Devoir maison n° 6 – Compte rendu

Redite des devoirs précédents.

1. Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, essayez d'abord de l'identifier comme un « Vect », ou comme une image ou noyau d'application linéaire. C'est souvent le cas s'il est décrit sous la forme $F = \{\bigstar \mid \spadesuit \in E\}$ (c'est l'image de $\spadesuit \mapsto \bigstar$) ou $F = \{\spadesuit \in E \mid \bigstar = 0\}$ (c'est son noyau). Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel est souvent une vérification très basique ne méritant pas qu'on y passe plus de trente secondes.

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

2. Ne pas écrire : « Comme... alors... » C'est un barbarisme.
3. Une fois que vous avez constaté que : $X^\top X = \sum_{i=1}^n x_i^2$ (normalement vous n'avez pas à le « constater » vu que c'est dans votre cours de géométrie de 1re année, mais passons...), vous avez très justement montré que si cette somme est nulle alors $X = 0$, grâce à un argument classique sur la positivité des termes de la somme. Cependant vous pouvez aller plus vite en disant : $\sum_{i=1}^n x_i^2 = (\|X\|_2)^2$, et en rappelant que $\|\cdot\|_2$ sépare les points.

Imprécisions mathématiques.

4. Attention, $\lambda^{1/k}$ n'existe pas si $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Donnez un autre nom à une racine k^{e} complexe de λ.
5. Il n'est pas correct de dire : « $1 + x - U(x)^k = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, donc $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ est un polynôme ». Il y a plusieurs problèmes dans cette formulation : 1° la notation $\underset{x\to a}{o}(f(x))$ ne désigne pas une fonction définie de manière unique et cela ne permet pas d'utiliser les propriétés de symétrie, réflexivité et transitivité d'une égalité (on a $1 = \underset{x\to+\infty}{o}(x^n)$ et $2 = \underset{x\to+\infty}{o}(x^n)$, donc $1 = 2$?), 2° l'égalité ci-dessus est vraie localement : rien n'assure qu'elle soit vraie globalement (en principe, rien n'empêche que la fonction cachée derrière le $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ soit polynomiale au voisinage de 0 et exponentielle au-delà ; elle peut aussi ne pas être définie du tout loin de 0).

   De manière générale, un passage des applications polynomiales aux polynômes n'est pas anodin et doit se faire prudemment (ici en posant d'abord $P = 1 + X - U^k$, et ensuite en utilisant le fait que $P(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ pour expliciter la valuation de P).
6. La somme $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)$ se ramène immédiatement à la somme classique $\sum_{i=1}^{n-1} i$ *via* la permutation $i \mapsto n - i$ (c'est une façon savante de dire que la première somme est la même que la seconde en sommant dans l'ordre contraire). La calculer en écrivant : « $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i = \cdots$ » m'interpelle fortement, et me fait penser que le « sens » de l'identité $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$ n'est pas compris.

   En effet, on la démontre en général en utilisant justement le fait que $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} i$!

   Cette même technique permet de montrer : $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$: exercice (il y a plein de façons d'obtenir cette somme, mais je vous trouve fort peu à l'aise dans le calcul de sommes *via* permutations – cf. commentaires du DST n° 4 – et c'est pourquoi je vous incite à vous les approprier).
7. Pour compter les couples (i, j) tels que : $1 \leqslant i < j \leqslant n$, il suffit de remarquer que cela revient à choisir deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$ (on décrète alors que i est le plus petit des deux et j le plus grand). Il devient alors immédiat que $(E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ est de cardinal $\frac{n(n-1)}{2}$.

   Lorsqu'on voit la quantité $\frac{n(n-1)}{2}$, il vaut le coup de réfléchir pendant quelques instants pour voir s'il n'y a pas un dénombrement facile caché derrière (pas forcément).

8. Pour le calcul de $X^\top AX$ et $X^\top X$, presque personne n'a exploité le fait que $X^\top Y$ soit en toute généralité le produit scalaire usuel de X par Y (cf. le cours de géométrie de 1$^{\text{re}}$ année).
9. Il est dommage que certains élèves aient préféré montrer que $X^\top AX = 0$ (pour A antisymétrique) par un calcul brut exprimant ce produit matriciel à l'aide des coefficients de X et A. En procédant ainsi, vous ne tiriez pas profit de la caractérisation très succincte de l'antisymétrie ($A^\top = -A$) et des propriétés de la transposition vis-à-vis du produit ($(XY)^\top = Y^\top X^\top$).
10. Pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables (dans ce devoir, il fallait construire une matrice antisymétrique qui n'est pas semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte), vous avez été nombreux à vouloir comparer les puissances : une matrice triangulaire supérieure stricte étant nilpotente, toute matrice lui étant semblable l'est aussi et il suffit donc de trouver une matrice antisymétrique non nilpotente pour conclure.

    C'était une idée pertinente, mais le calcul de puissance peut souvent être malaisé. Pourquoi ne pas avoir cherché à comparer des invariants de similitude plus simples en premier lieu ? Après avoir comparé rangs, traces et déterminants (non fructueux ici, sauf si n est pair où il existe des matrices antisymétriques et inversibles), pensez aux valeurs propres qui s'obtiennent à l'œil nu ou facilement pour de nombreuses matrices.
11. En rapport avec le point précédent : il est beaucoup plus facile de calculer des puissances de matrices d'ordre n lorsqu'elles sont diagonales par blocs. Vous avez pourtant été rares à proposer de telles matrices (prendre une matrice de blocs diagonaux $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aurait permis directement d'avoir une matrice non nilpotente, vu que $D^{2k} = (-1)^k \mathrm{I}_2$ pour tout k).
12. Pour montrer que $K(V')$ est un espace vectoriel, vous avez souvent utilisé implicitement le fait que V' en soit un, sans le mentionner ni le justifier (même brièvement).
13. Si on vous demande de simplifier un produit de la forme $P^{-1}MP$, vous devriez IMMÉDIATEMENT penser à appliquer la formule du changement de base avec l'endomorphisme canoniquement associé à M. J'ai été très contrarié de voir cette idée si rarement mise en application (vous privilégiiez à la place un calcul laborieux), d'autant plus que la matrice de passage P s'y prêtait très bien. Cela me fait penser que vous ne penseriez pas spontanément à une telle conjugaison si vous aviez besoin de permuter des colonnes et lignes.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

14. Attention, l'extraction de racines k^{es} d'une matrice carrée n'est pas toujours possible si elle n'est pas inversible. Vous avez presque tous proposé un contre-exemple correct, et cela n'a pour autant pas alerté certains élèves sur la nécessité que les valeurs propres λ_i soient non nulles dans la deuxième question de l'exercice.