Devoir maison n° 1 – Compte rendu

Redite des devoirs précédents.

1. Il faut mentionner la continuité sur l'intervalle d'intégration lorsqu'on étudie une intégrabilité !
2. Lorsqu'on effectue une intégration par parties avec une intégrale impropre, on vérifie l'existence du terme entre crochets avant d'appliquer la formule (qui est fausse dans le cas contraire).

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

3. Le manque d'efficacité dans la rédaction est parfois effroyable. Soyez économes lorsque vous faites deux fois de suite le même raisonnement (« de même, en remplaçant u par λu et λ par $\frac{1}{\lambda}$... », ou « de même, comme $\sim$ est symétrique... »), et ne prenez pas une demi-page pour effectuer une majoration élémentaire ! même si on vous a promis en 1re année que la Terre cessait de tourner si vous faisiez autrement.

   Autre situation où vous faites souvent une rédaction excessive : lorsque vous étudiez la nature d'une série par comparaison, il suffit de comparer les termes généraux. Passer aux sommes partielles, en déduire que la série minorée est croissante et majorée, etc., revient à redémontrer systématiquement un énoncé *qui est dans votre cours de 1re année.* Perte de temps, surtout quand l'inégalité utilisée n'est valable qu'asymptotiquement.
4. C'est du cours que si f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la nature de $\int_a^{+\infty} f$ ne dépend pas de $a > 0$. Utilisez-le directement, au lieu de justifier le passage de $\int_\lambda^{+\infty} f$ à $\int_1^{+\infty} f$ à chaque fois.

Imprécisions mathématiques.

5. Dire : « $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge, alors $u_n \leqslant v_n$ pour tout n assez grand » est faux. Il suffit de prendre $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \mathbb{1}_{2\mathbb{N}}(n)$ pour avoir un contre-exemple.
   Il fallait donc plus de soin pour comparer u_n et $\frac{1}{n}$ sous l'hypothèse que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroît.
6. L'existence et la continuité de $x \mapsto \ln(U(x))$ furent souvent considérées comme allant de soi.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

7. Écrire : $\forall x \in [-a, a]$, $|\sum_n (u_n x)^n| \leqslant |\sum_n (u_n a)^n|$, est une erreur très grave de raisonnement et de compréhension des valeurs absolues. J'en parle longuement dans *L'art de la majoration* : on ne majore pas « dans » des valeurs absolues. Si cela donnait un résultat correct ici, ce n'est pas le cas en général : a-t-on $|\cos(t) - 1| \leqslant |1 - 1|$? Utilisez l'inégalité triangulaire si vous souhaitez utiliser la majoration $|x| \leqslant |a|$.
8. Si la « raison » d'une série géométrique dépend de n, alors ce n'est pas une série géométrique. Vous ne pouviez pas justifier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n x)^n$ ainsi. Erreur analogue et encore plus fréquente pour la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(u_n x)^n$, déduite de celle de $\sum\limits_{n\geqslant 0} nt^n$ « en posant $t = u_n x$ ».
9. Le raisonnement suivant est archi-faux : « $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc $(n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}^{\frac{1}{n}}\frac{n}{e} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$ ».
   Vous savez pourtant bien que les équivalents asymptotiques sont capricieux ! Méditez cet exemple : $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{n}$, donc $1^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?
   Le fait que ce soit vrai dans le cadre de ce devoir devait donc être justifié soigneusement.