Devoir maison n° 4 – Compte rendu

Redite des devoirs précédents.

1. Les questions du type « montrer que f est bien définie » ne sont pas toujours bien abordées, encore une fois (et quand l'initiative devait vous revenir de vérifier la bonne définition, elle fut souvent omise).

   Lorsque vous définissez une application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, ce devrait *toujours* être votre préoccupation. Dans le contexte de ce devoir : l'application $\bar{k} \mapsto a^k$ n'a pas de sens en général : si $a = -1$ et $n = 3$, comment calculer l'image de $\bar{2}$ par cette application ? Est-ce $(-1)^2 = 1$ ou $(-1)^{-1} = -1$ (étant donné que $\bar{2} = \overline{-1}$) ? Ainsi, lorsque vous prétendiez que $\bar{k} \mapsto \exp\left(\frac{2i\pi k\ell}{n}\right)$ est un caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la question de la bonne définition devait être abordée. (C'est à cela que sert le théorème de factorisation, dont l'intérêt n'est probablement pas compris par beaucoup.)

   Je ne veux même pas parler de l'écriture $\bar{k} \mapsto a^{\bar{k}}$ qui devrait davantage vous choquer.

   Autre occurrence problématique : presque personne n'a compris le problème éventuel de définition du caractère $\chi' : K \to \mathbb{C}^*$ défini par $hg^\ell \mapsto \chi(h)\omega^\ell$. Si $x \in K$ s'écrit de deux façons différentes sous la forme hg^ℓ, il y a *a priori* deux images différentes possibles par χ' : il fallait vérifier que ce n'est pas le cas.

Imprécisions mathématiques.

2. Autre problème plus banal de bonne définition : en définissant vos morphismes à valeurs dans $\widehat{H}$, $\widehat{G \times H}$ ou $\hat{G} \times \hat{H}$, il fut rarement vérifié que les images proposées sont effectivement des caractères (c'était cependant trivial, il est vrai, sauf pour $g \mapsto \chi(g,1_H)$ où le fait d'avoir une deuxième composante neutre était essentiel).

3. Beaucoup d'élèves n'ont pas justifié l'existence d'un sous-groupe strict H et de $g \in G \setminus H$ tels que $\langle H \cup \{g\} \rangle = G$. Dans le même raisonnement par récurrence, la nécessité de prendre $H \neq \{1\}$ ne fut pas toujours observée (il fallait alors remarquer qu'il n'est pas toujours possible de trouver un sous-groupe strict non trivial : penser aux sous-groupes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

4. Il y eut un certain nombre de raisonnements fautifs sur l'ordre d'un produit. Lorsque m et n ne sont pas premiers entre eux, il est presque toujours faux que le produit de deux éléments d'ordres m et n respectivement est d'ordre $\text{ppcm}(m, n)$, même s'ils commutent et même si l'on rajoute des hypothèses sur m (ordre maximal, éléments non inverses l'un de l'autre...). Il n'a pas été relevé que si g est d'ordre maximal d, alors g^2 est d'ordre $\frac{d}{\text{pgcd}(2,d)}$ (qui est différent de $d = \text{ppcm}(d, d)$ en général) et que cela suffisait à saper votre raisonnement (plus généralement, g^k est en général d'ordre inférieur à d, alors que le ppcm est plus grand : ainsi le produit de deux puissances convenables de g fournit rapidement de nombreux contre-exemples...).

   Pour vous approprier la combinatoire des groupes et les propriétés des ordres de leurs éléments, songez à vous exercer sur des exemples simples (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et S_n pour n petit, éventuellement dans $\text{GL}_2(K)$ aussi).

5. Trop d'élèves écrivent $f(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) = f(\sigma\sigma^{-1})f(\tau\tau^{-1})$ sans la moindre justification, comme si c'était une conséquence évidente de la définition d'un morphisme. Pour que ce soit vrai, il apparaît pourtant de manière décisive que f est à valeurs dans un groupe COMMUTATIF.

6. Attention, $D(S_n)$ N'EST PAS l'ensemble des éléments de la forme $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ (ce n'est pas un groupe en général). C'est le groupe *engendré* par ces éléments. Trop de raisonnements ne tiennent pas compte de cette subtilité.