toutefois, certains d'entre eux semblent avoir étudié en classe une partie des notions utilisées dans l'énoncé. La rédaction des candidats est en général imprécise et hésitante.

Personne ne traite le problème en totalité. Cependant un très petit nombre de candidats impressionne le jury et obtient une note voisine de 20.

La plupart des questions demandent d'établir des énoncés faciles et techniques dans lesquels la réponse est donnée. Il est donc souvent malaisé de faire la différence entre une tentative de bluff et une rédaction vague émanant d'un candidat qui a à peu près compris ce qu'il faut faire. Une tentative de tricherie s'avère pénalisante pour son auteur car par la suite l'examinateur interprète toute rédaction vague comme une tentative de bluff.

2.3 Remarques particulières

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

Si a est inférieur à b, alors pour affirmer que ax est inférieur à bx, il faut dire que x est un réel positif.

Dans la question 2, beaucoup de candidats passent de $\theta \leqslant \min(\bigstar)$ à $\theta = \min(\bigstar)$ par un « argument de borne supérieure » qui n'est absolument pas précisé, ce qui indispose le correcteur.

Peu de candidats savent montrer que si $f_1, \dots, f_k$ sont des fonctions continues alors $\min(f_1, \dots, f_k)$ est continue.

Une fonction continue sur une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément bornée, et même si elle l'est, elle n'atteint pas forcément ses bornes.

Pour affirmer que $\left|\sum_j a_{i,j} xj\right| \leqslant \sum_j a_{i,j} |x_j|$, il faut préciser que les $a_{i,j}$ sont positifs.

Si $M = ((m_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ alors la matrice M^k n'est pas égale à $\left(\left((m_{i,j})^k\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Dans la question 19, il ne suffit pas de dire que R_ℓ et R_m commutent, il faut dire pourquoi : à savoir que R_ℓ et R_m sont des polynômes en T.

2.4 Conclusion

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

À propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de court-circuiter la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger. Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.

3 Corrigé

Exercice

1. C'est la contraposée du résultat à démontrer.
2. Supposons avoir démontré que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense, et montrons alors qu'une réunion de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide. Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E d'intérieur vide. Alors :
$$E \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\right)^{\circ} = \overline{E \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k} = \overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (E\setminus F_k)}.$$
Or les $E\setminus F_k$ sont des ouverts parce que les F_k sont fermés, et ce sont même des ouverts denses parce que par hypothèse les F_k sont d'intérieur vide, et :
$$\overline{E\setminus F_k} = E \setminus \mathring{F}_k = E.$$
Une intersection dénombrable d'ouverts denses étant encore dense d'après ce qu'on a supposé, on a : $\overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(E\setminus F_k)} = E$, et donc : $E \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\right)^{\circ} = E$, ce qui démontre : $\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\right)^{\circ} = \emptyset$. Ainsi la réunion des F_k est d'intérieur vide.
On a montré que sous l'hypothèse initiale, une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide ; par la question précédente, cela équivaut au théorème de Baire.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Avec cette question et la précédente, noter deux façons de passer des ouverts aux fermés, des intérieurs aux adhérences, etc. Soit par passage au complémentaire, soit par contraposée.

— Aurait-il été correct (ou utile) d'écrire une relation entre $\overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(E\setminus F_k)}$ et $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{E\setminus F_k}$?

— Est-ce que le résultat annoncé par cette question vous paraît intuitive ou au contraire non intuitive ? Arrive-t-on à se représenter les choses ? Et avec des réunions ou intersections finies ?

— On ne cherche à montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est un *ouvert* dense. Pourquoi ? A-t-on des contre-exemples ?

3. Comme U_0 est dense, on a : $\mathrm{B}(\vec{x},r)\cap U_0 \neq \emptyset$. Soit $\vec{x}_1$ un élément de cette intersection. Comme $\mathrm{B}(\vec{x},r)\cap U_0$ est un ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts, il existe $r'>0$ tel que : $\mathrm{B}(\vec{x}_1,r') \subseteq \mathrm{B}(\vec{x},r)\cap U_0$. Prenons alors : $r_1 = \min\left(\frac{r'}{2},1\right)$. Il vérifie : $r_1 \leqslant 1$, et comme on a bien entendu l'inclusion de $\mathrm{B}_f(\vec{x}_1,r_1)$ dans $\mathrm{B}(\vec{x}_1,r')$ on obtient le résultat voulu : $\mathrm{B}_f(\vec{x}_1,r_1) \subseteq \mathrm{B}(\vec{x},r)\cap U_0$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi veut-on une boule fermée incluse dans $\mathrm{B}(\vec{x},r)\cap U_1$ et non une boule ouverte ? Se poser la question tout au long de cet exercice.
> — Remarquer que ce raisonnement s'adapte pour montrer qu'une intersection de deux ouverts denses est encore dense. Pourquoi ? Et si on enlève l'aspect ouvert ?

4. Même principe que ci-dessus. On pose $\vec{x}_0 = \vec{x}$ et r_0 un réel strictement positif arbitraire, et on suppose avoir construit $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n, r_1,\dots,r_n$ vérifiant la condition de l'énoncé. Comme U_n est dense, on a : $\mathrm{B}(\vec{x}_n,r_n)\cap U_n \neq \emptyset$. Soit $\vec{x}_{n+1}$ un élément de cette intersection. Comme $\mathrm{B}(\vec{x}_n,r_n)\cap U_n$ est un ouvert en tant qu'intersection finie d'ouverts, il existe $r'>0$ tel que : $\mathrm{B}(\vec{x}_{n+1},r') \subseteq \mathrm{B}(\vec{x}_n,r)\cap U_n$. On conclut comme dans la question précédente en prenant : $r_{n+1} = \min\left(\frac{r'}{2},\frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

5. Le procédé de construction de la suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ permet aisément de montrer par récurrence que l'on a : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2$, $\vec{x}_{n+p}\in \mathrm{B}(\vec{x}_n,r_n)$ (vu que $\mathrm{B}(\vec{x}_{n+1},r_{n+1})$ est inclus dans $\mathrm{B}(\vec{x}_n,r_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$). C'est-à-dire :
$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad \|\vec{x}_{n+p}-\vec{x}_n\| < r_n \leqslant \frac{1}{2^n}. \tag{$*$}$$
Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$, donc pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, on ait : $\frac{1}{2^n}\leqslant\varepsilon$. On a montré :
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ n\geqslant N \implies \|\vec{x}_{n+p}-\vec{x}_n\|\leqslant\varepsilon,$$
donc $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans E qui est complet : elle converge donc. Soit $\vec{\ell}\in E$ sa limite. On doit montrer : $\vec{\ell}\in\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$. Il suffit pour cela de noter que lorsqu'on remplace n par $n+1$ dans $(*)$ et qu'on prend la limite quand $p\to+\infty$, on a :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \|\vec{\ell}-\vec{x}_{n+1}\|\leqslant r_{n+1},$$
c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\vec{\ell}\in\mathrm{B}_f(\vec{x}_{n+1},r_{n+1})$. Or par construction de la suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$, on a : $\mathrm{B}_f(\vec{x}_{n+1},r_{n+1})\subseteq U_n$. Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\vec{\ell}\in U_n$.
Concluons enfin que $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est dense. On a montré l'existence de $\vec{\ell}\in\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$, qui vérifie par ailleurs : $\vec{\ell}\in\mathrm{B}_f(\vec{x}_1,r_1)\subseteq\mathrm{B}(\vec{x},r)$, donc : $\vec{\ell}\in\mathrm{B}(\vec{x},r)$. Donc :
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\cap\mathrm{B}(\vec{x},r)\neq\emptyset.$$
Cela est vrai pour tout $\vec{x}\in E$ et tout $r>0$, donc $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est dense dans E : d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Remarquer que, comme bien souvent, lorsqu'on a montré qu'une suite est de Cauchy, la majoration de $\|\vec{x}_{n+p}-\vec{x}_n\|$ donne *aussi* une information sur la distance à la limite. Ce fut déjà observé pour le théorème de Banach-Picard et dans le DST n° 1.
> — Voyez-vous ce qui aurait échoué si l'on avait pas considéré des boules fermées dans les questions précédentes ?
> — Le choix de la majoration de r_n par $\frac{1}{2^n}$ était-il arbitraire ? Pouvait-on proposer d'autres valeurs ?

Problème

Partie A. Un vecteur propre strictement positif.

1. On a : $0 \in \Gamma_X$ car par hypothèse sur $X \in B$ on a : $TX \geqslant 0 = 0 \cdot X$, donc Γ_X est non vide. Montrons que c'est un ensemble fermé et borné.

   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & (TX)_i - \theta X_i \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car affine, donc l'image réciproque par φ_i de tout fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. On en déduit que :

   $$\Gamma_X = \mathbb{R}_+ \cap \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

   est un fermé en tant qu'intersection de fermés.

   Enfin, pour tout $\theta \in \Gamma_X$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a : $\theta \leqslant \dfrac{(TX)_i}{X_i}$ pour $X_i \neq 0$, donc Γ_X est borné par $\min\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ X_i \neq 0}} \dfrac{(TX)_i}{X_i}$. D'où le résultat.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Bien identifier ce qui conduisit à l'introduction des applications φ_i et à la description de Γ_X comme une intersection.

2. Soit $X \in B$. Notons que l'existence de $\theta(X)$ découle du fait que la borne supérieure d'une partie fermée, non vide et majorée soit toujours atteinte. Allégeons les notations et posons : $m(X) = \min \left\{ \dfrac{(TX)_i}{X_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } X_i \neq 0 \right\}$. On veut montrer : $\theta(X) = m(X)$.

   La question précédente montre déjà : $\theta(X) \leqslant m(X)$. D'autre part le réel $\dfrac{(TX)_i}{X_i}$ avec $X_i \neq 0$ et i l'indice qui minimise ce quotient est dans Γ_X, donc $m(X)$ aussi. Donc par définition de $\theta(X)$ on a : $m(X) \leqslant \theta(X)$. D'où le résultat : $\theta(X) = m(X)$.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Bien vérifier ce que j'affirme en pensant, sans plus de détail : pourquoi la borne supérieure est effectivement atteinte dans un fermé non vide et majoré ? Pourquoi le réel $\dfrac{(TX)_i}{X_i}$ est dans Γ_X ? Est-ce le cas pour tout i ?

3. Soient $\alpha > 0$ et $X \in B$. Comme T est linéaire, on a bien sûr :

   $$\left\{ \frac{(T(\alpha X))_i}{(\alpha X)_i} \mid i \in [\![1, n]\!],\ X_i \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{(TX)_i}{X_i} \mid i \in [\![1, n]\!],\ X_i \neq 0 \right\},$$

   donc leurs minimums sont les mêmes et par la question précédente on a : $\theta(\alpha X) = \theta(X)$. D'où le résultat.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Où intervient la positivité de α ?

4. Soit $X \in B$. Posons : $Y = PX$, et : $P = ((p_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Comme $X \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $X \geqslant 0$, il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que : $X_{j_0} > 0$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a donc :

   $$Y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} X_j = p_{i,j_0} X_{j_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} p_{i,j} X_j > 0,$$

   car $P > 0$ et $X \geqslant 0$. D'où le résultat demandé.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Est-ce que : $X > 0$, équivaut à : $X \geqslant 0$ et $X \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, comme dans le cas réel ? Y réfléchir pour comprendre les apparentes contorsions du sujet et du corrigé.

5. Pour tout $\theta \in \Gamma_X$, on a : $\theta X \leqslant TX$, donc : $\theta PX = P(\theta X) \leqslant P(TX)$ car $P > 0$ (de sorte que l'on ait : $P(\underbrace{TX - \theta X}_{\geqslant 0}) \geqslant 0$). Or P est un polynôme en T, donc P et T commutent et on en déduit : $\theta PX \leqslant T(PX)$. Par suite : $\Gamma_X \subseteq \Gamma_{PX}$. Ceci démontre :
$$\theta(X) = \max(\Gamma_X) \leqslant \max(\Gamma_{PX}) = \theta(PX).$$
Reste à vérifier que $\theta(PX) > 0$. Notons $Y = PX$. Nous savons (question 4) que Y est strictement positif. Si l'on avait $(TY)_i = 0$, la i^{e} ligne de T serait nulle (car T est positive et une somme de réels positifs est nulle seulement si chaque terme est nul). Les matrices T^j, pour $j \geqslant 1$, auraient alors également leur i^{e} ligne nulle et $P = \mathrm{I}_n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} T^j$ ne serait pas strictement positive. Absurde.
On en déduit que TY est strictement positif, puis que $\theta(PX) > 0$ d'après la question 2.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Plus généralement, les inégalités entre vecteurs sont-elles compatibles avec la multiplication, à l'instar de ce qu'on a fait ci-dessus avec P ? Et avec l'addition ?

6. Posons : $Y = TX - \theta(X)X$. On veut montrer que Y est nul. Par définition de $\theta(X)$ on a : $Y \geqslant 0$. Si $Y \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ alors, comme $P > 0$, on a :
$$0 < PY = P(TX - \theta(X)X) = P(TX) - \theta(X)PX = T(PX) - \theta(X)P(X),$$
où l'on utilise encore une fois que P et T commutent.
Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $(T(PX))_i - \theta(X)(PX)_i > 0$, puis :
$$\theta(X) < \min\left\{\frac{(T(PX))_i}{(PX)_i} \mid i \in [\![1, n]\!]\right\} = \theta(PX),$$
ce qui est absurde puisque $\theta(X) = \theta(PX)$. Donc : $Y = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et par suite : $TX = \theta(X)X$. Comme X est non nul, cela prouve que c'est un vecteur propre de T associé à $\theta(X)$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Pourquoi ai-je introduit Y, au lieu de raisonner en partant de l'inégalité $\theta(X)X \leqslant TX$, que je multiplie par P, etc., pour avoir semblablement une contradiction ?

7. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et soit φ_i l'application $Y \mapsto \dfrac{(TY)_i}{Y_i}$. Cette application est bien définie et continue sur $P(C)$ en tant que quotient d'applications linéaires (qui sont toujours continues sur un espace vectoriel de dimension finie) dont le dénominateur ne s'annule pas, car tout élément Y de $P(C)$ est strictement positif. Or le minimum d'un nombre fini de fonctions continues est continu, grâce aux relations :
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2},$$
$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \forall (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \min(a_1, \ldots, a_p) = \min(\min(a_1, \ldots, a_{p-1}), a_p)$$
et un raisonnement par récurrence, donc $\theta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\varphi_i)$ est continue sur $P(C)$. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Vérifier *vraiment* les deux relations sur les minimums données et faire la récurrence si vous n'êtes pas convaincus.
> — Trouver un moyen « intuitif » d'expliquer et de retrouver la formule donnant le minimum ou le maximum de a et b. Peut-on avoir une formule aussi esthétique pour $\min(a,b,c)$ et $\max(a,b,c)$?
> — Pourquoi cette contrainte sur le « minimum » ? Que dire d'une borne inférieure d'un ensemble éventuellement infini de fonctions continues ?

8. Comme $C = B \cap \Sigma = \{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geqslant 0,\ \|X\|_1 = 1\}$ est un compact en tant que partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie, et comme l'application P est continue sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie, on sait que $P(C)$ est compact dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: c'est l'image directe d'un compact par une application continue.
L'application θ étant continue sur le compact non vide $P(C)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, par le théorème des bornes atteintes il existe $X_0 \in P(C)$ tel que :
$$\theta(X_0) = \sup_{X \in P(C)} \theta(X).$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Il fut déjà justifié que B est fermé dans la première question. Mais Σ ? Et C ? Est-ce bien clair ?
> — Bien identifier les questions qui sont un appel naturel au théorème des bornes atteintes.

9. Pour tout $X \in C \subseteq B$ on a : $PX \in P(C) \subseteq B^+$, par la question 4. De plus, par la question 5 on a : $\theta(X) \leqslant \theta(PX)$. Donc pour tout $X \in C$, on a : $\theta(X) \leqslant \theta(PX) \leqslant \sup_{Y \in P(C)} \theta(Y)$, et par suite :
$$\sup_{X \in C} \theta(X) \leqslant \sup_{Y \in P(C)} \theta(Y).$$

10. Lorsque X décrit B, le vecteur $Y = \dfrac{1}{\|X\|_1} X$ décrit $B \cap \Sigma = C$, donc :
$$\sup_{X \in B} \theta(X) = \sup_{Y \in C} \theta(\|X\|_1 Y) = \sup_{Y \in C} \theta(Y),$$
car $\|X\|_1 > 0$ (on utilise la question 3 pour la dernière égalité).

11. D'après ce qui prècède, on a :
$$\sup_{X \in B} \theta(X) = \sup_{X \in C} \theta(X) \leqslant \sup_{X \in P(C)} \theta(X) = \theta(X_0).$$
Comme l'application $\begin{cases} C = B \cap \Sigma & \to & P(C) \\ X & \mapsto & PX \end{cases}$ est bijective, on a le résultat voulu :
$$\sup_{X \in C} \theta(X) = \sup_{X \in P(C)} \theta(X).$$

12. Comme X_0 est élément de $P(C)$, il est élément de B^+ et est donc strictement positif. De plus, il existe $Y_0 \in B$ tel que $X_0 = PY_0$; la question 5 donne alors : $\theta_0 = \theta(PY_0) > 0$.
Enfin, $\theta(X_0) \leqslant \theta(PX_0) \leqslant \sup_{X \in B} \theta(X) = \theta(X_0)$, donc $\theta(X_0) = \theta(PX_0)$ et, d'après la question 6, le vecteur X_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre θ_0.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- On remarque que cette partie nous fait démontrer l'existence d'un vecteur propre vérifiant des propriétés particulières grâce à l'étude d'un maximum. Cette stratégie revient épisodiquement. On verra plus tard que les valeurs propres de $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ sont liées aux extremums de l'application $X \mapsto X^\top AX$ sur la sphère unité (c'est même une stratégie possible pour démontrer le théorème spectral, selon lequel toute matrice symétrique réelle est diagonalisable).
- Est-ce qu'à ce stade du problème, le choix de P vous paraît arbitraire ou au contraire indispensable pour mener à bien les raisonnements ? Se poser à nouveau la question au fil de la partie B.

Partie B. Une méthode d'approximation.

13. On a : $TX_0 = \theta_0 X_0$, donc par homogénéité de la norme et positivité de θ_0 on a : $\|TX_0\|_1 = \theta_0\|X_0\|_1$. Or, si l'on note $T = ((t_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors on a par positivité de X_0 et de T :

$$\|TX_0\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n t_{i,j}(X_0)_j\right| = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n t_{i,j}(X_0)_j = \sum_{j=1}^n (X_0)_j \sum_{i=1}^n t_{i,j} \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^n (X_0)_j = \|X_0\|_1,$$

où $(*)$ utilise le fait que T soit stochastique. On a donc : $\|X_0\|_1 = \theta_0\|X_0\|_1$, puis $\theta_0 = 1$ après division par $\|X_0\|_1 > 0$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Qu'est-ce qui pouvait me conduire à prendre la norme 1 de X_0 et TX_0, et non la norme 2 ou infinie ?
- Bien noter l'importance d'avoir démontré l'existence d'un vecteur propre dont les coordonnées sont toutes *positives*.
- Cette question montre implicitement que toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur ou égal à 1. Auriez-vous su le démontrer sans passer par θ_0 ?

14. Soit $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Il est clair (en explicitant les coefficients) qu'un produit de matrices positives reste positif et qu'une combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices positives est encore positive. Par conséquent, les matrices T^j et R_j sont clairement positives.

Ensuite, pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la condition : $\forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1$, signifie que le vecteur $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour $M^\top$ associé à la valeur propre 1. Comme : $T^\top U = U$, on obtient ensuite facilement, par récurrence sur j, que : $(T^\top)^j U = U$, puis que : $R_j^\top U = U$. Ceci achève de prouver que les matrice T^j et R_j sont stochastiques.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Expliciter les détails que j'ai omis. Est-ce que ces propriétés de stabilité resteraient vraies pour les matrices strictement positives ?
- On a déjà fait une observation dans le cours au sujet d'une condition suffisante pour que U soit un vecteur propre. Est-ce une condition nécessaire ? Pourquoi ici c'est un vecteur propre de $M^\top$ et non de M ?
- On a montré implicitement que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit. Et par somme ? Par différence ? Par inversion ?

15. Si $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice stochastique, alors pour tout vecteur colonne X on a :

$$\|MX\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n m_{i,j}X_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{i,j}|X_j| = \sum_{j=1}^n |X_j| \sum_{i=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n X_j = \|X\|_1.$$

On en déduit : $|||M||| \leqslant 1$. Or T^k et R_k sont stochastiques pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, d'où le résultat : $|||T^k||| \leqslant 1$, et : $|||R_k||| \leqslant 1$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Ce calcul de norme triple est à comparer au résultat général présent dans vos feuilles d'exercices, exprimant la norme subordonnée à $\|\cdot\|_1$ de toute matrice en fonction de sommes de coefficients.

16. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a : $TR_k - R_k = \dfrac{1}{k}\left(T^k - \mathrm{I}_n\right)$, donc :

$$|||TR_k - R_k||| \leqslant \frac{1}{k}\left(|||T^k||| + |||\mathrm{I}_n|||\right) \leqslant \frac{2}{k}$$

car $|||\mathrm{I}_n||| = 1$; d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Vérifier la valeur de la norme triple de I_n. Est-ce que ce résultat est vrai peu importe la norme triple ?

17. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|R_kX\|_1 \leqslant |||R_k||| \cdot \|X\|_1 \leqslant \|X\|_1$. La suite $(R_kX)_{k\geqslant 1}$ est donc bornée dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$. Comme les boules fermées sont compactes en dimension finie, cette suite admet une valeur d'adhérence : d'où le résultat.
18. Considérons une extractrice φ telle que : $R_{\varphi(k)}X \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Y$. Alors : $TR_{\varphi(k)}X - R_{\varphi(k)}X$ tend vers $TY - Y$ quand k tend vers l'infini, par continuité de l'application linéaire $A \mapsto TA$. D'autre part :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant \|TR_{\varphi(k)}X - R_{\varphi(k)}X\|_1 \leqslant |||TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)}||| \cdot \|X\|_1 \leqslant \frac{2}{\varphi(k)}\|X\|_1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc : $TY = Y$, puis $T^jY = Y$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, et enfin : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $R_kY = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} T^jY = Y$.

19. Soient m et ℓ deux entiers naturels non nuls, et Y, Z deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_kX)_{k\geqslant 1}$. Comme R_ℓ et R_m commutent (ce sont deux polynômes en T), nous avons directement :

$$R_\ell(R_mX - Z) - R_m(R_\ell X - Y) = R_\ell R_m X - R_\ell Z - R_\ell R_m X + R_m Y = Y - Z.$$

On en déduit, si φ et φ' sont deux extractrices telles que $R_{\varphi(k)}x \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Y$ et $R_{\varphi'(k)}x \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Z$:

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad ||Y - Z||_1 &= \left|\left|\left|R_{\varphi(k)}(R_{\varphi'(k)}X - Z) - R_{\varphi'(k)}(R_{\varphi(k)}X - Y)\right|\right|\right|_1 \\
&\leqslant \underbrace{|||R_{\varphi(k)}|||}_{\leqslant 1}\,||R_{\varphi'(k)}X - Z||_1 + \underbrace{|||R_{\varphi'(k)}|||}_{\leqslant 1}\,||R_{\varphi(k)}X - Y||_1 \\
&\leqslant ||R_{\varphi'(k)}X - Z||_1 + ||R_{\varphi(k)}X - Y||_1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $Y = Z$. La suite $(R_kx)_{k\geqslant 1}$ possède donc une et une seule valeur d'adhérence.

20. En dimension finie, une suite bornée qui ne possède qu'une valeur d'adhérence est convergente. On en déduit que pour tout X, la suite $(R_kX)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons donc f l'application :

$$f : \begin{cases} \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \to & \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & \displaystyle\lim_{+\infty} R_kX \end{cases}.$$

L'application f est clairement linéaire, puisque si $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, alors on a : $R_k(\lambda X + \mu Y) = \lambda R_k(X) + \mu R_k(Y)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui donne : $f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$ quand k tend vers l'infini. En en déduit qu'il existe une matrice R telle que : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $RX = f(X) = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} R_kX$.

En choisissant pour X le i^e vecteur de la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, nous en déduisons que la i^e colonne de R_k converge vers la i^e colonne de R. Ceci prouve que la suite $(R_k)_{k\geqslant 1}$ converge vers R composante par composante, et donc converge vers R au sens d'une des normes usuelles. Par équivalence des normes en dimension finie, on en déduit que R_k tend également vers R au sens de la norme $|||\cdot|||$ quand k tend vers l'infini.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Rares sont les démonstrations de convergence où l'on montre qu'une suite est bornée et admet une unique valeur d'adhérence. Sauriez-vous expliquer ce qui rendait *a priori* pertinente cette idée ici ?
> — Pourquoi ai-je introduit cette application f ? Comparer aux autres façons utilisées en exercice de montrer que, pour une suite de matrices (ou d'endomorphismes en dimension finie), la convergence simple équivaut à la convergence. Retenir une façon privilégiée de faire.

21. Comme R_k est un polynôme en T, on en déduit que T commute avec chaque R_k, c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $R_kT = TR_k$. Or les applications $M \mapsto MT$ et $M \mapsto TM$ sont continues par linéarité (ou continuité du produit matriciel, ou des applications polynomiales en les coefficients de T), donc quand $k \to +\infty$ on obtient : $RT = TR$.

    Voyons comment en déduire les deux identités demandées. En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité de la question 16, on obtient : $|||TR - R||| = 0$, soit donc : $R = TR = RT$. On en déduit que : $\forall j \in \mathbb{N}$, $RT^j = R$ (récurrence facile), puis :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ R\cdot R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} RT^j = R,$$

    ce qui donne enfin $R^2 = R$ en faisant tendre k vers l'infini (toujours par continuité du produit matriciel).

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** En imitant le raisonnement de cette question, pouvez-vous proposer un résultat plus général sur les limites de suites de la forme $(A^n)_{n\geqslant 0}$ (avec A une matrice), lorsqu'elles convergent ?

22. La question précédente montre que R est une matrice de projecteur : elle est donc caractérisée par ses sous-espaces propres $\ker(R)$ et $\ker(R - \mathrm{I}_n) = \mathrm{im}(R)$. Déterminons-les.

    Comme, par la question précédente : $(T - \mathrm{I}_n)R = 0$, on a : $\mathrm{im}(R) \subseteq \ker(T - \mathrm{I}_n)$. D'autre part, si $X \in \ker(T - \mathrm{I}_n)$, on a : $R_kX = X$ pour tout $k \geqslant 1$ et donc, par continuité du produit matriciel : $RX = X$: ceci prouve que $X \in \mathrm{im}(R)$ (caractérisation de l'image d'un projecteur), ce qui donne : $\mathrm{im}(R) = \ker(T - \mathrm{I}_n)$.

    Enfin, $R(T - \mathrm{I}_n) = 0$ donne : $\mathrm{im}(T - \mathrm{I}_n) \subseteq \ker(R)$. Par le théorème du rang, nous avons :

$$\dim(\ker(R)) = n - \dim(\mathrm{im}(R)) = n - \dim(\ker(T - \mathrm{I}_n)) = \dim(\mathrm{im}(T - \mathrm{I}_n)),$$

    et donc : $\ker(R) = \mathrm{im}(T - \mathrm{I}_n)$.

    Ceci prouve que R est la matrice du projecteur sur le sous-espace propre $\ker(T - \mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{im}(T - \mathrm{I}_n)$ (ces deux sous-espaces étant en particulier supplémentaires).

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Comparer la méthode de ce problème avec l'étude analogue faite dans l'un de vos exercices de travaux dirigés, consacré à l'étude de la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^k\right)_{n\geqslant 0}$ avec f un endomorphisme vérifiant : $|||f||| \leqslant 1$. Cette condition revient ici. Cependant on ne supposait pas f stochastique dans cet exercice, et pourtant on semble y démontrer la même chose que dans ce problème : qu'en est-il ? Qu'avons-nous de plus ici ?

23. Comme $\ker(T - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1, il est engendré par le vecteur X_0. D'autre part, T étant stochastique, les vecteurs colonnes de la matrice $T - \mathrm{I}_n$ sont contenus dans l'hyperplan d'équation $X_1 + \cdots + X_n = 0$. Comme $\mathrm{im}(T - \mathrm{I}_n)$ est un hyperplan, on en déduit que c'est exactement l'ensemble des vecteurs X vérifiant : $X_1 + \cdots + X_n = 0$. Un élément X de B s'écrit alors d'une unique façon sous la forme :
$$X = \lambda X_0 + Y$$
avec : $\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$. On en déduit : $\sum_{i=1}^{n} X_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} (X_0)_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} (X_0)_i$. Comme les deux vecteurs X_0 et X sont éléments de B, cela donne : $\lambda = \frac{\|X\|_1}{\|X_0\|_1}$. Nous avons ainsi calculé le projeté de X sur $\mathrm{im}(R)$ parallèlement à $\ker(R)$:
$$\forall\, X \in B, \quad RX = \|X\|_1 \frac{X_0}{\|X_0\|_1}.$$
Ceci achève de démontrer le théorème de Perron-Frobenius : si Y est élément de $\Sigma \cap B$, alors : $||Y||_1 = 1$ et l'égalité précédente s'écrit :
$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j Y \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{X_0}{\|X_0\|_1},$$
ce qui permet d'approximer le vecteur propre strictement positif unitaire associé à la valeur propre 1.

Remarque : démonstration du résultat admis par l'énoncé. On a :
$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} T^k$$
de sorte que, comme T et donc T^k est stochastique, en notant c_j la colonne j de P, on a : $\|c_j\|_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2n - 1$.

Soit alors X un élément non nul de $\ker(T - \mathrm{I}_n)$. Il vient immédiatement : $PX = 2^{n-1}x$, ce qui s'écrit : $\sum_{k=1}^{n} X_k c_k = (2n-1)X$. Or : $\sum_{k=1}^{n} \|X_k c_k\|_1 = 2^{n-1}\|X\|_1$, puisque $\|c_k\|_1 = 2n - 1$ d'après ce qui précède. Ainsi :
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} X_k c_k \right\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \|X_k c_k\|_1.$$
On est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Ainsi les vecteurs $X_1 c_1, \ldots, X_n c_n$ sont positivement liés et donc, comme P est strictement positive, il en découle que les complexes $X_1, \ldots, X_n$ le sont et donc on peut écrire $X = \alpha Y$ avec $Y \in B \cap \Sigma$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

Il en découle que, pour prouver : $\dim(\ker(T - \mathrm{I}_n)) \leqslant 1$ (ce qui suffirait à démontrer que ce noyau est exactement de dimension 1), il suffit de montrer que si Y et Z sont deux éléments dans $\ker(T - \mathrm{I}_n) \cap B \cap \Sigma$, alors : $Y = Z$.

Supposons $Y - Z$ non nul. Comme il est élément de $\ker(T - \mathrm{I}_n)$, d'après ce qui précède on peut écrire : $Y - Z = \beta V$ avec $V \in B$ et $\beta \in \mathbb{R}$ (puisque Y et Z sont à coefficients réels). Quitte à échanger les rôles de Y et Z, supposons : $\beta > 0$, c'est-à-dire : $Y > Z$. On a alors :
$$\|Y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |Y_i| = \sum_{i=1}^{n} Y_i > \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sum_{i=1}^{n} |Z_i| = 1.$$
Contradiction avec le fait que : $\|Y\|_1 = 1$.