Devoir maison n° 2 – corrigé

Table des matières

1 Commentaires

Ce devoir est un extrait de l'épreuve de Mathématiques I du Concours Centrale-Supélec, filière PC, année 2018. La deuxième moitié de l'épreuve était essentiellement de l'algèbre linéaire et des probabilités de deuxième année : c'est pourquoi je ne l'ai pas incluse au devoir.

Ce devoir ne vous met pas trop en difficulté lorsqu'il s'agit de démontrer des intégrabilités et de vérifier des hypothèses de domination. L'enjeu est ailleurs : il a pour but de vous faire découvrir les propriétés de la transformation de Fourier, et comment on l'utilise en pratique pour résoudre des problèmes mathématiques. Elle a des applications assez profondes dans toutes les branches des mathématiques (théorie des groupes, arithmétique, analyse complexe, probabilités), mais son application la plus directe est dans l'étude des équations différentielles : en transformant la dérivée en une multiplication et inversement, elle peut rendre aisée voire triviale la résolution de certaines équations différentielles (il me semble que c'est aussi ainsi que vous utilisez la transformation de Laplace en SII).

Pour permettre cela, le problème vous fait cependant admettre que la transformation de Fourier est une opération injective. Le démontrer est très difficile et je crois ne l'avoir vu que dans des sujets d'ENS (au contraire de la transformation de Laplace où c'est une conséquence relativement classique du théorème d'approximation de Weierstraß). Une démonstration de son injectivité me semble d'autant plus difficile d'accès depuis que la théorie des séries de Fourier a disparu du programme des classes préparatoires.

Le sujet de Centrale-Supélec de 2016, filière PSI, fait démontrer l'injectivité de la transformation de Fourier dans sa partie II, mais en admettant le théorème de Fubini intégral.

Lorsqu'on étudie la transformation de Fourier, celle de la gaussienne est incontournable. Il faut retenir cette formule démontrée dans le sujet :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\Big(-\pi^2\xi^2\Big).$$

qui est une illustration du calcul d'intégrale *via* le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Le sujet d'origine calculait cette intégrale d'une autre manière (plus tortueuse à mon goût), avec un développement en série de l'intégrande (qui nécessitait le calcul de la quantité M_p : avec mon sujet remodelé, M_p n'avait plus d'utilité, mais j'estimais qu'il restait utile de savoir la calculer).

Ce qu'on retiendra en bref. La transformée de Fourier d'une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (et donc uniformément continue, puisqu'on a démontré en travaux dirigés qu'elle a une limite nulle en $\pm\infty$). Lien entre transformées de Fourier de f et f'. Transformation de Fourier de la gaussienne $x \mapsto \exp(-x^2)$. Calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^{2p}\exp(-x^2)\mathrm{d}x$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Utilisation de la transformation de Fourier pour résoudre une équation aux dérivées partielles.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1 et 2, questions 4 et 5, questions 7 à 10 ;

— DEUXIÈME PARTIE : questions 14 à 17.

2 Corrigé

Première partie

1. L'application g_σ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, et par croissances comparées on a : $g_\sigma(x) = \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ car $2 > 1$, elle l'est également au voisinage de $-\infty$ par parité, donc par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives il en est de même pour g_σ, qui s'avère être intégrable sur $\mathbb{R}$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — *Vraiment* vérifier en détails que $g_\sigma(x) = \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si l'on n'est pas convaincu, et le cas échéant : s'échiner à comprendre pourquoi il était naturel d'y recourir ici.
> — Se convaincre que l'argument de parité est rigoureux.
> — Peut-on obtenir l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ d'une autre façon ?

2. En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sigma}$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma\left(\sqrt{2}u\sigma\right)\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u = 1.$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Et sans le résultat admis dans l'énoncé, comment ferait-on pour avoir la valeur de cette intégrale ? Revoir si besoin ce qu'on fit en travaux dirigés.

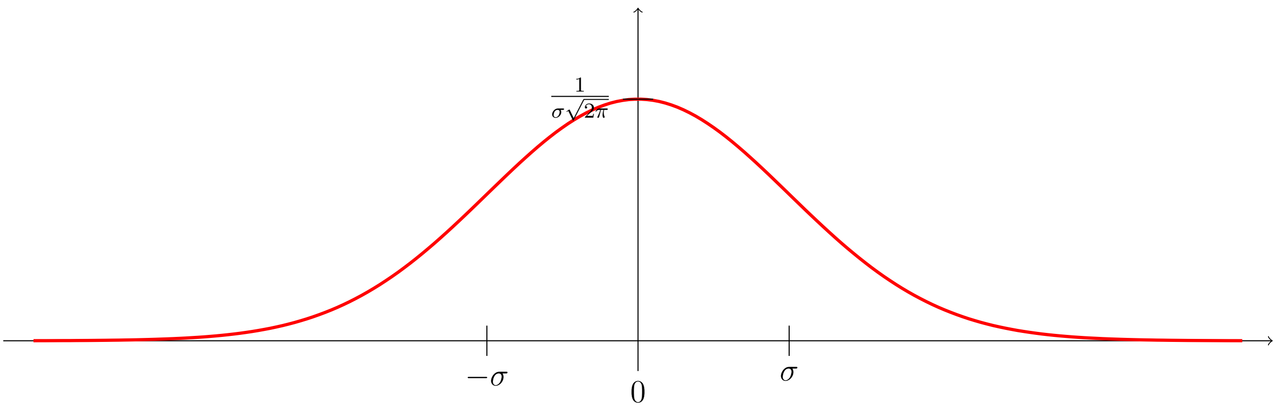
3. L'application g_σ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_\sigma'(x) = -\frac{x}{\sigma^2}g_\sigma(x), \quad g_\sigma''(x) = \frac{(x-\sigma)(x+\sigma)}{\sigma^4}g_\sigma(x).$$

On en déduit que g_σ'' s'annule en les deux points σ et $-\sigma$ (rappelons que l'on a $\sigma > 0$ par hypothèse). On a alors le tableau de variation suivant (je ne représente que les variations sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est suffisant puisque g_σ est paire) :

x	0		σ		$+\infty$
$g_\sigma''(x)$		$-$	0	$+$	
g_σ'	0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0
$g_\sigma'(x)$	0	$-$		$-$	
g_σ	$g_\sigma(0)$	$\searrow$	$g_\sigma(\sigma)$	$\searrow$	0

Pour tracer le graphe de g_σ, on ne perd pas de vue que le lieu d'annulation de la dérivée seconde correspond à un point d'inflexion. D'où le graphe suivant :



> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Je n'ai pas détaillé le calcul de g'_σ et g''_σ : le faire si besoin.
> — Se demander pourquoi on nous demande le lieu d'annulation de la dérivée seconde : en quoi permet-elle d'affiner le tracé d'un graphe représentatif ?

4. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto \varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions continues, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)| = |\varphi(x)|$. Or $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|$ converge par hypothèse, donc $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x$ converge absolument : d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Peut-on donner des exemples de fonctions NON intégrables pour lesquelles cette intégrale converge ?

5. On utilise le théorème de continuité sous le signe intégrale. Posons :

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,\xi) = \varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x).$$

Alors :
— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto g(x,\xi)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (car l'exponentielle complexe est continue sur $\mathbb{R}$) ;
— pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto g(x,\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme mentionné dans la question précédente ;
— pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$, on a : $|g(x,\xi)| = |\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x)|$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION), et φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse (donc $|\varphi|$ aussi).

Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, $\mathcal{F}(\varphi) : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x,\xi)\mathrm{d}x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

6. Puisque φ' est intégrable, en particulier l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \varphi'$ converge, donc φ (qui est une primitive de φ') admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Notons par exemple $\ell \in \mathbb{C}$ sa limite en $+\infty$. Si : $\ell \neq 0$, alors : $|\varphi| \underset{+\infty}{\sim} |\ell| > 0$, et donc $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|$ et $\int_{\mathbb{R}} |\ell|$ sont de même nature. Or la seconde diverge car $|\ell| > 0$, donc la première aussi : c'est absurde puisque φ est supposée intégrable. Par l'absurde : $\ell = 0$. De même pour la limite en $-\infty$, ce qui démontre que φ admet des limites nulles en $+\infty$ et $-\infty$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pourquoi ai-je utilisé $|\varphi| \underset{+\infty}{\sim} |\ell|$ plutôt que $\varphi \underset{+\infty}{\sim} \ell$?
> — Plutôt que de raisonner par l'absurde, pouvait-on effectuer un raisonnement direct ?

7. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On intègre par parties $\mathcal{F}(\varphi')(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x$ (qui est correctement définie puisque φ' est intégrable sur $\mathbb{R}$), en intégrant φ' et en dérivant $x \mapsto \exp(-2i\pi\xi x)$. On vérifie l'existence du terme entre crochets grâce au résultat de la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} |\varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)| = \lim_{x\to+\infty} |\varphi(x)| = 0,$$

et de même en $-\infty$. Par la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\mathcal{F}(\varphi')(\xi) = [\varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)]_{-\infty}^{+\infty} - (-2i\pi\xi)\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x = 2i\pi\xi\mathcal{F}(\varphi)(\xi),$$

d'où le résultat.

8. On pourrait sans difficulté répondre à cette question en comparant la fonction à une fonction de Riemann, par croissances comparées. Néanmoins, pour faire d'une pierre deux coups, je vais montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_p : x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$, et en même temps calculer la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}$, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. Plus précisément, la proposition P_p que nous voulons démontrer pour tout $p \in \mathbb{N}$ est :

« L'application f_p est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$. »

Pour $p = 0$ c'est une conséquence des questions 1 et 2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait P_p. On en déduit la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f_{p+1}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^{2p+2}\exp(-x^2)\mathrm{d}x$ ainsi que sa valeur en intégrant par parties l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f_p(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^{2p}\exp(-x^2)\mathrm{d}x$:

— on dérive $x \mapsto \exp(-x^2)$;
— on intègre $x \mapsto x^{2p}$;

l'existence du terme entre crochets étant conséquence du théorème des croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(-x^2)x^{2p+1}}{2p+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(-x^2)x^{2p+1}}{2p+1} = 0.$$

Par la formule de l'intégration par parties, les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_p(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^{2p}\exp(-x^2)\mathrm{d}x$ et $-\frac{2}{2p+1}\int_{\mathbb{R}} x^{2p+2}\exp(-x^2)\mathrm{d}x = -\frac{2}{2p+1}\int_{\mathbb{R}} f_{p+1}(x)\mathrm{d}x$ sont donc de même nature. Or la première converge par hypothèse de récurrence, donc la seconde aussi, et on a de plus :

$$\int_{\mathbb{R}} f_p = \left[\frac{\exp(-x^2)x^{2p+1}}{2p+1}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{2p+1}\int_{\mathbb{R}} f_{p+1} = \frac{2}{2p+1}\int_{\mathbb{R}} f_{p+1},$$

donc :

$$\int_{\mathbb{R}} f_{p+1} = \frac{2p+1}{2}\int_{\mathbb{R}} f_p \overset{(\mathrm{P}_p)}{=} \frac{2p+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} = \sqrt{\pi}\frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2(2p+2)2^{2p}p!} = \sqrt{\pi}\frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}(p+1)!},$$

d'où l'hérédité de la proposition. Par le principe de récurrence, l'application $x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} f_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi mes choix de fonctions à intégrer à dériver sont les bons choix ? Pouvait-on les prédire ?
— Comment répondre à cette question rapidement si l'on ne cherche pas à calculer directement l'intégrale ?

9. Immédiat d'après la question précédente, puisque l'on a : $\forall p \in \mathbb{N},\ M_p = \int_{\mathbb{R}} f_p$.

10. Suivant l'indication de l'énoncé, nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Posons :
$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(x,\xi) = \exp(-x^2)\exp(-2i\pi\xi x).$$
Alors :
— pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\xi \mapsto \phi(x,\xi)$ est manifestement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(x,\xi) = -2i\pi x \exp(-x^2)\exp(-2i\pi\xi x)\,;$$
— pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, les applications $x \mapsto \phi(x,\xi)$ et $x \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(x,\xi)$ sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ par continuité des exponentielles et applications polynomiales, et l'application $x \mapsto \phi(x,\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ parce que $x \mapsto \exp(-x^2)$ l'est d'après la question 1 (on utilise alors la question 4) ;
— pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(x,\xi)\right| = 2i\pi |x| \exp(-x^2). \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$
Justifions que l'application $x \mapsto |x|\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: elle est continue sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $|x| \geqslant 1$: $|x|\exp(-x^2) \leqslant x^2\exp(-x^2)$. Or $x \mapsto x^2\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par la question 8, donc par comparaison il en est de même de $x \mapsto |x|\exp(-x^2)$ sur $[1,+\infty[$ et $]-\infty,-1]$, puis sur $\mathbb{R}$ par continuité (on pouvait aussi comparer $x \mapsto |x|\exp(-x^2)$ à une fonction de Riemann *via* le théorème des croissances comparées).

Les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont donc vérifiées ; on en déduit d'une part que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto \dfrac{\partial \phi}{\partial \xi}(x,\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et d'autre part que l'application $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi(x,\xi)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x$ (qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de l'application $f_0 : x \mapsto \exp(-x^2)$, notée $\mathcal{F}(f_0)$) est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f_0)'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(x,\xi)\mathrm{d}x = i\pi \int_{\mathbb{R}} (-2x)\exp(-x^2)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x = i\pi\mathcal{F}(f_0')(\xi).$$
Par la question 7, on a donc : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f_0)' = -2\pi^2\xi\mathcal{F}(f_0)$. Autrement dit : $\mathcal{F}(f_0)$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. On sait la résoudre. Comme une primitive de $\xi \mapsto -2\pi^2\xi$ est $\xi \mapsto -\pi^2\xi^2$, on en déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f_0)(\xi) = \lambda \exp(-\pi^2\xi^2).$$
Or : $\mathcal{F}(f_0)(0) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = 1$ (d'après la question 2), donc finalement :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\Big(-\pi^2\xi^2\Big).$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
— Se demander pourquoi, sans l'indication de l'énoncé, il pouvait être pertinent de songer à calculer cette intégrale ainsi. C'est bien sûr lié aux propriétés remarquables de l'exponentielle et de la transformation de Fourier.
— Est-ce que cela aurait marché pour calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^3)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x$, par exemple ? Est-ce qu'une partie du raisonnement se généralise ?

11. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente et le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$:

$$\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-u^2\right) \exp(-2i\pi\xi\sqrt{2}\sigma u)\mathrm{d}u = \exp\left(-\pi^2\left(\xi\sqrt{2}\sigma\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2/(2^2\pi^2\sigma^2)}\right),$$

donc : $\mathcal{F}(g_\sigma) = \sigma'\sqrt{2\pi}g_{\sigma'}$. D'où le résultat avec $\mu = \sigma'\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Remarque. En prenant σ tel que : $\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma}$ (c'est-à-dire : $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$), on obtient : $\mathcal{F}(g_\sigma) = g_\sigma$. On dit alors que $g_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$ est un *vecteur propre* de la transformation de Fourier. Un résultat très classique.

Deuxième partie

12. Notons Φ la fonction $(t,x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\right)$. On vérifie facilement son appartenance à E, et on a :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) = -\frac{1}{\sigma^2+2t}\Phi(t,x) + \frac{x^2}{(\sigma^2+2t)^2}\Phi(t,x) = \frac{x^2-\sigma^2-2t}{(\sigma^2+2t)^2}\Phi(t,x),$$

puis, en reprenant les calculs de la question 3 :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t,x) = \frac{x^2-(\sigma^2+2t)}{(\sigma^2+2t)^2}\Phi(t,x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x),$$

donc Φ vérifie (i). Pour la condition aux limites, il suffit de noter que l'application $t \mapsto \Phi(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (la clé est que : $\sigma > 0$), donc :

$$\lim_{t\to 0^+} \Phi(t,x) = \Phi(0,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = g_\sigma(x),$$

donc Φ vérifie (iii). D'où le résultat.

13. Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f vérifie (ii), il existe une fonction ϕ_{2t} intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t' \in]0,2t[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(t',x)| \leqslant \phi_{2t}(x)$. En particulier, pour $t' = t \in]0,2t[$, cela donne :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(t,x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}} \phi_{2t}(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

donc $x \mapsto f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Pourquoi le choix de l'intervalle $]0,2t[$?

14. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Puisque nous voulons calculer la limite quand $t \to 0^+$, il ne coûte rien de supposer $t \in]0,1]$. Posons :

$$\forall (t,x) \in]0,1] \times \mathbb{R}, \quad h(t,x) = f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x).$$

Alors :
- pour tout $t \in]0,1]$, l'application $x \mapsto h(t,x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lim_{t\to 0^+} h(t,x) = g_\sigma(x)\exp(-2i\pi\xi x)$, parce que f vérifie la condition aux limites (iii), et l'application $\ell : x \mapsto g_\sigma(x)\exp(-2i\pi\xi x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
- comme f vérifie la condition (ii), il existe $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(t,x) \in]0,1[\times\mathbb{R}$, on ait :

$$|h(t,x)| = |f(t,x)| \leqslant \phi_1(t). \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu étant vérifiées, on a :

$$\lim_{t\to 0^+}\hat{f}(t,\xi)=\lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\ell(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} g_\sigma(x)\exp(-2i\pi\xi x)\mathrm{d}x=\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi),$$

d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Pourquoi le choix de l'intervalle]0,1[dans l'hypothèse de domination ?

15. Soient $\xi\in\mathbb{R}$ et $T>0$. Comme f vérifie (ii), il existe ψ_T intégrable sur $\mathbb{R}$ et majorant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ uniformément sur $]0,T[\times\mathbb{R}$. Conservons la notation h de la question précédente. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégrale :
    — pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'application $t\mapsto h(t,x)$ est de classe C^1 sur $]0,T[$ parce que f appartient à E, et on a :
    $$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall t\in]0,T[,\quad \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)\,;$$
    — pour tout $t\in]0,T[$, les applications $x\mapsto h(t,x)$ et $x\mapsto\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)$ sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ par hypothèse sur f ;
    — pour tout $(t,x)\in]0,T[\times\mathbb{R}$, on a, en utilisant le fait que f vérifie l'équation de diffusion (i) :
    $$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right|\leqslant\psi_T(t),\quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$
    et ψ_T est intégrable sur $\mathbb{R}$ par construction.

    Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, d'une part $x\mapsto\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $t\in]0,T[$, et d'autre part l'application $t\mapsto\hat{f}(t,\xi)=\int_{\mathbb{R}}h(t,x)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $]0,T[$. De plus :
    $$\forall t\in]0,T[,\quad \frac{\partial\hat{f}}{\partial t}(t,\xi)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i2\pi\xi x)\mathrm{d}x.$$
    Comme $(]0,T[)_{T\in\mathbb{R}_+^*}$ est une base de voisinages de $\mathbb{R}_+^*$, cela prouve que $t\mapsto\hat{f}(t,\xi)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'égalité ci-dessus est valable pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$. D'où le résultat.
16. Soient $\xi\in\mathbb{R}$ et $t>0$. On a :
    $$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}(t,\xi)=\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi)\overset{(i)}{=}\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)\right)(\xi)\overset{(q.7)}{=}2i\pi\xi\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)\right)(\xi)&\overset{(q.7)}{=}(2i\pi\xi)^2\mathcal{F}(f(t,\cdot))(\xi)\\&=-4\pi^2\xi^2\hat{f}(t,\xi),\end{aligned}$$
    d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Ne pas s'embrouiller sur le sens des variables : pourquoi n'a-t-on pas $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\right)(\xi)\overset{(i)}{=}2i\pi\xi\mathcal{F}(f(t,\cdot))(\xi)$ directement ?

17. Soit $\xi\in\mathbb{R}$. D'après la question précédente, $t\mapsto\hat{f}(t,\xi)$ vérifie l'équation différentielle linéaire suivante : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ y'(t)=-4\pi^2\xi^2y(t)$. Une primitive de $t\mapsto-4\pi^2\xi^2$ est $t\mapsto-4\pi^2\xi^2t$, et on en déduit qu'il existe $K(\xi)\in\mathbb{C}$ tel que : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \hat{f}(t,\xi)=K(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2t)$. Il reste à justifier que $K(\xi)\in\mathbb{R}$, ce qui ne va pas de soi *a priori* puisque $\hat{f}$ est à valeurs complexes. Pour cela, on prend la limite quand $t\to 0^+$ dans l'égalité précédente. D'après la question 14, cela donne :

$\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = K(\xi)$. Or nous avions calculé le membre de gauche dans la question 11, et nous avions trouvé : $\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \sigma'\sqrt{2\pi}g_{\sigma'}(\xi) \in \mathbb{R}$ (avec : $\sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}$). Finalement :

$$K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{\frac{1}{2\pi\sigma}}(\xi) \in \mathbb{R}$$

ce qu'il restait à démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. On remarque que $\xi \mapsto K(\xi)$ est une fonction continue (et même davantage) de la variable ξ. Pouvait-on le prédire *a priori*, avant le calcul explicite ?

18. On a montré dans la question précédente que l'on a : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{\frac{1}{2\pi\sigma}}(\xi)$.
19. Soient $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. En reprenant les deux questions précédentes, on a :

$$\hat{f}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} g_{\frac{1}{2\pi\sigma}}(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t) = \exp\left(-2\xi^2\pi^2\sigma^2 - 4\pi^2\xi^2 t\right) = \exp\left(-2\pi^2\left(\sigma^2 + 2t^2\right)\xi^2\right),$$

d'où le résultat avec $\nu_\sigma = 1$.

20. Au vu de l'indication de l'énoncé, on devrait comparer $\mathcal{F}(f(t,\cdot)) = \hat{f}(t,\cdot)$ et $\mathcal{F}\left(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}\right)$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(t,\xi) \overset{(q.19)}{=} \exp\left(-2\pi^2\left(\sigma^2 + 2t^2\right)\xi^2\right),$$

et :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\left(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}\right)(\xi) \overset{(q.11)}{=} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+2t}\sqrt{2\pi}} \cdot g_{\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) = \exp\left(-2\pi^2\left(\sigma^2 + 2t^2\right)\xi^2\right),$$

donc : $\mathcal{F}(f(t,\cdot)) = \mathcal{F}\left(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}\right)$. Par injectivité de la transformation de Fourier, admise dans l'énoncé, on a : $f(t,\cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$, d'où le résultat avec $\lambda_{t,\sigma} = 1$.

Remarque. En explicitant toutes les constantes apparaissant dans le sujet, on rend caduques les deux dernières questions (puisque leur objectif est d'expliciter $\lambda_{t,\sigma}$). Nous corrigeons les questions suivantes en faisant comme si nous avions seulement démontré l'existence de $\lambda_{t,\sigma}$ sans l'expliciter.

21. On remarque que l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $I(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x = \hat{f}(t,0)$. On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $I'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,0)$. Or la question 16 avec $\xi = 0$ implique : $\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = 0$, donc : $I' = 0$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, la fonction I est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où le résultat.

Remarque. Pour expliciter la valeur de cette constante, on peut prendre la limite quand $t \to 0^+$ de $I(t)$. On a : $\lim\limits_{t\to 0^+} I(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \hat{f}(t,0) = \mathcal{F}(g_\sigma)(0) = 1$ (questions 14 et 11). Donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $I(t) = 1$.

22. On sait que l'on a : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(t,x) = \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)$. On veut montrer : $\lambda_{t,\sigma} = 1$. Pour cela, intégrons l'égalité précédente sur $\mathbb{R}$ et utilisons la question précédente :

$$\lambda_{t,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x = I(t) = 1.$$

Or, d'après la question 2, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\mathrm{d}x = 1$. D'où : $\lambda_{t,\sigma} = 1$.