Devoir maison n° 5 – Compte rendu

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Le contexte nécessitait de bien distinguer *nombres algébriques* et *entiers algébriques*. Cela n'a pas toujours été fait dans des questions où c'était pourtant essentiel. J'ai ainsi lu des raisonnements incompréhensibles du type : « Soit λ un nombre algébrique. Alors... donc λ est algébrique. »

Imprécisions mathématiques.

2. Beaucoup d'élèves n'ont pas eu la prudence de constater que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $P(\alpha) \in \mathbb{C}$ (et non $\mathbb{Q}$).
3. Lorsque vous utilisez le polynôme minimal d'un nombre complexe, assurez-vous que ce polynôme minimal existe bien (ce n'est pas toujours le cas), sauf évidemment si ledit nombre complexe est d'emblée supposé algébrique.
4. Le lien entre les questions n'est pas toujours vu. Il est dommage de ne pas avoir constaté que les questions 3.(a) et 3.(b) étaient directement conséquences des précédentes. Pareil pour le calcul de Φ_n pour $n \leqslant 6$: hormis pour $n = 6$, l'expression de ces polynômes était immédiatement conséquence du calcul de Φ_{p^k} effectué une question plus tôt (vu que 2, 3, 4 et 5 sont des nombres premiers ou puissances de nombres premiers).
5. Le passage de « q divise p^n » à « $q = \pm 1$ » tient plutôt au fait que q et p^n soient premiers entre eux (pas seulement q et p).
6. L'irréductibilité de $X^2 - \frac{6}{5}X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ fut rarement justifiée. Préciser que l'irréductibilité équivaut à l'absence de racines parce que le degré est inférieur ou égal à 3.
7. Lorsqu'on vous demande de calculer Φ_n pour $n \leqslant 6$, ne laissez pas une forme factorisée avec des exponentielles complexes ou des cosinus : elle ne vous enseigne rien de plus que la définition, et ne vous permet pas de faire simplement des conjectures pour les questions suivantes (valeurs de Φ_n en 0 et 1).

   C'est le contexte, ici, qui permettait de savoir qu'une forme développée était plus instructive. Ce n'est aucunement une remarque globale.
8. Pour la démonstration de l'identité : $zf(z)P'\left(\frac{1}{z}\right) = P\left(\frac{1}{z}\right)$, peu d'élèves ont utilisé la décomposition en éléments simples (normalement déjà vue et utilisée en 1re année) de $\frac{P'}{P}$. Comme : $\frac{P'}{P} = \sum_i \frac{1}{X - z_i}$ (avec z_i les racines de P, qui ici sont simples), on développe en série $\frac{P'\left(\frac{1}{z}\right)}{P\left(\frac{1}{z}\right)}$ très facilement et obtient directement $zf(z)$.