Devoir maison n° 2 – Compte rendu

Redite des devoirs précédents.

1. Il faut mentionner la continuité sur l'intervalle d'intégration lorsqu'on étudie une intégrabilité !
   Le faire vous épargnerait des études superflues et mal justifiées ! L'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ converge par continuité sur un segment, et non parce que l'intégrande est dominé par 1 qui est intégrable sur [0,1] ! (et pour quelle raison $\int_0^1 1\mathrm{d}x$ converge, d'ailleurs ? par continuité, tiens donc !)
   Notez que : $0 \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \leqslant 1$, et pourtant l'intégrale $\int_0^1 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ne converge pas ! (Sauf au sens de l'intégrale de Lebesgue.) En effet l'approximation inférieure par des rectangles donne une aire nulle (à cause de la densité des irrationnels) et l'approximation supérieure donne une aire égale à 1 (à cause de la densité des rationnels) ; comme $1 \neq 0$, l'intégrale n'existe pas. La continuité est la clé !
   Cependant, si vous avez correctement mentionné la continuité pour les N premières intégrales généralisées d'un problème, avec N grand, il est toléré de l'omettre pour la $(N+1)^{\mathrm{e}}$ (parce qu'on a compris que *vous savez*).
2. Lorsqu'on effectue une intégration par parties avec une intégrale impropre, on vérifie l'existence du terme entre crochets avant d'appliquer la formule (qui est fausse dans le cas contraire : méditer sur l'égalité $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$).
   Pour les sommes de séries, les intégrales impropres, les limites, etc., vous faites bien attention (à juste titre) à ne pas mener un calcul sans assurance de l'existence ; je n'arrive pas à comprendre pourquoi soudainement, pour une intégration par parties, cela deviendrait inutile.

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

3. Je ne comprends pas comment on peut rédiger plus d'une ligne pour déterminer le signe de $(x-\sigma)(x+\sigma)$. Une déduction immédiate m'aurait convenu.
4. On intègre par partieS et non par partie. Pourquoi le singulier ? Qu'est-ce que cela voudrait dire ?
5. Une fonction ne « converge » pas en a : elle admet une limite finie en a. Ce terme est en revanche employé pour les suites, séries et intégrales.
6. Le théorème de continuité ou dérivation sous le signe intégrale est souvent mal nommé : j'ai vu le théorème de « domination sous le signe intégrale », ou de « convergence dominée sous le signe intégrale », ou que sais-je. Ce n'est pourtant pas un gros effort de viser juste : le nom du théorème nous dit ce qu'il démontre.
7. Lorsqu'il faut démontrer un résultat pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, essayez tant que possible de le quantifier ainsi dès le début du raisonnement. Ceux qui ont d'*abord* introduit $T > 0$, puis pris $t \in]0, T[$ (au lieu de prendre $t \in \mathbb{R}_+^*$ et *ensuite* T un réel quelconque tel que $T > t$), ont souvent oublié d'expliquer (ou l'ont mal fait) pourquoi cela impliquait bien le résultat voulu pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   J'ai déjà observé une négligence analogue dès qu'il apparaît une fonction indicatrice (devoir sur table n° 2), ce qui impliqua de graves erreurs de raisonnement.
   La remarque ci-dessus ne vaut pas pour la vérification de l'hypothèse de domination *locale*, où il fallait effectivement fixer T d'abord puis prendre $t \in]0, T[$.

Imprécisions mathématiques.

8. Le fait qu'une fonction d'intégrale convergente sur $[a, +\infty[$ ait soit une limite nulle en $+\infty$, soit pas de limite, fut un exemple du cours et en aucun cas un théorème : c'est à redémontrer lorsqu'on en a besoin (de plus, le cours ne traitait que le cas d'une limite positive, alors que le sujet de ce devoir manipulait une limite complexe).
9. Lorsqu'on vous demande de montrer : $\hat{f}(t,\xi) = K(\xi)e^{-4\pi^2\xi^2 t}$, peu d'élèves ont remarqué qu'il fallait démontrer : $K(\xi) \in \mathbb{R}$, alors que la résolution semble indiquer que $K(\xi)$ est complexe ($\hat{f}$ est en effet définie à l'aide d'une exponentielle complexe).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

10. Quelques élèves n'ont pas fait attention, lors des hypothèses de domination, à proposer une fonction qui ne dépend pas du paramètre t.