Devoir maison n° 3 – corrigé

Table des matières

1 Commentaires

L'exercice est une adaptation d'un sujet d'oral de l'École Normale Supérieure (qui comportait beaucoup moins de questions à l'origine). J'ai dû le tordre pour qu'il soit compatible avec votre progression dans le cours de 2e année : nous n'avons en effet pas encore parlé de continuité d'une fonction n'étant pas définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre par des méthodes d'analyse (complexe). Pour comprendre la philosophie de la démonstration : un résultat important d'analyse complexe, dû à Cauchy (et qu'on démontrera dans un cas particulier lorsque nous aborderons les séries entières), permet d'exprimer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})re^{it}\mathrm{d}t$ comme une combinaison linéaire indexée par l'ensemble des pôles simples de f contenus dans $\mathrm{D}(0,r)$ (ne nous attardons pas sur la régularité de f, ni sur le sens de pôle : restez-en au cas des fractions rationnelles pour votre intuition). C'est le **théorème des résidus**. Appliqué à $f = \frac{P'}{P}$, où P est polynomiale de degré n, cela donne directement le résultat : si P n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, alors l'intégrale ci-dessus vaut 0 pour tout r puisqu'elle est égale à une somme indexée par un ensemble vide ; or : $\frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})}re^{it} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} n$, comme on le voit en comparant les coefficients dominants dans l'expression $\frac{XP'}{P}$: l'intégrale ci-dessus tend donc vers $n \neq 0$, ce qui donne une contradiction si P n'est pas constant.

La démonstration proposée par cet exercice permet d'obtenir le résultat voulu sans passer par le théorème des résidus, très largement hors programme. Le côté très explicite, très algébrique des fractions rationnelles, permet de traiter directement ce cas particulier sans outil sophistiqué d'analyse complexe (les théorèmes d'analyse complexe nécessitent en effet, bien souvent, d'écrire : $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, ou des expressions analogues, autour de chaque point z_0 du domaine de définition ; pour les polynômes, les sommes sont à support fini donc l'étude est facilitée). Il nous permet de démontrer en passant deux résultats qui sont, pour ainsi dire, des prémices du théorème d'analyse complexe mentionné ci-dessus, et qui sont d'intérêt en soi :

— le **théorème de relèvement** dans un cas particulier : si f est de classe C^1 et ne s'annule pas, il existe φ de classe C^1 telle que : $f = f(0)\exp(\varphi)$ (en vérité, on n'a pas tout à fait démontré ce théorème, qui permet d'écrire $f = |f|\cdot\exp(\varphi)$ avec φ **à valeurs réelles** : c'est ainsi qu'il devient intéressant, puisqu'il permet de se ramener à l'étude d'une fonction réelle, et donc d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, de raisonner sur le signe, etc.) ;

— si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ est 2π-périodique, alors : $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{f'}{f} \in \mathbb{Z}$: cet entier, qu'on appelle **indice de** f, a un sens géométrique précis : c'est le nombre de tours autour de 0 effectué par la courbe paramétrée par f dans le plan complexe, où les tours sont comptés négativement s'ils sont faits dans le sens des aiguilles d'une montre. Vous pourrez le vérifier en prenant pour f l'application $t \mapsto e^{int}$ avec n entier.

Ce qu'on retiendra en bref. Théorèmes de régularité sous le signe intégrale. Indice d'une courbe paramétrée par une fonction 2π-périodique qui ne s'annule pas.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— questions 1 et 2, question 5.

Le problème est une adaptation du sujet de Mathématiques II du Concours Commun Mines-Ponts, filière MP, année 2002. J'ai enlevé la première partie (produit eulérien de la fonction dzêta avec une application à la non sommabilité de la famille des inverses des nombres premiers : ce fut traité dans le devoir des vacances d'été) ainsi que la dernière (sur le cryptosystème RSA : c'est pour le moment éloigné de nos préoccupations). J'ai cependant réécrit plusieurs des questions, que je trouvais horriblement écrites, et j'en ai rajouté quatre (les dernières du devoir). En effet, quitte à démontrer la formule sommatoire d'Abel et la majoration $\theta(x) \leqslant x\ln(4)$, dont l'arithméticien connaît la très grande importance, il me semblait triste de ne pas aller jusqu'au bout de l'idée en montrant tout ce qu'elles impliquent comme belles estimations asymptotiques.

Histoire et motivation du problème. Le problème donne une estimation de la fonction de décompte des nombres premiers, notée traditionnellement π (π comme le p de *premier*). Le très beau théorème des nombres premiers, démontré en 1896 de manière indépendante par Hadamard et La Vallée-Poussin, énonce : $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$ (résultat apparemment conjecturé par Gauß à quinze ans, en étudiant le rapport $u_n = \dfrac{10^n}{\pi(10^n)}$ quand n varie : il constata que : $u_{10^{n+1}} \approx u_{10^n} + c$ avec c quasiment constant, et vous pouvez le vérifier aussi ; le fait de transformer un produit par 10 en une somme fait penser au logarithme). Avant ces deux mathématiciens, le premier à avoir obtenu un encadrement particulièrement fin de $\pi(x)$ par des quantités proportionnelles à $\dfrac{x}{\ln(x)}$, allant dans le sens de l'équivalent ci-dessus, est Tchebychev (1851), qui s'en servit pour démontrer le postulat de Bertrand (entre un entier naturel non nul et son double, il existe toujours un nombre premier). Un des résultats majeurs du problème, à savoir l'encadrement :

$$\frac{\ln(2)}{2}\frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4\ln(2)\frac{x}{\ln(x)}.$$

est une version faible du résultat de Tchebychev et est dû à Hanson. Cependant la première partie de la démonstration suit une idée postérieure d'Erdős, très originale, passant par l'étude de coefficients binomiaux.

Les méthodes de ce problème permettent aussi d'obtenir un développement asymptotique précis de $\displaystyle\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}$, qui a été poussé encore plus loin par Mertens (il apparaît alors la constante d'Euler dans le développement). Ceci redémontre la divergence de $\displaystyle\sum_{p}\frac{1}{p}$, en donnant une idée de la vitesse de divergence de la série (c'est très lent !).

Pourquoi étudier θ et d_n ? De manière probablement non intuitive pour un profane, on passe par des suites et fonctions curieuses dans ce problème, en vue d'encadrer π : on passe par le ppcm de $1,2,\ldots,n$, par le produit des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée, par une curieuse fonction $\theta : x \mapsto \displaystyle\sum_{p\leqslant x}\ln(p)$... Pour comprendre pourquoi il est en vérité plus naturel d'étudier θ plutôt que π, c'est que la fonction π n'est en lien avec aucune fonction « usuelle » de l'analyse, alors que θ est très proche d'une fonction qui l'est. En effet, partant du **produit eulérien** : $\zeta(s) = \displaystyle\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, puis en considérant le logarithme et la dérivée dans cette identité, on peut obtenir :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(p)}{p^{ks}}.$$

Or il existe des formules d'analyse complexe qui, partant d'une égalité du type : $g(x) = \sum_n \frac{a_n}{n^x}$, permettent d'en déduire une expression de $\sum_{n \leqslant x} a_n$ en fonction de g (on verra une formule analogue au moment d'étudier les séries entières : la **formule intégrale de Cauchy**). En faisant cela avec l'identité précédente, on parvient à exprimer la fonction $\psi : x \mapsto \sum_{\substack{(p,k) \\ p^k \leqslant x}} \ln(p)$ en fonction de ζ : ainsi, connaissant le comportement analytique de la fonction ζ, on en déduit le comportement de ψ, puis celui de θ (on vérifie en effet que la différence entre ψ et θ est « petite »). Voilà pourquoi θ est une fonction « naturelle » à étudier pour l'arithméticien (pour son lien avec ψ, qui elle-même est liée à la fonction ζ que l'on sait étudier), alors que π ne l'est pas. On passe ensuite de θ à π avec une **transformation d'Abel**, comme on l'illustre dans ce problème.

Une fois qu'on a compris pourquoi l'étude de ψ ou θ est plus « naturelle » pour l'arithméticien, celle de $P_n = \prod_{p \leqslant n} p$ et $d_n = \operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,n)$ le devient aussi si l'on remarque que : $P_n = \exp(\theta(n))$, et : $d_n = \exp(\psi(n))$.

Les arithméticiens se sont longtemps demandé s'il était possible de démontrer le théorème des nombres premiers sans recourir à l'analyse complexe *via* l'étude de la fonction ζ. Selberg et Erdős ont apporté une réponse positive à cette question : l'étude de coefficients binomiaux fait partie des techniques utilisées pour en rester à de l'analyse réelle. C'est parce qu'on suit cette piste que la fonction ζ n'apparaît nulle part dans le problème, quoi qu'en dise le paragraphe ci-dessus.

Le problème vous fait démontrer en passant deux résultats importants :

— la **formule de Legendre** : $v_p(n!) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^\ell} \right\rfloor$, inévitable lorsqu'on fait de l'arithmétique avec des factorielles ;

— la **formule sommatoire d'Abel**, qui n'est rien d'autre qu'une transformation d'Abel dont on a écrit sous forme intégrale la somme obtenue après transformation. Elle peut être préférable à la forme classique de la transformation d'Abel, parce que le terme $f'(t)$ est souvent plus simple que $f(k+1) - f(k)$: il suffit de prendre $f : t \mapsto \ln(t)$ pour s'en convaincre. Elle est ici utilisée, entre autres choses, pour « décorréler » les deux suites apparaissant dans le terme général d'une somme : connaissant le comportement asymptotique de $\sum_{n \leqslant x} v_n$, on espère exprimer $\sum_{n \leqslant x} u_n v_n$ en fonction de $\sum_{n \leqslant x} v_n$, afin d'en déduire son comportement asymptotique : c'est possible avec cette formule sommatoire, surtout si u_n est bien connu.

Ce qu'on retiendra en bref. Utilisation du lemme d'Euclide pour obtenir des relations de divisibilité, notamment avec des coefficients binomiaux. Utilisation de la minimalité du ppcm pour montrer des identités. Formule sommatoire d'Abel et applications. Formule de Legendre. Élimination des parties entières dans les développements asymptotiques.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : question 2, question 5, questions 6 et 7 ;

— DEUXIÈME PARTIE : question 8, questions 10 à 11, questions 13 et 14 (dans cette question, je pense surtout à la formule de Legendre donnant $v_p(n!)$).

2 Corrigé

Exercice

Résultats préliminaires.

1. Tout d'abord, comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, l'application $\frac{f'}{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème fondamental de l'analyse l'application $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{f'}{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Par composition (le programme de 1re année permet en effet de dériver $\exp(\varphi)$ même quand φ est à valeurs complexes), l'application $g : t \mapsto \exp\left(\displaystyle\int_0^t \frac{f'}{f}\right)$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \exp\left(\int_0^t \frac{f'}{f}\right) = \frac{f'(t)}{f(t)} g(t).$$

   On en déduit : $g'f - fg' = 0$, puis : $\frac{g'f-fg'}{f^2} = 0$. En intégrant cette égalité, on obtient l'existence de $K \in \mathbb{C}$ tel que : $\frac{g}{f} = K$, puis : $g = K \cdot f$. D'où le résultat.
   Remarque. On peut déterminer la valeur de K en évaluant en 0 l'égalité $g = K \cdot f$. On voit qu'on a alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(0) \exp\left(\displaystyle\int_0^t \frac{f'}{f}\right)$.

   Questions à se poser, réflexes à acquérir.
   - Pourquoi n'ai-je pas résolu l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $g' = \frac{f'}{f} g$, en introduisant une primitive de $\frac{f'}{f}$, suivant la méthode de résolution classique ?
   - Remarquer que TOUTE équation différentielle linéaire du premier ordre peut être résolue en faisant ingénieusement apparaître la dérivée d'un produit ou d'un quotient ; quel est l'intérêt mathématique ou rédactionnel ? Plusieurs réponses sont possibles.

2. Puisque f est 2π-périodique, g l'est aussi par l'égalité de la question précédente. On a donc : $g(2\pi) = g(0) = 1$, c'est-à-dire : $\exp\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}\right) = 1$. Comme le noyau de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est $2i\pi\mathbb{Z}$, on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'}{f} = 2i\pi k$: d'où le résultat.

   Questions à se poser, réflexes à acquérir.
   - Pourquoi fallait-il la question précédente pour affirmer que g est 2π-périodique ? N'est-ce pas immédiat du fait que $t \mapsto \int_0^t \frac{f'}{f}$ soit une primitive d'une fonction 2π-périodique ?
   - Est-ce si clair que $e^z = 1$ si et seulement si $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$? D'habitude, on étudie plutôt l'équation $e^{i\theta} = 1$ d'inconnue θ RÉEL.
   - Regarder à quels entiers sont égaux $\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'}{f}$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ des fonctions *simples* (suffisamment simples pour que le calcul explicite de l'intégrale soit possible). Comparer avec le sens que l'on donne à cette intégrale dans les commentaires de ce corrigé, pour comprendre son aspect *concret*.

3. Nous allons imiter la démonstration du théorème des bornes atteintes, connu dans le cas d'une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est essentiellement basé sur le théorème de Bolzano-Weierstraß ; comme ce théorème est valable pour des suites complexes, il y a bon espoir qu'on puisse l'utiliser pour obtenir une version complexe du théorème des bornes atteintes.
   Ceci étant dit : comme l'ensemble $\{|P(z)| \mid z \in \mathrm{D}_R\}$ est une partie de $[0, +\infty]$ (non vide), il admet une borne supérieure qu'on note M, et par propriété de la borne supérieure il existe une

suite maximisante : soit $(z_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathrm{D}_R)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(z_n)| = M$. Mais comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant R$, la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstraß il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\left(z_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers un nombre complexe b. On remarque que b appartient à D_R en passant à la limite dans l'inégalité $|z_{\varphi(n)}| \leqslant R$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $P(z_n)$ est une combinaison linéaire de puissances de z_n, donc par les opérations classiques sur les limites de suites complexes (somme, produit) on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(z_{\varphi(n)}) = P(b)$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty} |P(z_{\varphi(n)})| = |P(b)|$. Par unicité de la limite : $M = |P(b)|$. D'où le résultat pour la borne supérieure, et on démontre de même que la borne inférieure est atteinte.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Vérifier que notre raisonnement reste valable même si $M = +\infty$ (vous n'avez probablement pas démontré l'unicité de la limite, en 1re année, en considérant le cas éventuel d'une limite infinie) ;

— Peut-on proposer une version plus générale du théorème des bornes atteintes complexe ?

— Pourquoi était-il *naturel* d'utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß ici ? Comment y penser ?

Démonstration du théorème de D'Alembert-Gauß.

4. La (très) petite subtilité de cette question, qui justifie qu'elle soit posée, est que l'application $t \mapsto re^{it}$ (ou $r \mapsto re^{it}$) est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Or, à ce stade de l'année, vous ne pouvez pas donner un sens à « P est continue sur $\mathbb{C}$ », ce qui ne permet pas de conclure que les applications de l'énoncé sont continues par composition de fonctions continues. Cette obstruction bêtement technique disparaîtra lorsque nous aurons fait de la topologie (chapitre VI), et nous allons la contourner en utilisant le fait que la continuité (et même dérivabilité) de $\exp(\varphi)$, pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue (ou dérivable) soit au programme de 1re année.

   Écrivons : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec : $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. Alors : $\forall (r,t) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]$, $P\left(re^{it}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt}$. À $t \in [0,2\pi]$ fixé, on note que $r \mapsto P(re^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant qu'application polynomiale en r ; à $r \in \mathbb{R}$ fixé, on remarque que $t \mapsto P(re^{it})$ est continue sur $[0,2\pi]$ en tant que combinaison linéaire de fonctions exponentielles $t \mapsto e^{ikt}$, qui sont continues sur $[0,2\pi]$ en tant que combinaisons linéaires des fonctions usuellement continues $t \mapsto \cos(kt)$ et $t \mapsto \sin(kt)$.

   Par le même argument, $t \mapsto re^{it}P'(re^{it})$ est continue sur $[0,2\pi]$ pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $r \mapsto re^{it}P'(re^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,2\pi]$. En tant que quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas (par hypothèse de l'énoncé), l'application $r \mapsto \dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,2\pi]$ et $t \mapsto \dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}$ est continue sur $[0,2\pi]$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. D'où le résultat.

   Remarque. Lorsque nous aurons parlé de continuité selon la variable complexe, vous pourrez vous contenter de dire que les applications polynomiales sont continues sur $\mathbb{C}$, et le résultat de cette question en résulte par composition avec $r \mapsto re^{it}$ et $t \mapsto re^{it}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

5. D'après la question précédente, les hypothèses de régularité du théorème de continuité sous le signe intégrale sont vérifiées par F. Il reste à vérifier l'hypothèse de domination. On utilise pour cela le cas particulier du théorème des bornes atteintes complexe, obtenu dans la question 3, qu'on applique à P et P' : soit $R \in \mathbb{R}_+$, et soit $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{D}_R)^2$ tel que : $|P(\alpha)| = \inf\limits_{z\in \mathrm{D}_R} |P(z)|$, $|P'(\beta)| = \sup\limits_{z\in \mathrm{D}_R} |P'(z)|$. Comme P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ par hypothèse, on a : $|P(\alpha)| > 0$, donc

on peut écrire :

$$\forall z \in \mathrm{D}_R, \quad \left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| \leqslant \left|\frac{P'(\beta)}{P(\alpha)}\right|.$$

Par conséquent, pour tout $r \in [-R, R]$ et tout $t \in [0{,}2\pi]$, en posant $z = re^{it} \in \mathrm{D}_R$ dans la majoration ci-dessus, on obtient :

$$\left|\frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})}re^{it}\right| \leqslant \left|\frac{P'(\beta)}{P(\alpha)}\right| R, \qquad \text{(hypothèse de domination locale)}$$

et l'application $t \mapsto \left|\frac{P'(\beta)}{P(\alpha)}\right| R$ est bien sûr intégrable sur $[0{,}2\pi]$ en tant qu'application continue sur un segment.

Comme $([-R, R])_{R\geqslant 0}$ est une base de voisinages de $\mathbb{R}$, on déduit du théorème de continuité sous le signe intégrale que l'application que $F : r \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or, par la question 2 appliquée à l'application $f : t \mapsto P(re^{it})$ (qui est de classe C^1 et de dérivée $f' : t \mapsto ire^{it}P'(re^{it})$ comme on le vérifierait aisément en imitant les raisonnements des questions 1 et 4), l'application $\frac{1}{2\pi}F$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Une application continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est nécessairement constante : en effet, s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $F(a) \neq F(b)$, et si y est un réel non entier entre $\frac{1}{2\pi}F(a)$ et $\frac{1}{2\pi}F(b)$ (il en existe), alors le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe c entre a et b tel que : $\frac{1}{2\pi}F(c) = y \notin \mathbb{Z}$, ce qui est absurde. D'où le résultat : $\frac{1}{2\pi}F$ est constante sur $\mathbb{R}$ et donc F aussi.

Remarque. Un raisonnement analogue permettrait de démontrer, dans les questions 1 et 2, qu'il n'existe qu'*une seule* fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que : $f = f(0)\exp(i\varphi)$, à un multiple entier de 2π près.

Remarque. Plus tard, nous serons en mesure de directement appliquer le théorème des bornes atteintes à l'application $z \mapsto \frac{zP'(z)}{P(z)}$ qui est continue sur $\mathbb{C}$, afin d'avoir automatiquement l'hypothèse de domination vérifiée sur tout compact de $\mathbb{C}$. Cela abrégera considérablement le raisonnement.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Savoir démontrer la constance d'une application continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Nous retrouverons le même genre de raisonnement dans des contextes plus généraux, lorsque nous ferons de la topologie.

— Vérifier ce que dit la remarque. Pourquoi l'exigence de continuité ? L'affirmation de cette remarque n'est-elle pas évidente, en utilisant le fait que $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$?

6. Écrivons : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec : $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. On a : $P' = \sum_{k=1}^{n} ka_k X^{k-1}$, et donc :

$$\frac{XP'}{P} = \frac{na_nX^n}{a_nX^n}\,\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{ka_k}{na_n}X^{k-n}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{a_n}X^{k-n}} = n\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{ka_k}{na_n}X^{k-n}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_k}{a_n}X^{k-n}} = n\frac{1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{ka_k}{na_n}X^{k-n}}{1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{a_n}X^{k-n}}.$$

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on a donc, après évaluation en re^{it} :

$$\frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})}re^{it} = n\frac{1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{ka_k}{na_n}r^{k-n}e^{it(k-n)}}{1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{a_n}r^{k-n}e^{it(k-n)}}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $k - n < 0$, donc : $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{k-n} = 0$. D'où : $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it} = n$.

7. On serait tenté d'utiliser le fait que pour tout $t \in [0,2\pi]$, l'application $r \mapsto \dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}$ soit bornée sur $\mathbb{R}_+$ en tant qu'application continue ayant une limite finie en $+\infty$. Le problème est qu'un majorant M_t de cette fonction dépend *a priori* de t, et rien ne dit qu'on puisse poser : $M = \sup\limits_{t\in[0,2\pi]} M_t$: cette borne supérieure peut *a priori* être infinie. Néanmoins on sent bien que les exponentielles $e^{it(k-n)}$ (qui sont les seules quantités dépendant de t), dans la question précédente, n'ont pas eu la moindre influence sur le calcul de limite, et que par conséquent la proximité entre $\dfrac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it}$ et sa limite n devrait pouvoir se quantifier sans dépendance en t. C'est ce que nous allons formaliser.

Reprenons les notations de la question précédente. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On l'a vu, on a : $\lim\limits_{r\to+\infty} k\frac{a_k}{a_n} r^{k-n} = 0$, donc il existe $R_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall r \geqslant R_k$, $\left|k\frac{a_k}{a_n} r^{k-n}\right| \leqslant 1$. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant R_k$: $\left|k\frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right| = \left|k\frac{a_k}{a_n} |z|^{k-n}\right| \leqslant 1$. Posons donc : $R' = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} R_k$. On a : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant R' \Longrightarrow \left|1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{ka_k}{na_n} z^{k-n}\right| \leqslant 1 + n$.

Minorons à présent le module du dénominateur par un réel strictement positif. Nous y parviendrons par récurrence et avec l'inégalité triangulaire renversée. L'hypothèse de récurrence est P_m :

« pour tout $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant m-1} \in \mathbb{C}^m$ et pour tout $A \in]0,1[$, il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant R \Longrightarrow \left|1 + \sum\limits_{k=0}^{m-1} b_k z^{k-m}\right| \geqslant A$. »

Pour $m = 1$: si $b_0 \in \mathbb{C}$ et si $A \in]0,1[$, alors : $\lim\limits_{r\to+\infty} b_0 r^{-1} = 0$, donc il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall r \geqslant R$, $|b_0 r^{-1}| \leqslant 1 - A$, et donc par l'inégalité triangulaire renversée on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant R$: $|1 + b_0 z^{-1}| \geqslant |1 - |b_0 z^{-1}|| = 1 - |b_0||z|^{-1}| \geqslant 1 - (1 - A) = A$, d'où P_1.

À présent, soit $m \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose P_m. Soient $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant m} \in \mathbb{C}^{m+1}$ et $A \in]0,1[$. Par hypothèse de récurrence, il existe $R_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant R_1 \Longrightarrow \left|1 + \sum\limits_{k=0}^{m-1} b_{k+1} z^{k-m}\right| \geqslant \frac{1+A}{2}$. De plus : $\lim\limits_{r\to+\infty} b_0 r^{-(m+1)} = 0$, donc il existe $R_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall r \geqslant R_2$, $|b_0 r^{-(m+1)}| \leqslant \frac{1-A}{2}$. Remarquons que l'on a : $\frac{1-A}{2} \leqslant \frac{1+A}{2}$. Par l'inégalité triangulaire renversée on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant \max(R_1, R_2)$:

$$\begin{aligned}
\left|1 + \sum_{k=0}^{m} b_k z^{k-(m+1)}\right| = \left|1 + \sum_{k=0}^{m-1} b_{k+1} z^{k-m} + b_0 z^{-(m+1)}\right| &\geqslant \left|\left|1 + \sum_{k=0}^{m-1} b_{k+1} z^{k-m}\right| - \left|b_0 z^{-(m+1)}\right|\right| \\
&= \left|1 + \sum_{k=0}^{m-1} b_{k+1} z^{k-m}\right| - \left|b_0 |z|^{-(m+1)}\right| \\
&\geqslant \frac{1+A}{2} - \frac{1-A}{2} \\
&= A,
\end{aligned}$$

d'où P_m en posant : $R = \max(R_1, R_2)$.

Par le principe de récurrence, on a le résultat voulu pour tout $m \in [\![1, n]\!]$. En particulier, en prenant $m = n$, $A = \frac{1}{2}$ et $(b_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} = \left(\frac{a_k}{a_n}\right)_{0\leqslant \leqslant n-1}$, il existe $R' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| \geqslant R'$, on ait : $\left|1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}\right| \geqslant \frac{1}{2}$. En conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$|z| \geqslant \max(R, R')$, on a montré :

$$\left|\frac{zP'(z)}{P(z)}\right| = n\frac{\left|1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{ka_k}{na_n}z^{k-n}\right|}{\left|1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{a_n}z^{k-n}\right|} \leqslant n\frac{1+n}{1/2},$$

d'où le résultat voulu avec : $M = 2n(1+n)$.

Remarque. Là aussi, comme dans d'autres questions de cet exercice, le chapitre VI de topologie nous permettra de généraliser toutes nos techniques analytiques de la variable réelle à d'autres espaces vectoriels, et nous pourrons alors considérablement alléger la démonstration d'inégalités telles que celle de cette question.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Qu'est-ce qui m'a conduit à faire une récurrence, au lieu d'utiliser l'inégalité triangulaire directement ?
> — Comment ai-je choisi mes valeurs de ε, pour chaque limite où je reviens à la définition ?

8. Les questions 4 et 7, et la continuité (par morceaux) de $t \mapsto n$ sur $[0,2\pi]$, assurent que les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu sont vérifiées. On en déduit : $\lim\limits_{r\to+\infty} F(r) = \int_0^{2\pi} \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})}re^{it}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} n\mathrm{d}t = 2\pi n$. Or on a aussi : $F(0) = \int_0^{2\pi} 0 = 0$, et F est constante d'après la question 5, donc on doit avoir : $2\pi n = 0$. C'est absurde, puisque $n \geqslant 1$ par hypothèse.
   Ce raisonnement par l'absurde montre que P doit nécessairement avoir au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Cela vaut pour tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant, ce qui démontre le théorème de D'Alembert-Gauß.

Problème

Première partie

1. Si $n+1$ n'est pas un nombre premier, alors $P_n = P_{n+1}$ et le résultat voulu est évident, étant donné que : $4^n \leqslant 4^{n+1}$.
2. Comme $n+1$ est un nombre premier et est supérieur ou égal à 3, il est un entier impair, d'où l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que : $2m+1 = n+1$. Soit $p \in [\![m+2, n+1]\!]$ un nombre premier. On a :
$$m!\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = \prod_{k=m+2}^{2m+1} k = p\prod_{\substack{k=m+2\\k\neq p}}^{2m+1} k.$$
   On en déduit que p divise $m!\binom{2m+1}{m}$, et comme p ne divise pas $m!$ (en effet, si c'était le cas, par le lemme d'Euclide p diviserait un entier inférieur ou égal à m, ce qui est impossible puisque $p > m$), par le lemme d'Euclide p divise $\binom{2m+1}{m}$. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi ai-je étudié $m!\binom{2m+1}{m}$ et non $\binom{2m+1}{m}$?
> — Bien vérifier qu'on a compris pourquoi p ne divise pas $m!$, et que si p n'est pas premier alors on peut tout à fait avoir $p|m!$ bien que $p > m$.

3. Par la formule du binôme de Newton, on a :
$$2\cdot 4^m = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k} \geqslant \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2\binom{2m+1}{m},$$

d'où : $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$. On en déduit que si : $P_{m+1} \leqslant 4^{m+1}$, alors :

$$P_{n+1} = P_{m+1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1}} p \leqslant 4^{m+1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1}} p,$$

et par la question précédente, p divise $\binom{2m+1}{m}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_{n+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1}$, donc $\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1}} p$ divise $\binom{2m+1}{m}$ également (attention, cela ne va pas de soi : cela tient au fait que les nombres premiers soient tous distincts dans ce produit, et donc premiers entre eux). On a donc : $\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1} \setminus \mathbb{P}_{m+1}} p \leqslant \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$, et on conclut :

$$P_{n+1} \leqslant 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1} = 4^{n+1}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— L'usage de la formule du binôme peut paraître ingénieux. Se demander comment j'ai pu y penser, et si vous ne voyez pas : trouvez une autre démonstration. Les formules vérifiées par les coefficients binomiaux devraient vous inciter à une certaine démarche basique mais qui marche bien.

— Bien vérifier que le raisonnement : « a et b divisent c, donc ab divise c » est FAUX en général, et qu'il est vrai si a et b sont premiers entre eux. Se convaincre que cela reste vrai pour davantage de deux entiers (avec le programme de 1re année, vous ne pouvez pas utiliser le ppcm dans ce cas plus général : servez-vous de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers).

— Réviser si besoin ce que sont des nombres premiers entre eux, et se convaincre qu'il est *évident* que des nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

— Est-ce que le majorant de $\binom{2m+1}{m}$ est de qualité ? Comparer avec l'équivalent que donnerait la formule de Stirling quand $m \to +\infty$.

4. Les questions précédentes montrent que le résultat est vrai par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$: l'hérédité est assurée par les questions 1 et 3, et l'initialisation est évidente : $P_2 = 2 \leqslant 4^2$. D'où le résultat.

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Notons d'abord que si $p \in \mathbb{P}_n$, alors $p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$ est entre 1 et n, puisque :

$$p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \leqslant p^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)}} = e^{\frac{\ln(n)}{\ln(p)} \ln(p)} = n,$$

donc $p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$ divise d_n par définition de d_n. Comme les $p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$, pour p parcourant $\mathbb{P}_n$, sont premiers entre eux (ils ne peuvent logiquement pas avoir de diviseur premier en commun), l'entier $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$ divise d_n également.

Réciproquement, vérifions que d_n divise $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$. D'après la propriété du ppcm, il suffit de démontrer que $\prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$ est un multiple commun à tous les entiers $k \in [\![1, n]\!]$. Considérons donc $k \in [\![1, n]\!]$, qu'on décompose en facteurs premiers : $k = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{v_p(k)}$ (il est certain que les nombres premiers de la décomposition de k sont inférieurs à n, puisque k l'est). Pour tout $p \in \mathbb{P}_n$, vérifions qu'on a : $v_p(k) \leqslant \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$. On a en effet : $p^{v_p(k)} \leqslant k \leqslant n$, donc : $v_p(k) \ln(p) \leqslant \ln(n)$, puis : $v_p(k) \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(p)}$. Or la partie entière de $\frac{\ln(n)}{\ln(p)}$ est par définition le plus grand entier à être majoré par $\frac{\ln(n)}{\ln(p)}$, donc : $v_p(k) \leqslant \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$. Ainsi :

$$\forall p \in \mathbb{P}_n, \quad v_p(k) \leqslant \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor,$$

donc $k = \prod_{p\in\mathbb{P}_n} p^{v_p(k)}$ divise $\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$. Ceci vaut pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, donc par propriété du ppcm d_n divise $\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$.

Deux entiers *naturels* qui se divisent mutuellement sont égaux, donc : $d_n = \prod_{p\in\mathbb{P}_n} p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Retenir et comprendre le sens concret, pour l'arithméticien, de l'entier $\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$. Comment l'a-t-on trouvé ? Il semble en effet catapulté par l'énoncé, mais il ne sort pourtant pas de nulle part.

— Est-ce que mon argument, pour le fait que les $p^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor}$ soient premiers entre eux, est bien compris ? S'il vous embête de parler de nombres premiers entre eux lorsqu'il y en a strictement plus que deux : démontrer la relation de divisibilité que j'ai obtenue *via* l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

— On retrouve ici ce principe souvent formulé cette année, selon lequel : quand un objet mathématique est défini comme un élément maximal, un plus grand élément ou une borne supérieure, en pratique on montre des égalités qui l'impliquent par double inégalité (et de même si c'est un élément minimal, un plus petit élément ou une borne inférieure). Dans le cas du ppcm, qui est défini comme un *plus petit élément* au sens de la relation de divisibilité : comment raisonne-t-on pour chaque inégalité ? (Une inégalité utilise sa définition comme plus petit élément et l'autre nécessite un argument supplémentaire.) On pourra vérifier qu'on a compris le raisonnement en trouvant une formule analogue pour le pgcd de n entiers (non consécutifs, sinon il vaut facilement 1).

— Remarquer qu'à plusieurs reprises, dans cette question, il apparaît le principe suivant : pour montrer des relations de divisibilité entre entiers, il suffit de raisonner « localement », c'est-à-dire : nombre premier par nombre premier (au niveau des valuations p-adiques).

— Si deux entiers se divisent mutuellement sans être positifs, que se passe-t-il ?

6. Une étude banale de variations montre que $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $\frac{1}{2}$, et il vaut $\frac{1}{4}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{4^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{4^n}$. D'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Est-ce que cette majoration est bonne ? Que vaut I_n ? Est-ce qu'un calcul exact de I_n aurait permis d'avoir ce majorant facilement ? Si non, pourquoi ?

7. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $n + k + 1 \in [\![n + 1,2n + 1]\!]$, donc par définition du ppcm on sait que $n + k + 1$ divise d_{2n+1}. Voyons comment en déduire que $d_{2n+1}I_n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel. On a, par la formule du binôme de Newton :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{n+k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1},$$

donc : $d_{2n+1}I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{d_{2n+1}}{n+k+1}$. Or $\frac{d_{2n+1}}{n+k+1}$ est un entier d'après ce qu'on vient de voir, et une combinaison linéaire d'entiers est un entier, donc : $d_{2n+1}I_n \in \mathbb{Z}$.

Mieux : d_{2n+1} est strictement positif (c'est clair par définition ou par la formule de la question 5), et I_n également en tant qu'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur [0,1]. Ainsi : $d_{2n+1}I_n > 0$, et un entier strictement positif est supérieur ou égal à 1, donc :

$$d_{2n+1} \geqslant \frac{1}{I_n} \overset{(q.\,6)}{\geqslant} 4^n,$$

ce qui fournit la minoration désirée.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Est-ce qu'un calcul exact de I_n, par intégration par parties par exemple, permettrait d'obtenir $d_{2n+1}I_n \in \mathbb{Z}$? Si oui, pourquoi ne fut-ce pas mon choix ?

Deuxième partie

8. On effectue une transformation d'Abel. Posons $A(x) = 0$ pour tout $x < 2$. Prenons d'abord $x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,x]} a_k f(k) = \sum_{k=2}^{x}(A(k)-A(k-1))f(k) &= \sum_{k=2}^{x} A(k)f(k) - \sum_{k=2}^{x} A(k-1)f(k)\\ &= \sum_{k=2}^{x} A(k)f(k) - \sum_{k=1}^{x-1} A(k)f(k+1)\\ &= A(x)f(x) - A(1)f(2) - \sum_{k=2}^{x-1} A(k)(f(k+1)-f(k))\\ &= A(x)f(x) - \sum_{k=2}^{x-1} A(k)(f(k+1)-f(k)).\end{aligned}$$

Or : $\forall k \in [\![2, x-1]\!]$, $f(k+1) - f(k) = \displaystyle\int_k^{k+1} f'(t)\mathrm{d}t$, et comme A est constante sur l'intervalle $[k, k+1[$ par définition de A, on a :

$$\forall k \in [\![2, x-1]\!], \quad A(k)\int_k^{k+1} f'(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} A(k)f'(t)\mathrm{d}t = \int_k^{k+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

On en déduit :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,x]} a_k f(k) = A(x)f(x) - \sum_{k=2}^{x-1}\int_k^{k+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t = A(x)f(x) - \int_2^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat si $x \in [2, +\infty[$ est un entier. Si x n'est pas un entier, on se ramène au cas précédent en écrivant :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,x]} a_k f(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,\lfloor x\rfloor]} a_k f(k) = A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - \int_2^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

et on utilise le fait que : $\forall t \in [\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1[$, $A(t) = A(\lfloor x\rfloor)$ (c'est en particulier le cas pour $t = x$), de sorte que :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,x]} a_k f(k) &= A(\lfloor x\rfloor)\left(f(\lfloor x\rfloor) - f(x)\right) + A(x)f(x) - \int_2^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)\mathrm{d}t\\ &= A(x)f(x) - \int_{\lfloor x\rfloor}^{x} A(t)f'(t)\mathrm{d}t - \int_2^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)\mathrm{d}t\\ &= A(x)f(x) - \int_2^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque. Si l'on avait défini l'intégrale de Stieljes (pas au programme des classes préparatoires), on aurait pu réécrire cette égalité ainsi :

$$\int_2^x f(t)\mathrm{d}A(t) = A(x)f(x) - \int_2^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui renforce l'idée que la transformation d'Abel est un analogue discret de l'intégration par parties (mieux : C'EST une intégration par parties).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Remarquer et retenir « l'astuce » qui permit d'écrire sous forme intégrale le terme général de la nouvelle somme obtenue après transformée d'Abel. Elle apparaît implicitement lorsqu'on démontre par exemple la fameuse formule $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$.
- Aurait-on pu traiter directement le cas où x est quelconque, sans d'abord le supposer entier ?
- J'affirme que cette formule sommatoire d'Abel est *souvent* meilleure que la transformation d'Abel telle qu'obtenue dans le cours. Pourquoi ?

9. Soit : $x \geqslant 2$. On remarque que l'on a, par la propriété de morphisme du logarithme :

$$\theta(x) = \theta(\lfloor x\rfloor) = \ln\left(\prod_{p\in\mathbb{P}_{\lfloor x\rfloor}} p\right) = \ln\left(P_{\lfloor x\rfloor}\right),$$

donc par la question 4 on a : $\theta(x) \leqslant \ln\left(4^{\lfloor x\rfloor}\right) \leqslant \ln\left(4^x\right) = x\ln(4)$. D'où le résultat.

10. Soit $x \geqslant 2$. On a :

$$\pi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,x]} \mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,x]} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\ln(k)}{\ln(k)}.$$

Appliquons la formule sommatoire d'Abel avec f l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ (qui est bien de classe C^1 sur $[2,+\infty[$) et $(a_k)_{k\geqslant 2} = (\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\ln(k))_{k\geqslant 2}$. Comme : $\forall x \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\lfloor x\rfloor} \mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\ln(k) = \theta(x)$, on en déduit :

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t \overset{(q.9)}{\leqslant} \frac{x}{\ln(x)}\ln(4) + \int_2^x \frac{\ln(4)}{(\ln(t))^2}\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat par linéarité de l'intégrale et après factorisation.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Retenir cette idée d'introduire une indicatrice. Elle revient régulièrement lorsqu'on étudie des sommes indexées par des nombres premiers, des classes de congruence (cf. la formule d'orthogonalité dont je parle dans *Méthodes*), etc.

11. La dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{(\ln(x))^2}$. On montre aisément :

$$\frac{1}{(\ln(x))^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2}\right),$$

et comme $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ par le théorème des croissances comparées, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{(\ln(t))^2}\right)\mathrm{d}t$ est une intégrale divergente de fonction positive, donc par le théorème d'intégration des relations de comparaison on a :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_2^x\left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{(\ln(t))^2}\right)\mathrm{d}t\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right).$$

On en déduit qu'il existe $x_0 \geqslant 2$ tel que : $\forall x \geqslant x_0$, $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \leqslant \frac{x}{\ln(x)}$. Combiné à la question précédente, cela donne :

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \pi(x) \leqslant \ln(4)\cdot\frac{2x}{\ln(x)} = 4\ln(2)\frac{x}{\ln(x)},$$

d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Retenir cette approche permettant d'obtenir des relations de comparaison par dérivation puis intégration.

— Pouvait-on même obtenir un équivalent asymptotique simple de $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}$ quand $x \to +\infty$? J'affirme qu'on peut le conjecturer en utilisant la décroissance lente de l'intégrande, et démontrer la conjecture en raisonnant comme dans cette question.

— En vérité, on peut avoir mieux (asymptotiquement) comme majoration de $\pi(x)$. Pourquoi ?

12. On nous demande de minorer $\pi(x)$ à l'aide de la suite $(d_n)_{n\geqslant 2}$. Pour comprendre le lien entre les deux objets, rappelons que par définition : $\forall x \geqslant 2$, $\pi(x) = \operatorname{card}(\mathbb{P}_x)$. Or d_n est un produit indexé par $\mathbb{P}_n$ (question 5). C'est ce qui va aiguiller ma réflexion.

Soit $x \geqslant 3$, et soit n le plus grand entier naturel tel que : $2n+1 \leqslant x$ (on a : $n = \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor$, mais je n'aurai jamais besoin de sa valeur exacte). On remarque que : $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}_{2n+1}$, puisque $2n+2$ ne peut pas être un nombre premier si $n \geqslant 1$ (c'est pour ce petit détail que j'ai supposé $x \geqslant 3$ au lieu de $x \geqslant 2$). On a, d'après les questions 5 et 7 :

$$\frac{x-3}{2}\ln(4) < n\ln(4) \overset{(q.\,7)}{\leqslant} \ln\left(d_{2n+1}\right) \overset{(q.\,5)}{\leqslant} \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\ln(2n+1)}{\ln(p)}\ln(p) = \pi(x)\ln(2n+1),$$

donc :

$$\pi(x) \geqslant \frac{x-3}{2\ln(2n+1)}\ln(4) \geqslant \frac{x-3}{\ln(x)}\ln(2).$$

Or : $\dfrac{x-3}{\ln(x)}\ln(2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(2)\dfrac{x}{\ln(x)}$, donc il existe $x_1 \geqslant 2$ tel que : $\forall x \geqslant x_1$, $\dfrac{x-3}{\ln(x)}\ln(2) \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2}\dfrac{x}{\ln(x)}$. On en déduit le résultat voulu :

$$\forall x \geqslant x_1, \quad \pi(x) \geqslant \frac{\ln(2)}{2}\frac{x}{\ln(x)}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Comprendre quel était l'objectif derrière mes manipulations. Je pense qu'avoir la transformation d'Abel en tête permet de comprendre heuristiquement ce que la suite $(d_n)_{n\geqslant 2}$ vient faire dans ces considérations : où intervient-elle dans la transformation d'Abel, *à approximation près* ? Pourquoi cela permet de comprendre qu'il était utile de savoir la minorer ?

13. La famille $\left(\dfrac{\ln(p)}{p^m}\right)_{(p,m)\in\mathbb{P}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}$ est à valeurs dans $[0,+\infty]$, et on a donc, par le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{(p,m)\in\mathbb{P}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})} \frac{\ln(p)}{p^m} = \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{\ln(p)}{p^m} = \sum_{p\in\mathbb{P}}\ln(p)\frac{1}{p^2\left(1-\frac{1}{p}\right)} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}\frac{\ln(n)}{n(n-1)},$$

la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{p^m}$ ayant été simplifiée en utilisant le fait que ce soit une somme géométrique de raison : $\dfrac{1}{p} \in\,]0,1[$. Or on a, par croissances comparées : $\dfrac{\ln(n)}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge car : $\dfrac{3}{2} > 1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on a donc la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln(n)}{n(n-1)}$, puis :

$$\sum_{(p,m)\in\mathbb{P}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}\frac{\ln(p)}{p^m} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}\frac{\ln(n)}{n(n-1)} < +\infty,$$

ce qui démontre que la famille $\left(\dfrac{\ln(p)}{p^m}\right)_{(p,m)\in\mathbb{P}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})}$ est sommable.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Comme à chaque fois que l'on utilise le théorème de Fubini : comprendre comment bien choisir sur quel indice sommer en premier.

14. Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{P}$. Le raisonnement est classique. Je le détaille substantiellement pour ceux qui manquent encore d'intuition arithmétique, mais vous êtes encouragés à vous le réapproprier en l'épurant.

On a : $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, donc : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_{\substack{k=1\\ p\mid k}}^{n} v_p(k) = \sum_{k\in\mathcal{M}_n(p)} v_p(k)$, où $\mathcal{M}_n(p)$ est l'ensemble des entiers de $[\![1,n]\!]$ qui sont multiples de p (en effet, par définition d'une valuation p-adique, on a $v_p(k)=0$ dès que $k\in[\![1,n]\!]\setminus\mathcal{M}_n(p)$). On définit de la même manière $\mathcal{M}_n(p^\ell)$ pour tout $\ell\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a alors :

$$\mathcal{M}_n(p) = \bigcup_{\ell=1}^{+\infty}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\setminus\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)\right),$$

et donc :

$$\begin{aligned} v_p(n!) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{k\in\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\setminus\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)} v_p(k) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{k\in\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\setminus\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)} \ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\ell\left(\operatorname{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\right)-\operatorname{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Calculons ces cardinaux. Soit $\ell\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Un multiple de p^ℓ est un entier de la forme mp^ℓ. On veut uniquement dénombrer ceux qui sont dans $[\![1,n]\!]$. Or :

$$1\leqslant mp^\ell\leqslant n \iff 1\leqslant m\leqslant\frac{n}{p^\ell},$$

donc : $\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right) = \left\{mp^\ell \mid m\in\left[\!\left[1,\left\lfloor\frac{n}{p^\ell}\right\rfloor\right]\!\right]\right\}$, puis : $\operatorname{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\right) = \left\lfloor\frac{n}{p^\ell}\right\rfloor$ (ce calcul montre en passant que $\operatorname{card}\left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)\right)=0$ pour tout ℓ suffisamment grand). Donc :

$$v_p(n!) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\ell\left(\left\lfloor\frac{n}{p^\ell}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n}{p^{\ell+1}}\right\rfloor\right) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\ell\left\lfloor\frac{n}{p^\ell}\right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{+\infty}(\ell-1)\left\lfloor\frac{n}{p^\ell}\right\rfloor = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^\ell}\right\rfloor,$$

d'où le résultat. Passons au développement asymptotique de $\ln(\lfloor x\rfloor!)$. Remarquons que les diviseurs premiers de $\lfloor x\rfloor!$ sont nécessairement des nombres premiers inférieurs ou égaux à x. On en déduit, pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\ln(\lfloor x\rfloor!) = \ln\left(\prod_{p\in\mathbb{P}_x} p^{v_p(\lfloor x\rfloor!)}\right) = \sum_{p\in\mathbb{P}_x} v_p(\lfloor x\rfloor!)\ln(p),$$

et donc, en utilisant ce qu'on vient de démontrer :

$$\ln(\lfloor x\rfloor!) = \sum_{p\in\mathbb{P}_x}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{p^\ell}\right\rfloor\ln(p) = \sum_{p\in\mathbb{P}_x}\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{p}\right\rfloor\ln(p) + \sum_{p\in\mathbb{P}_x}\sum_{\ell=2}^{+\infty}\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{p^\ell}\right\rfloor\ln(p). \qquad (*)$$

Simplifions ces parties entières. Nous utiliserons à chaque fois le fait que, pour tout u réel : $\lfloor u \rfloor = u + (\lfloor u \rfloor - u)$, avec : $-1 < \lfloor u \rfloor - u \leqslant 0$. On a :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right\rfloor \ln(p) = \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \ln(p) + \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \left(\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right) \ln(p),$$

et donc, pour tout x au voisinage de $+\infty$:

$$\left| \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \left(\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right) \ln(p) \right| \leqslant \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \left| \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right\rfloor - \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right| \ln(p) \leqslant \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \ln(p) = \theta(x) \leqslant x \ln(4),$$

donc :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right\rfloor \ln(p) = \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \ln(p) + \underset{x\to+\infty}{O}(x) = x \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{p} \ln(p) + \underset{x\to+\infty}{O}(x).$$

On majore encore la somme qui nous gêne grâce à la fonction θ :

$$\left| \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\lfloor x \rfloor - x}{p} \ln(p) \right| \leqslant \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\ln(p)}{p} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \ln(p) = \frac{\theta(x)}{2} = \underset{x\to+\infty}{O}(x),$$

ce qui achève de démontrer : $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_x} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p} \right\rfloor \ln(p) = x \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\ln(p)}{p} + \underset{x\to+\infty}{O}(x)$.

La double somme de $(*)$ est plus simple à estimer. En effet, grâce à la question précédente, on peut écrire :

$$\left| \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^\ell} \right\rfloor \ln(p) \right| \leqslant \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{x}{p^\ell} \ln(p) \leqslant x \sum_{(p,m)\in\mathbb{P}\times(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})} \frac{\ln(p)}{p^m} = \underset{x\to+\infty}{O}(x).$$

On a donc bien obtenu l'égalité à démontrer :

$$\ln(\lfloor x \rfloor !) = x \sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{\ln(p)}{p} + \underset{x\to+\infty}{O}(x).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- Se convaincre de la relation : $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$, utilisée dès le début du raisonnement.
- Pourquoi a-t-on bien l'inclusion $\mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right) \subseteq \mathcal{M}_n\left(p^\ell\right)$ (et non le contraire) ?
- Pourquoi ai-je utilisé la réunion $\mathcal{M}_n(p) = \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} \left(\mathcal{M}_n\left(p^\ell\right) \setminus \mathcal{M}_n\left(p^{\ell+1}\right)\right)$? En quoi simplifiait-elle mon calcul ? Que fais-je très concrètement, derrière ce raisonnement qui peut avoir l'air abstrait ?
- Pourquoi la réunion infinie (et la somme infinie qui en découle) ne pose pas de question de convergence ? La question se pose surtout lorsque j'écris une différence de deux sommes infinies : si elle donne $+\infty - (+\infty)$, cela peut être très embêtant, et pourtant je fais comme si de rien n'était ! Pourquoi ?
- Si on utilise l'égalité : $\mathcal{M}_n(p) = \bigcup_{\ell=1}^{+\infty} \mathcal{M}_n(p^\ell)$, j'affirme qu'on peut mener le calcul à bien à condition de faire un peu attention. Comment ?
- Pourquoi est-on bien certain que les diviseurs premiers de $n!$ sont inférieurs ou égaux à n ? Ce serait faux pour les diviseurs « tout court », par exemple $24 = 4!$ est divisible par $6 > 4$. Cette question a déjà été posée plus tôt dans ce problème.
- Pourtant les grands O obtenus en fin de raisonnement ne découlent pas du théorème de sommation des relations de comparaison ?

15. Soit x au voisinage de $+\infty$. La formule de Stirling, écrite sous la forme équivalente suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n}\right) = \dfrac{\ln(2\pi)}{2}$, implique ce développement asymptotique :

$$\ln\left(\lfloor x\rfloor!\right) = \left(\lfloor x\rfloor + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\lfloor x\rfloor\right) - \lfloor x\rfloor + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{x\to+\infty}{o}(1) = x\ln(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(x)\,,$$

où les parties entières sont simplifiées suivant le même raisonnement que dans la question précédente. En comparant ce développement asymptotique avec celui de la question précédente, on a :

$$x\ln(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(x) = xF(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(x)\,,$$

et donc :

$$F(x) = \ln(x) + \underset{x\to+\infty}{O}(1)\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Maintenant qu'on a obtenu un encadrement fin de π, on peut obtenir une bonne estimation de nombreuses sommes indexées par des nombres premiers *via* la formule sommatoire d'Abel et en utilisant l'identité : $\pi(x) = \sum\limits_{k=2}^{\lfloor x\rfloor} \mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)$. Ici, cette idée aurait donné :

$$F(x) = \sum_{k=2}^{\lfloor x\rfloor} \mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(x)}{x}\pi(x) - \int_2^x \pi(t)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{\ln(t)}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_2^x \pi(t)\left(\frac{\ln(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t + \underset{x\to+\infty}{O}(1)\,.$$

Comme : $\pi(t) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{t}{\ln(t)}\right)$, le théorème d'intégration des relations de comparaison donne : $F(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t}\right) = \underset{x\to+\infty}{O}(\ln(x))$. C'est cependant moins bon que le raisonnement obtenu en suivant les indications du problème. L'idée ci-dessus devient réellement porteuse lorsque l'on a l'équivalent : $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$ (théorème des nombres premiers).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pour vérifier qu'on a bien compris les simplifications des parties entières dans le développement asymptotique : compléter ce que je n'ai pas détaillé. Il y a une subtilité en plus par rapport à la question précédente : la partie entière dans le logarithme.

— Pourquoi écris-je la formule de Stirling sous cette forme alternative, pour en déduire le développement asymptotique du logarithme de la factorielle ? Pourquoi n'ai-je pas utilisé l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$?

— Reprendre le calcul de la remarque avec l'équivalent fourni par le théorème des nombres premiers. Qu'obtient-on cette fois-ci ?

16. Soit $x \geqslant 2$. Nous allons utiliser la formule sommatoire d'Abel pour exprimer $\sum\limits_{p\in\mathbb{P}_x} \dfrac{1}{p}$ en fonction de $F(x) = \sum\limits_{p\in\mathbb{P}_x} \dfrac{\ln(p)}{p}$. On a :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_x} \frac{1}{p} = \sum_{k\in\mathbb{N}\cap[2,x]} \frac{1}{\ln(k)} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\frac{\ln(k)}{k}.$$

Par conséquent, si l'on utilise la formule sommatoire d'Abel avec f l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ et

$(a_k)_{k\geqslant 2} = \left(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(k)\dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geqslant 2}$, on a : $\forall x \geqslant 2,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\lfloor x\rfloor} a_k = F(x)$, et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{1}{p} &= \frac{F(x)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{F(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{F(x)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{F(t)-\ln(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\\ &\overset{(q.\,15)}{=} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) + \int_2^x \frac{F(t)-\ln(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)).\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente : $\dfrac{F(t)-\ln(t)}{t(\ln(t))^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}\right)$, et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^2}$ converge puisqu'une primitive de $t\mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$, à savoir $t\mapsto -\dfrac{1}{\ln(t)}$, admet une limite en l'infini. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{F(t)-\ln(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t$ converge absolument par comparaison, et en particulier : $\displaystyle\int_2^{x}\frac{F(t)-\ln(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{O}(1)$. On peut donc conclure :

$$\sum_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{1}{p} = \ln(\ln(x)) + \underset{x\to+\infty}{O}(1)\,.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi ai-je soustrait et ajouté $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$, dans la formule sommatoire d'Abel ? Quel résultat moins précis aurais-je eu en gardant l'égalité $\sum\limits_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{1}{p} = \frac{F(x)}{\ln(x)} + \int_2^x \frac{F(t)}{t(\ln(t))^2}\mathrm{d}t$, et en utilisant le développement de F de la question précédente dans cette égalité ? Méditer là-dessus pour comprendre les calculs qui suivirent.

— Remarquer la ressemblance entre ce que l'on a fait ici, pour relier $\sum_p \frac{1}{p}$ et $\sum_p \frac{\ln(p)}{p}$, avec ce que vous avez déjà dû faire dans certaines intégrations par parties, afin de renforcer l'analogie avec la formule sommatoire d'Abel.

— Arriveriez-vous à obtenir ce développement asymptotique en utilisant la formule sommatoire d'Abel pour faire apparaître $\pi(x)$, suivant la remarque de la question précédente ?

— Aurait-il été possible de plutôt exprimer $\sum_p \frac{1}{p}$ en fonction de $\theta(x) = \sum_{p\leqslant x}\ln(p)$ dans la transformation d'Abel (afin d'utiliser : $\theta(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(x)$, et d'éviter le développement asymptotique pénible de la question précédente) ?

— De même, arriveriez-vous à obtenir une estimation de $\sum\limits_{p\in\mathbb{P}_x} p^\alpha$, avec α fixé, *via* ces méthodes ?

— Ce résultat démontre encore une fois que la famille $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathbb{P}}$ n'est pas sommable. On l'avait déjà obtenu dans le devoir des vacances d'été. Est-ce que le devoir de l'été aurait aussi permis d'obtenir le développement asymptotique $\sum_{p\in\mathbb{P}_x}\frac{1}{p} = \ln(\ln(x)) + \underset{x\to+\infty}{O}(1)$?