Devoir maison n° 12 – Compte rendu

Redite des devoirs précédents.

1. Pour montrer qu'un vecteur est un vecteur propre, il faut s'assurer qu'il est NON NUL ! Si cela vous paraît anecdotique (au point que je doive le répéter à tous les devoirs ayant de l'algèbre linéaire), vous n'avez probablement pas compris leur intérêt global.

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

2. Il n'est pas sérieux d'écorcher le mot *symplectique*, au cœur de tout le problème.

Imprécisions mathématiques.

3. Un couple (A, B) appartient à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$ et non $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Un couple s'écrit (x, y) et non x, y (non négociable : oseriez-vous écrire $x_1, \ldots, x_n$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$?).
5. Très peu d'élèves ont remarqué que $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation. À quoi bon avoir explicité toutes les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ (ce sont les matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$, ce qu'on peut interpréter de manière équivalente en disant que ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$), si l'on ne s'en sert pas au moment de devoir démontrer qu'une matrice d'ordre 2 est orthogonale ?
6. Puisque J_n était définie par blocs, il semblait naturel de calculer des produits tels que $X^\top J_n Y$ en écrivant X et Y par blocs également. Initiative peu suivie.
7. Le fait qu'une forme soit alternée si et seulement si elle est antisymétrique (sauf si c'est une forme K-bilinéaire avec K un corps contenant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: dans ce cas seule l'implication directe est vraie) est du cours de 1re année. Une fois que vous aviez démontré que φ vérifiait l'une ou l'autre propriété, il était inutile de démontrer l'autre.
8. De même, les colonnes d'une matrice orthogonale forment une famille orthonormée *d'après le cours*.
9. Vous ne profitez pas suffisamment de l'interprétation géométrique des matrices orthogonales : ce sont des matrices d'isométries. Ici, vous pouviez vous servir de l'orthogonalité de J_n pour en déduire que $X \mapsto J_n X$ conserve les produits scalaires (et donc les normes aussi), les bases orthonormées en bases orthonormées, etc. (À la place, j'ai souvent vu du calcul matriciel brut, donc conceptuellement peu instructif : ce devoir ne vous aura pas appris grand'chose si vous ne regardez pas de près les raisonnements géométriques du corrigé.)
   Mieux : pour $n = 1$, la matrice J_1 est celle d'une rotation (de mesure d'angle $-\frac{\pi}{2}$). Comme $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif, J_1 commute avec toutes les autres matrices de rotation et en particulier toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, trivialisant ainsi les calculs en dimension 2 : observation pertinente faite par peu d'élèves.
   Chaque fois que vous croisez une matrice, vous devriez vous demander si l'endomorphisme canoniquement associé, ou la famille de vecteurs canoniquement associée, possède des propriétés géométriques ou algébriques remarquables. Ce serait beaucoup plus riche conceptuellement.
10. Lorsqu'il fallait montrer qu'une matrice antisymétrique et symplectique est de spectre réel vide, vous avez été nombreux à raisonner comme dans le cours avec une valeur propre complexe (et donc un vecteur propre complexe), vous forçant à utiliser un produit scalaire hermitien. Pourquoi ne pas vous être restreints au cadre du problème ? Cela vous aurait évité de considérer des conjugaisons complexes partout.
11. N'oubliez pas que la transposition est la traduction matricielle de l'adjonction. Puisqu'un endomorphisme antiautoadjoint vérifie $\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = -\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$, cela implique *sans le moindre calcul* qu'une matrice antisymétrique vérifie $\langle AX, Y \rangle = -\langle X, AY \rangle$ pour le produit scalaire usuel (l'équivalence entre ces deux points de vue est *via* l'endomorphisme canoniquement associé à A, et grâce au fait que dans une base orthonormée, un produit scalaire s'exprime comme le produit scalaire usuel).

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

12. N'oubliez pas qu'en géométrie, l'homogénéité peut comme en Physique vous permettre de vérifier la cohérence des formules. L'identité « $X^\top X = \|X\|$ », présente dans énormément de copies, devrait singulièrement vous choquer (une somme de produits de longueurs égale à une longueur ?).
13. Attention, l'égalité $F^{\perp\perp} = F$ est FAUSSE si F n'est pas un SOUS-ESPACE VECTORIEL (de dimension finie). Passer de $X_{i+n}^\perp = (J_n X_i)^\perp$ à $X_{i+n} = J_n X_i$ était donc aberrant (songez au sens géométrique de la première égalité : si deux vecteurs sont normaux pour le même hyperplan, sont-ils nécessairement égaux ?) : il fallait utiliser l'égalité $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$ pour se ramener à un sous-espace vectoriel.