Devoir maison n° 6

(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

L'exercice concernant l'existence de racines k^{es} d'une matrice complexe inversible est classique. Je l'ai tiré de l'épreuve de Mathématiques de CCP, filière MP, année 2013, mais il est hors de doute qu'on trouve la même préoccupation en bien d'autres endroits.

Le problème est une adaptation de l'épreuve de Mathématiques II du Concours Commun Mines-Ponts, filière PSI, année 2016. J'ai retiré quelques questions intermédiaires ainsi qu'une question nécessitant le théorème spectral (toute matrice symétrique réelle est diagonalisable).

Une source féconde de problèmes d'algèbre linéaire, aux concours, provient de questions de la forme suivante : soit F une *partie* de $\mathrm{M}_n(K)$ constituée de matrices « remarquables » (matrices inversibles, matrices diagonalisables, matrices nilpotentes, etc.). Quelle est la dimension :

- maximale du plus grand sous-espace vectoriel inclus dans F ?
- de l'espace vectoriel engendré par F ?

Ce devoir traite le cas du sous-espace vectoriel maximal ne contenant que des matrices de spectre $\{0\}$ (ce qui correspond exactement aux matrices nilpotentes si l'on est sur $\mathbb{C}$). Cette question a une réponse très récente, établie indépendamment par Quinlan en 2011 et de Seguins Pazzis en 2007. Le problème en question suit la démarche de ce dernier (voir le sujet de Mines-Ponts de 2020 en filière MP pour une démonstration d'un résultat très proche concernant les matrices nilpotentes réelles, suivant une démarche très différente).

Maintenant que vous avez découvert la topologie, vous pourrez apprécier comment des raisonnements analytiques permettent de traiter rapidement la problématique formulée plus haut dans certains cas particuliers. Par exemple, si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ alors on a : $\mathrm{GL}_n(K) \subseteq \mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(K)) \subseteq \mathrm{M}_n(K)$, donc : $\overline{\mathrm{GL}_n(K)} \subseteq \overline{\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(K))} \subseteq \mathrm{M}_n(K)$. Or la densité des matrices inversibles donne : $\overline{\mathrm{GL}_n(K)} = \mathrm{M}_n(K)$, et comme un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé on conclut : $\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{M}_n(K)$. On explicite de même l'espace vectoriel engendré par les matrices diagonalisables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Le cas des matrices nilpotentes est cependant moins direct (quoique vous puissiez démontrer rapidement qu'un tel sous-espace vectoriel ne peut être l'espace entier ni un hyperplan).

Je n'ai pas eu le temps de développer ce commentaire, ni d'écrire le corrigé du problème (que l'on doit à Christophe Devulder, professeur au lycée Janson de Sailly ; j'ai seulement rectifié la syntaxe ou la typographie épisodiquement, mais aucunement le fond mathématique).

2 Corrigé

Exercice

1. Par le théorème de Taylor-Young, on sait qu'il existe $U \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que pour tout x au voisinage de 0, on ait : $(1+x)^{\frac{1}{k}} = U(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Alors, pour tout x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} 1+x = \left(U(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\right)^k &= (U(x))^k + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(U(x))^{k-i}\cdot \underset{x\to 0}{o}\left(x^{ni}\right) \qquad \text{(notation impropre)} \\ &= (U(x))^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n). \end{aligned}$$

(Certains coefficients du polynôme U^k peuvent être « absorbés » par le terme d'erreur $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$, mais c'est sans importance en vue de ce qu'on veut démontrer.)
Posons alors : $V = (1+X) - U^k \in \mathbb{C}[X]$. On a d'après ce qui précède : $V(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Déduisons-en que X^n divise V. Si V est le polynôme nul alors c'est évident. Sinon, en notant ℓ la valuation de V et d son degré, on peut écrire : $V = \sum\limits_{k=\ell}^{d} a_k X^k$, avec $(a_\ell,\dots,a_d) \in \mathbb{C}^{d-\ell+1}$ et $a_\ell \neq 0$. Comme : $V(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_\ell x^\ell$, et : $V(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, on a : $x^\ell = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Ce n'est possible que si : $\ell \geqslant n$, et donc $V = X^n \sum\limits_{k=\ell}^{d} a_k X^{k-n}$ est bien divisible par X^n. En posant : $Q = \sum\limits_{k=\ell}^{d} a_k X^{k-n} \in \mathbb{C}[X]$, on a bien le résultat voulu :

$$1 + X = U^k + V = U^k + X^n Q.$$

2. On a :

$$\lambda + X = \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda}X\right) = \lambda\left(U\left(\frac{1}{\lambda}X\right)^k + \left(\frac{1}{\lambda}X\right)^n Q\left(\frac{1}{\lambda}X\right)\right).$$

La matrice $\frac{1}{\lambda}N$ est bien entendu nilpotente comme N. On évalue donc l'égalité ci-dessus en N, dont on sait qu'elle vérifie : $N^n = 0_{\mathrm{M_n(\mathbb{C})}}$ (comme toute matrice nilpotente de taille n). On obtient alors :

$$\lambda \mathrm{I}_n + N = \lambda\left(U\left(\frac{1}{\lambda}N\right)^k + \left(\frac{1}{\lambda}N\right)^n Q\left(\frac{1}{\lambda}N\right)\right) = \lambda U\left(\frac{1}{\lambda}N\right)^k.$$

Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$ une racine k^{e} de λ (il en existe). Posons : $A = \omega U\left(\frac{1}{\lambda}N\right)$. On a montré qu'on a : $\lambda\mathrm{I}_n + N = A^k$, ce qu'il fallait démontrer.
Pour en déduire que toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ admet une racine k^{e} : on la triangule. On sait en effet que si $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sont les valeurs propres de M, et $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ leurs ordres de multiplicité, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et des matrices $N_1,\dots,N_r$ triangulaires supérieures strictes (et donc nilpotentes) telles que :

$$M = P\begin{pmatrix} \lambda_1\mathrm{I}_{\alpha_1} + N_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_r\mathrm{I}_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, soit $A_i \in \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ telle que : $A_i^k = \lambda_i\mathrm{I}_{\alpha_i} + N_i$. Une telle matrice existe d'après ce qui précède ; en effet, les λ_i sont non nuls puisqu'une matrice inversible n'admet pas 0 pour valeur propre. On a alors :

$$M = P\begin{pmatrix} A_1^k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_r^k \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_r \end{pmatrix}^k P^{-1} = \left(P\begin{pmatrix} A_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_r \end{pmatrix}P^{-1}\right)^k.$$

d'où l'existence d'une racine k^{e} de M : ce qu'il fallait démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— On remarque qu'une racine k^{e} de $\lambda I_n + N$ un polynôme en N. Pouvait-on l'anticiper, au vu de tout ce que vous savez sur les polynômes de matrices, et en se souvenant de résolutions d'exercices analogues ? (Portant sur la recherche de solutions à des équations matricielles.)

— Est-ce que cet exercice est commode pour fabriquer une racine k^{e} *en pratique* ?

— Après l'identité $(1-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$, utilisée dans d'autres anneaux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, puis l'identité $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ qu'on peut croiser dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ afin de définir une fonction vérifiant les mêmes propriétés que l'exponentielle, voici une autre situation où je généralise une identité *a priori* valable dans un contexte *analytique* (réel ou complexe), dans un tout autre anneau (celui des matrices), cette fois-ci pour imiter les racines k^{es} réelles. Fichtre ! Pourquoi était-il prévisible que cette généralisation marche ? À mettre en rapport avec ce que je vous ai déjà répété à ce sujet, et que j'ai aussi écrit dans *Présentation des chapitres de MP*, section sur les séries entières.

— Se demander ce qui nécessitait de se placer sur $\mathbb{C}$ plutôt que $\mathbb{R}$ dans ce raisonnement.

3. Il suffit de considérer une matrice nilpotente. Le raisonnement qui suit est très classique. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence de $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ telle que : $A^3 = M$. Comme : $M^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{C})}$, on a : $A^9 = (A^3)^3 = M^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{C})}$, donc A est nilpotente et son indice de nilpotence doit être inférieur ou égal à sa taille, c'est-à-dire 3. C'est-à-dire : $A^3 = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{C})}$. Or : $M = A^3$, donc l'égalité précédente équivaut à : $M = 0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{C})}$, ce qui est faux. Contradiction : la matrice M n'admet donc pas de racine cubique.

Problème

Partie A. Exemples.

1. Le polynôme caractéristique de D est : $\chi_D = X^2 + 1$. Il n'a aucune racine réelle et le spectre réel de D est vide. En particulier D n'a aucune valeur propre réelle non nulle et D est $\mathbb{R}$-quasi-nilpotente. Le spectre complexe de D est $\{i, -i\}$ et contient au moins un élément non nul donc D n'est pas $\mathbb{C}$-quasi-nilpotente.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Comparer le contre-exemple proposé et celui que j'ai donné dans le cours (de matrice non nilpotente dont le spectre ne contient que 0). Est-ce que la démarche méthodologique pour trouver ce contre-exemple est la même ?

2. Le polynôme caractéristique de B est : $\chi_B = X^2 - \mathrm{tr}(B)X + \det(B) = X^2$. Ainsi, le spectre complexe de B est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul. La matrice B est $\mathbb{C}$-quasi-nilpotente.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. J'affirme que certaines matrices d'indice de nilpotence égal à 2 se repèrent à l'œil nu. Pourquoi ? Est-ce le cas ici ? Faire le lien avec un exercice de travaux dirigés.

3. L'ensemble $\mathrm{T}_n^{++}(K)$ est non vide (il contient $0_{\mathrm{M}_n(K)}$) et est stable par combinaisons linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(K)$. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc : $\forall T \in \mathrm{T}_n^{++}(K),\ \mathrm{Sp}_K(T) = \{0\}$. Ceci montre que $\mathrm{T}_n^{++}(K)$ est quasi-nilpotent. On montre que :

$$\mathrm{T}_n^{++}(K) = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\right).$$

La famille étant libre, c'est une base et :

$$\dim(\mathrm{T}_n^{++}(K)) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. Notons que si $X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X^\top Y$ peut s'interpréter comme le produit scalaire $(X|Y)$ de X et Y vus comme éléments de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :
$$X^\top AX = (X|AX) = (AX|X) = (AX)^\top X = X^\top A^\top X = -X^\top AX.$$
On en déduit donc que : $X^\top AX = 0$. En particulier, si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé alors :
$$0 = X^\top AX = \lambda \|X\|^2.$$
et comme : $X \neq 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ (vecteur propre), on a : $\lambda = 0$. Donc 0 est la seule valeur propre réelle possible pour A. On a montré que $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent.
Anticipation sur le chapitre de géométrie. Ce raisonnement montre en quoi les matrices transposées s'étudient plus commodément par des méthodes géométriques (c'est ce que je vous disais déjà lorsque je vous expliquais pourquoi l'énoncé du théorème spectral, concernant la diagonalisation des matrices symétriques réelles, devait attendre le chapitre de géométrie). C'est d'autant plus flagrant pour les matrices symétriques et antisymétriques, qui ont des liens ténus avec leurs transposées. Retenez la philosophie de ce raisonnement (avoir des données sur les valeurs propres d'une matrice transposée grâce à un produit scalaire), qui est typique et ne sera pas guidé en général !

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Réciproquement, est-ce que 0 est valeur propre d'une matrice antisymétrique ? (La réponse à cette question est plus riche qu'il n'y paraît)
- Peut-on adapter ce raisonnement pour avoir une condition nécessaire sur les valeurs propres **complexes** d'une matrice antisymétrique réelle ?
- Y a-t-il d'autres matrices pour lesquelles ce type de raisonnement donne une information sur les valeurs propres ?

5. Comme $n \geqslant 2$, on peut considérer la matrice M définie par blocs par :
$$M = \begin{pmatrix} D & 0_{\mathrm{M}_{2,n-2}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{n-2,2}(\mathbb{R})} & 0_{\mathrm{M}_{n-2}(\mathbb{R})} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$
On a : $\chi_M = X^{n-2}\chi_D = X^{n-2}(X^2+1)$, et le spectre complexe de M est soit égal à $\{i, -i\}$ (cas $n = 2$) soit égal à $\{0, i, -i\}$ (cas $n \geqslant 3$).
Si, par l'absurde, il existait une matrice P comme dans l'énoncé, M serait semblable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à un élément de $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc à une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe.
La similitude dans $\mathbb{R}$ entraînant immédiatement celle dans $\mathbb{C}$ (car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) et le spectre étant un invariant de similitude, on obtient une contradiction.
Il n'existe donc pas de P comme dans l'énoncé.

Partie B. Lemme des colonnes.

6. La seule matrice quasi-nilpotente de $\mathrm{M}_1(K)$ est la matrice nulle (puisqu'une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas $n = 1$.
7. Tout d'abord, il est clair que $K(V')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n-1}(K)$, puisque c'est l'image d'une application linéaire. Un calcul de déterminant par blocs montre que si $M \in V'$ alors :
$$\chi_M = X \cdot \chi_{K(M)}.$$
Les valeurs propres non nulles de $M \in V'$ et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes. Si V' est quasi-nilpotent alors $K(V')$ l'est aussi.

8. D'après l'hypothèse de récurrence appliqué à $K(V')$ (sous-espace de $\mathrm{M}_{n-1}(K)$), il existe un élément $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que : $\mathrm{C}_j(K(V')) = \{0_{\mathrm{M}_{n-1}(K)}\}$. D'après l'hypothèse absurde, il existe une matrice M non nulle dans $\mathrm{C}_j(V)$. Comme : $j < n$, on a : $M \in V'$, et donc : $K(M) \in K(V')$. Comme $M \in \mathrm{C}_j(V)$, toutes les colonnes de $K(M)$ sont nulles peut-être la j^{e}. Finalement, $K(M) \in C_j(K(V'))$ et donc : $K(M) = 0_{\mathrm{M}_{n-1}(K)}$.
   La matrice M a ainsi une unique colonne qui peut être non nulle (celle numéro j) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul.
   Comme : $M \neq 0_{\mathrm{M}_n(K)}$, il existe $c \neq 0$ tel que : $M = cE_{n,j}$. Enfin, V' est un sous-espace vectoriel et on a donc : $E_{n,j} = \frac{1}{c}M \in V' \subseteq V$.
9. Soit u_σ l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ qui envoie la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ sur $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ (qui est aussi une base puisqu'on n'a fait que permuter les vecteurs de la base canonique). Cette application linéaire est un isomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ dans lui-même par construction, et comme $(u_\sigma)^{-1}$ envoie $e_{\sigma(i)}$ sur e_i pour tout i et donc e_k sur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ pour tout k, on a : $(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$.
   Or on vérifie aisément que : $P_\sigma = \mathrm{M}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma)$. On en déduit que P_σ est inversible et que :
   $$(P_\sigma)^{-1} = \mathrm{M}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (\delta_{\sigma(i),j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$
   Soit g l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ canoniquement associé à M. Comme P_σ est la matrice de changement de base de $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à $(e_{\sigma(i)})_{1\leqslant i\leqslant n}$, d'après la formule de changement de base :
   $$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = \mathrm{M}_{(e_{\sigma(i)})_{1\leqslant i\leqslant n}}(g).$$
   Le coefficient à l'intersection des colonne j et ligne i est la coordonnée sur $e_{\sigma(i)}$ de $g(e_{\sigma(j)})$. Or :
   $$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,\sigma(j)} e_k = \sum_{\ell=1}^{n} m_{\sigma(\ell),\sigma(j)} e_{\sigma(\ell)}.$$
   Finalement :
   $$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Est-ce que l'effet de ce changement de base se « voit » et pouvait être anticipé, soit par la compréhension intuitive de ce qu'est ce changement de base, soit par le principe de conjugaison ?

10. Comme V^σ est l'image de V par l'application linéaire $M \mapsto P_\sigma^{-1} M P$, c'est un espace vectoriel.
   Le spectre étant un invariant de similitude, le caractère quasi-nilpotent des éléments de V entraîne celui des éléments de V^σ et V^σ est un sous-espace quasi-nilpotent de $\mathrm{M}_n(K)$.
   Enfin, fixons $k \in [\![1, n]\!]$. D'après l'hypothèse absurde, on peut trouver M non nulle dans $C_{\sigma(k)}(V)$. On a en particulier $m_{\ell,c}$ qui est nul si $c \neq \sigma(k)$, ce que l'on peut écrire : $m_{\sigma(\ell),\sigma(c)} = 0$ si $\sigma(c) \neq \sigma(k)$ ou encore si $c \neq k$. La matrice $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ est donc dans $\mathrm{C}_k(V^\sigma)$. Elle est non nulle car M l'est (et $A \mapsto P_\sigma^{-1} A P$ est un isomorphisme). On a montré que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{C}_k(V^\sigma) \neq \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}.$$
11. Les sous-espaces V^σ et V ont les mêmes propriétés (sous-espaces quasi-nilpotents tels que pour tout k, on ait : $\mathrm{C}_k(V^\sigma) \neq \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$). Pour tout σ, on peut donc appliquer la question 11 à V^σ et dire qu'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,k} \in V_\sigma$, ou encore que : $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} \in V$.
   D'après la question 9, pour tout choix de σ on a : $P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma = E_{\sigma^{-1}(u),\sigma^{-1}(v)}$ (en effet en notant $N = P_\sigma^{-1} E_{u,v} P_\sigma$, on a $N_{i,j}$ qui est égal au coefficient $(\sigma(i), \sigma(j))$ de $E_{u,v}$ et est nul sauf si $\sigma(i) = u$ et $\sigma(j) = v$).
   En appliquant ceci avec σ^{-1}, on a donc $P_\sigma E_{n,k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)}$.

Fixons $j \in [\![1, n]\!]$. Appliquons ceci avec σ la bijection qui se contente de permuter j et n en laissant les autres éléments invariants (c'est l'identité si $j = n$). On trouve alors $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que : $E_{\sigma(n),\sigma(k)} = E_{j,\sigma(k)} \in V$. On a bien sûr : $\sigma(k) \neq j$, car $k \neq n$ et σ est une bijection qui envoie déjà n sur j. On a donc prouvé que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \exists\, f(j) \neq j, \quad E_{j,f(j)} \in V.$$

12. Posons $i_1 = 1$ et, pour tout $k \geqslant 2$, $i_k = f(i_{k-1})$. L'ensemble $\{i_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ est inclus dans $[\![1, n]\!]$ et donc fini. Or $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est infini. Il existe donc deux i_k égaux pour des valeurs de k différentes : $i_a = i_b$ avec $a < b$. En partant de i_a et en itérant successivement par f, on finit par retomber sur i_a. On regarde la première fois où on retrouve i_a et ce n'est pas à la première itération car $f(j) \neq j$ pour tout j. On trouve des indices $i_a, i_{a+1}, \ldots, i_{a+p-1}$ avec $p \geqslant 2$ deux à deux distincts images successifs les uns des autres par f et avec $f(i_{a+p-1}) = f(i_a)$.
En posant $j_1 = i_a$, $j_2 = i_{a+1}$, …, $j_p = i_{a+p-1}$, on a des éléments deux à deux distincts et :

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \ \text{ et } \ f(j_p) = j_1.$$

13. La matrice N comporte p valeurs non nulles qui sont égales à 1. Il y a un coefficient 1 sur chaque ligne $j_1, \ldots, j_p$ et aussi un sur chaque colonne $f(j_1), \ldots, f(j_p) = j_2, \ldots, j_p, j_1$. On en déduit que le vecteur $\sum\limits_{k=1}^{p} e_{j_k}$ est propre pour N associé à la valeur propre 1.
Ceci est contradictoire car $N \in V$ (comme somme d'éléments de V qui est un espace vectoriel) et ne devrait posséder aucune valeur propre non nulle. Ceci clôt le raisonnement par l'absurde.

Partie C. Cas général.

14. Considérons l'application $\Phi : M \in V \mapsto (K(M), L(M))$. Si $\Phi(M) = (0_{\mathrm{M}_{n-1}(K)}, 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(K)})$ alors $L(M) = 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(K)}$ et $K(M) = 0_{\mathrm{M}_{n-1}(K)}$. Or $\mathrm{C}_n(V) = \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$ et ces conditions impliquent donc que $M = 0_{\mathrm{M}_n(K)}$. Le noyau de Φ est égal à $\ker(K) \cap \ker(L)$ et Φ (qui est linéaire) est injective. On a ainsi :

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\Phi(V)).$$

On peut trouver un supplémentaire W' de W dans V et on a (par injectivité de Φ) :

$$\Phi(V) = \Phi(W) \oplus \Phi(W').$$

On a : $\Phi(W) = \{(K(M), L(M)) \mid M \in W\} = \{(K(M), 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(K)}) \mid M \in W\}$ qui est isomorphe à $K(W)$ et donc de même dimension.
On a : $W = \ker(L)$ et par le théorème du rang, W' est isomorphe à $L(V)$ qui est de dimension inférieure ou égale à $n-1$. Par conséquent $\Phi(W')$ qui est isomorphe à W' est aussi de dimension inférieure ou égale $n-1$. Finalement :

$$\dim(V) = \dim(\Phi(V)) \leqslant \dim(K(W)) + n - 1.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Vérifier les différentes propriétés issues de l'injectivité de Φ, et se demander si elles caractérisent les applications linéaires injectives (par exemple, si Φ préserve toutes les sommes directes, ou transforme tout couple de sous-espaces supplémentaires en couple de sous-espaces supplémentaires, est-ce que Φ est injective ?).

15. Soit $M \in W$. On a : $M = \begin{pmatrix} K(M) & R(M) \\ 0_{\mathrm{M}_{1,n-1}(K)} & a(M) \end{pmatrix}$ qui est quasi nilpotente (car dans V) et ses valeurs propres sont celles de $K(M)$ et $a(M)$. Ainsi $K(M)$ n'a pas de valeur propre non nulle (et $a(M) = 0$). Ceci montre que l'espace vectoriel $K(W)$ est quasi-nilpotent. D'après l'hypothèse de récurrence, sa dimension est plus petite que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. La question précédente donne alors :

$$\dim(V) \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

16. D'après le lemme des colonnes, il existe j tel que $\mathrm{C}_j(V) = \{0_{\mathrm{M}_n(K)}\}$. Considérons la permutation σ qui échange j et n. Le sous-espace V^σ est alors isomorphe à V et est un espace vectoriel quasi-nilpotent auquel on peut appliquer le cas précédent. On a donc :

$$\dim(V) = \dim(V^\sigma) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comprendre en quoi le raisonnement (d'abord raisonner avec $\mathrm{C}_n(V)$, puis s'y ramener grâce aux matrices de permutation) est une illustration du principe de conjugaison. Y penseriez-vous de votre propre chef, une fois le résultat montré pour $j = n$, afin de l'étendre à j quelconque ?

— L'énoncé prend $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Pouvait-on prendre un corps quelconque ?