Devoir maison n° 3 – Compte rendu

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Théorème des bornes atteintes : beaucoup ont d'abord montré que la borne supérieure existe (par l'absurde et avec le théorème de Bolzano-Weierstraß) pour ensuite démontrer qu'elle est atteinte. Cependant un raisonnement direct démontrait tout à la fois, à condition de se souvenir que les bornes supérieures existent TOUJOURS dans $[0, +\infty]$.

   Cette nouveauté de fin de 1re année (quand vous avez vu les familles sommables; si si, souvenez-vous) est très agréable pour avoir l'existence *a priori* de plusieurs objets mathématiques. On l'a illustré avec les intégrales de fonctions positives et les sommes de familles de $[0, +\infty]^I$. Profitez-en !

Imprécisions mathématiques.

2. Beaucoup sont passés à côté de la raison d'être des questions « faciles » de l'exercice : à ce stade de votre scolarité, vous n'avez encore jamais parlé de continuité selon une variable *complexe*. Parler de continuité des applications polynomiales pour en déduire, par composition, que $t \mapsto P(re^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$, était donc incorrect (ou en tout cas prématuré), puisque $t \mapsto re^{it}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$: l'image n'est pas incluse dans le domaine de continuité connu de P.

   Problèmes analogues et à la pelle pour les autres questions.

3. Pour préserver les inégalités en élevant chaque membre à la puissance n, pensez à vérifier la positivité (sauf si l'exposant est impair, auquel cas on s'en moque puisque $x \mapsto x^n$ est dans ce cas croissante sur $\mathbb{R}$).

4. L'égalité $\lfloor \frac{n+1}{p^\ell} \rfloor = \lfloor \frac{n}{p^\ell} \rfloor$, pour $n+1$ non divisible par p, fut souvent invoquée mais rarement justifiée (ce n'est pas trivial !).

5. De l'art de se compliquer la vie. Pourquoi majorer par 1, après tout, alors qu'on pourrait majorer par $\frac{4\ln(2)}{\ln(4)} - 1$ (qui n'a *rien à voir* et est autrement plus simple) ?

6. NE DÉVELOPPEZ PAS COMME DES COCHONS LES NUMÉRATEURS ET DÉNOMINATEURS DES FRACTIONS RATIONNELLES ! Il est ahurissant de privilégier $\frac{4k^2+10k+6}{k^2+3k+2}$ à $\frac{(2k+2)(2k+3)}{(k+1)(k+2)}$. Une forme factorisée permet de reconnaître des termes en commun et de les simplifier (ou de les comparer, ce qui est plus facile si les facteurs sont tous de degré 1), afin d'abaisser le degré des polynômes qui apparaissent.

   Il y a bien des lieux où il est plus pertinent de garder une forme factorisée : décomposition en éléments simples, majorations, dérivations, intégrations. J'aurais bien voulu voir comment vous auriez intégré $x \mapsto \frac{1}{32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243}$ plutôt que $x \mapsto \frac{1}{(2x-3)^5}$ par exemple (ou calculé sa dérivée seconde). Il faut donc oublier ce réflexe contreproductif de toujours développer.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

7. Soyez honnêtes dans le traitement des devoirs. Ils sont adaptés pour que vous n'ayez pas à invoquer des notions non encore vues. J'ai vu quelques élèves mentionner que D_R est *fermé*, notion qui n'est pas au programme de MPSI.

8. Ne pas oublier que les inégalités se renversent lorsqu'on passe à l'inverse. On n'a pas du tout la majoration $\frac{1}{|\sum_i x_i|} \leqslant \frac{1}{\sum_i |x_i|}$ « par l'inégalité triangulaire ».

9. Lorsqu'on justifie que p et $m!$ sont premiers entre eux, il ne suffit pas de dire : « car $p \geqslant m+2$ ». C'est faux pour $p = 4$ et $m = 2$ par exemple, puisque 4 et 2! sont tous les deux divisibles par 2. Avoir ici un nombre premier est décisif et il faut savoir pourquoi.

   Je pense qu'on évite facilement ce genre d'erreur en ayant en tête que deux nombres sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de diviseur premier en commun.

10. On ne peut pas passer aux équivalents dans les sommes. Les autres relations de comparaison posent aussi problème lorsque l'indexation de la somme dépend de la variable. Négligence fréquente pour « simplifier » la partie entière dans la somme $\sum_p \sum_\ell \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^\ell} \right\rfloor \ln(p)$.

11. Le lemme d'Euclide et le théorème de Gauß semblent ignorés de plusieurs élèves : apparemment, il serait toujours vrai que si a divise bc avec a ne divisant pas b, alors a divise c. N'importe quel nombre composé fournit pourtant un contre-exemple : 4 divise $2 \cdot 2$ et ne divise aucun des facteurs.

    Pour cerner les opérations licites dans les relations de divisibilité, je trouve qu'il est éclairant de raisonner *localement*, c'est-à-dire diviseur premier par diviseur premier (en tout cas, en ce qui me concerne, cela a radicalement amélioré mon intuition arithmétique dans ma prime verdeur). C'est possible grâce à cette équivalence : $a \mid b \iff \forall p \in \mathbb{P},\ p^{v_p(a)} \mid p^{v_p(b)}$ (découle de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers). On peut se restreindre aux diviseurs premiers de a, le cas $v_p(a) = 0$ réalisant cette divisibilité automatiquement. L'intérêt de raisonner avec les valuations p-adiques est que cela permet de se ramener à une relation d'ordre totale : $p^\alpha | p^\beta \iff \alpha \leqslant \beta$.

    Ainsi, si a divise bc alors $p^{v_p(a)}$ divise $p^{v_p(b)}p^{v_p(c)}$ pour tout p. Mais si a est premier avec b, cela veut dire que a et b n'ont pas de diviseur premier en commun : ainsi $p^{v_p(b)} = p^0 = 1$ dès que $v_p(a) > 0$, et la relation de divisibilité ci-avant devient équivalente à : $\forall p \in \mathbb{P},\ p^{v_p(a)} | p^{v_p(c)}$, et donc à : $a|c$.

    En revanche, si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le passage de « $p^{v_p(a)}$ divise $p^{v_p(b)}p^{v_p(c)}$ » à « $p^{v_p(a)}$ divise $p^{v_p(c)}$ » n'a pas de raison d'être, même si a ne divise pas b : en passant de $v_p(b) + v_p(c)$ à $v_p(c)$ (avec $v_p(b)$ potentiellement non nul même si $v_p(a) > 0$, puisque a et b ont des diviseurs premiers communs), on diminue la taille de l'exposant et il peut devenir strictement inférieur à $v_p(a)$. C'est ce qu'il se passe pour le contre-exemple ci-dessus.

    Le même genre de discussion permet de comprendre pourquoi il est faux en général que si a et b divisent c, alors ab divise c : la valuation p-adique de ab (pour p un nombre premier donné) peut excéder celle de c alors même que celles de a et b sont inférieures (c'est ce qu'il se passe avec le contre-exemple suivant : 2 et 2 divisent 6, mais $2 \cdot 2$ ne divise pas 6).

    Si le développement ci-dessus ne vous rend pas l'arithmétique plus naturelle : dites-vous que vous pouvez presque entièrement renoncer aux raisonnements arithmétiques, au profit de raisonnements algébriques, si vous raisonnez dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le lemme d'Euclide est en effet équivalent à l'intégrité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier (si $ab \equiv 0 \bmod p$, alors par intégrité : $a \equiv 0 \bmod p$ ou $b \equiv 0 \bmod p$), et la condition suffisante pour que ab divise c est algébriquement remplacée par le théorème chinois (si $c \equiv 0 \bmod a$ et $c \equiv 0 \bmod b$, avec a et b premiers entre eux, alors $c \equiv 0 \bmod ab$ par injectivité du morphisme du théorème chinois). Le théorème de Gauß, lui, est remplacé par la condition d'inversibilité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (si $bc \equiv 0 \bmod a$ et si b est premier avec a, alors b^{-1} existe modulo a, et la multiplication par b^{-1} donne : $c \equiv 0 \bmod a$).

    Si les notions d'intégrité et d'inversibilité, et le théorème chinois, vous parlent davantage, ramenez toute relation de divisibilité à une relation dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour avoir les idées plus claires (cependant vous serez coincés pour le cas où le théorème chinois n'est pas utilisable : si vous avez a et b divisant c, avec a et b non premiers entre eux).