Devoir maison n° 12
(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires

Ce sujet est une adaptation du sujet de Mathématiques I de Centrale Supélec, filière PC, année 2020. J'ai retiré une dizaine de questions (pas forcément inintéressantes) pour avoir un devoir maison de longueur décente.

Nous avons manipulé en long, en large et en travers des formes bilinéaires symétriques dans le cours de géométrie de MP. Or, en imitant la décomposition de toute matrice carrée comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, on peut montrer aisément que toute forme bilinéaire est somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire antisymétrique : pour comprendre toutes les formes bilinéaires, il est donc naturel de développer une théorie parallèle des formes bilinéaires antisymétriques (ou alternées). C'est ce qui conduit aux formes *symplectiques*, qui sont des formes bilinéaires antisymétriques associées à une matrice J_n particulière (antisymétrique et inversible, de carré égal à $-\mathrm{I}_{2n}$, à l'instar du nombre imaginaire i).

Il semble que ces formes apparaissent naturellement en mécanique, mais je n'ai pas la compétence pour en parler.

Ce sujet me permit de vous faire tester votre compréhension des techniques du cours (réduction par récurrence sur la dimension, utilisation des supplémentaires orthogonaux), dans des situations analogues quoique différentes à celle euclidienne.

> **Ce qu'on retiendra en bref.** Sous-groupe des matrices symplectiques. Orthogonalité au sens d'une forme bilinéaire alternée. Réduction d'une matrice symplectique, selon qu'elle soit symétrique ou antisymétrique.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— PREMIÈRE PARTIE : questions 1 à 3 ;

— DEUXIÈME PARTIE : questions 5 à 8 ;

— TROISIÈME PARTIE : questions 12 à 13 ;

— QUATRIÈME PARTIE : questions 18 et 22.

2 Rapport officiel de l'épreuve

2.1 Présentation du sujet

Le sujet de cette épreuve propose une étude des matrices symplectiques (réelles) associées à la matrice antisymétrique $J_n = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \end{pmatrix}$, de taille $2n$. Le problème définit la notion de *matrice symplectique* comme toute matrice $M \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top J_n M = J_n$. (...)

Plus difficile, la partie III permet d'aboutir à la réduction des matrices symétriques et symplectiques de taille quelconque et la partie IV, celle des matrices antisymétriques et symplectiques. (...)

2.2 Analyse globale des résultats

Sur les 3517 copies corrigées, la moyenne constatée, en pourcentage du barème, est de 21,8% pour un écart-type de 12,7%. Le sujet peut donc être considéré comme long, mais il a permis une bonne discrimination parmi les candidats. Comme nous le verrons plus loin, la sélection des meilleurs candidats s'est essentiellement faite sur le soin apporté aux réponses, bien plus que sur le volume traité. La meilleure copie a obtenu 81% des points du barème total.

Les parties I et II ont été abordées par la quasi-totalité des candidats (plus de 99% d'entre eux). Il en est presque de même pour les parties III et IV (entamées par plus de 90% des copies).

La notion de matrice symplectique, certainement nouvelle pour la grande majorité des candidats, a été plutôt bien prise en charge par ceux-ci. À l'inverse, on note quelques malentendus surprenants sur les notions de matrice symétrique ou antisymétrique, pourtant certainement étudiées en classe et rappelées en début de sujet.

La différence entre les copies se fait essentiellement sur les trois points suivants, indicatifs du niveau de soin et de discipline pratiqué par les candidats dans leurs raisonnements :

- la **rigueur logique**, en particulier le maniement soigneux des implications et des équivalences, ainsi que des quantificateurs – on note trop de confusions dans ce domaine, ce qui porte préjudice dès le début du sujet (...) ;
- des **vérifications de non nullité** – avant de diviser par une quantité, il importe de vérifier (voire justifier) qu'elle est bien non nulle (cf. remarques détaillées, plus loin) ; par ailleurs, la notion de vecteur propre comporte une exigence de non nullité. De nombreuses questions de ce sujet appellent ce genre de vérification ;
- la **connaissance précise de notions de base** du programme – matrice symétrique, antisymétrique, application linéaire, transposition/inversion d'un produit matriciel $(AB)^\top = B^\top A^\top$ et non $A^\top B^\top$), condition nécessaire et suffisante sur les colonnes d'une matrice pour qu'elle soit orthogonale (...), notions de famille libre/génératrice/base (question 13 notamment : la concaténation de deux bases d'un espace non nul ne peut former une base de cet espace).

Le jury reste surpris que les trois points ci-dessus constituent les principaux facteurs de discrimination parmi les candidats, à ce niveau d'études scientifiques. Il est donc important que les futurs candidats en prennent bonne note en vue des prochaines éditions.

2.3 Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury a relevé un certain nombre de points généraux, dans la correction des copies et en tire les recommandations suivantes.

- **Attention aux divisions par zéro**. Aux questions 2 et 12, le candidat était souvent amené à simplifier par des quantités abstraites. Le jury regrette que la plupart d'entre eux aient procédé à ces simplifications sans même s'inquiéter de la non nullité de la quantité simplifiée. Par exemple, à la question 3, l'écriture $\det(M)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$ donnait, dans beaucoup de copies, $\det(M)^2 = 1$ à l'étape suivante, sans la moindre discussion quant à la non nullité de $\det(J_n)$ qui, pourtant, réclamait une justification. De même, à la question 12, l'écriture $\lambda M J_n X = J_n X$ devenait $M J_n X = \frac{1}{\lambda} J_n X$ sans la moindre attention à la non nullité de λ qui, ici encore, méritait une justification, liée à l'inversibilité de la matrice symplectique M.

— **Les variables utilisées par les candidats sont loin d'être systématiquement déclarées**. Il n'est pas rare de voir apparaître des X, Y, a, b, α, β au milieu d'un raisonnement sans en avoir vu la déclaration au préalable, laissant au lecteur le soin de comprendre dans quel ensemble ces variables se trouvent, ou ce qu'elles désignent. De telles pratiques nuisent à la clarté du discours et affaiblissent considérablement le raisonnement, le rendant confus. Le jury attend davantage de rigueur de la part des candidats sur ce plan.

— **La calculatrice étant autorisée**, il est tout à fait pertinent d'y recourir pour les questions numériques (...), or une large proportion de candidats n'y pense pas. Parmi ceux qui semblent l'utiliser, très peu sont ceux qui s'en servent pour déterminer des valeurs propres et des vecteurs propres (...). Pourtant, nombreuses sont les calculatrices qui le permettent et il pourrait être profitable aux futurs candidats de se familiariser avec de telles fonctionnalités.

— **Inclusion/appartenance**. On voit beaucoup le symbole d'inclusion à la place du symbole d'appartenance (et vice versa).

— **Vecteurs propres**. La notion de vecteur propre comporte une exigence de non nullité, qui est étonnamment peu vérifiée par les candidats (questions 12, 18, 20).

— **La manipulation des équivalences** doit se faire avec le plus grand soin. *Primo*, l'écriture du symbole « $\Longleftrightarrow$ » ne se fait que si les implications $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$ sont vérifiées : moins de la moitié des candidats s'en préoccupent avec soin. *Secundo*, lorsque des questions (...) demandent la démonstration d'une équivalence, il faut bien veiller à ce que la réponse s'en occupe.

— **En guise de contre-exemples**, les candidats préfèrent laisser des réponses impliquant des paramètres qui, s'ils sont bien choisis, ne constituent plus un contre-exemple à l'affirmation étudiée. Cette remarque concerne principalement la question 3, dans laquelle, pour démontrer l'absence de structure d'espace vectoriel, certains candidats ont choisi $a, b \in \mathbb{R}$, M, N symplectiques, ont développé le produit $(aM + bN)^\top J_n(aM + bN)$, concluant très vite qu'il était différent de J_n, sans condition sur a, b, simplement parce que la forme trouvée *semblait* différente de J_n. Une telle réponse n'est pas exacte : en particularisant les valeurs de a, b (en particulier si $a = 0$ et $b = 1$), on trouve bien J_n. Le jury recommande aux candidats la plus grande rigueur dans ce genre de raisonnement, en particularisant des valeurs de a, b, voire de M, N, pour aboutir à la conclusion voulue.

— **Le jury recommande aux candidats de rédiger avec honnêteté et humilité** et notamment de bannir de leur vocabulaire des mots comme « clairement », « trivialement », « évidemment ». Ceux-ci n'apportent rien au contenu mathématique de la copie et ne peuvent jouer qu'en défaveur du candidat, surtout lorsqu'ils sont suivis d'erreurs manifestes ou lorsqu'ils servent à passer rapidement sur des points essentiels à la résolution de la question. Écrire, par exemple, à la question 1, que « J_n est trivialement antisymétrique », ou, à la question 9, que « les colonnes de P sont trivialement orthogonales » montre surtout que le candidat a décidé de prendre de haut un aspect de la question. À nouveau, cela n'apporte rien et l'impression laissée au lecteur n'est alors pas favorable.

Le jury rappelle également que les **fautes de français**, malheureusement nombreuses dans cette épreuve, même si elles ne sont pas comptabilisées dans le barème, nuisent à la copie et laissent au lecteur une impression négative qui peut se répercuter, consciemment ou non, sur la note finale. On rappelle ainsi que le nom « théorème » est masculin, ce qui rend incorrecte l'écriture « théorème *spectrale* », pourtant vue dans plus de deux tiers des copies.

Voici maintenant les remarques du jury, question par question.

— **Question 1** : question plutôt bien réussie dans l'ensemble. Pour l'aspect antisymétrique, il était attendu au moins une justification sur la structure de la matrice, ou sur le fait que $J_n^\top = -J_n$.

— **Question 2** : comme souligné précédemment, face à l'égalité $\det(M^\top)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)$, une proportion importante de candidats simplifie par $\det(J_n)$ sans se préoccuper de la non nullité de cette quantité. Pour ceux qui s'y intéressent, on note beaucoup d'affirmations non justifiées quant à la valeur de $\det(J_n)$ ou l'inversibilité de cette matrice. Ce point n'a pourtant pas été étudié plus tôt dans le sujet.

Le jury a aussi noté de nombreux calculs farfelus de $\det(J_n)$. Entre autres : calcul « par blocs » – qui ne se pratique pas, en général – inversions erronées de lignes ou de colonnes, voire développements hasardeux par rapport à une ligne ou une colonne. Ainsi cette question a suscité assez peu de bonnes réponses prenant en compte à la fois la non nullité de $\det(J_n)$ et un argument valable pour justifier celle-ci.

— **Question 3** : question souvent traitée, plutôt avec succès. Le jury note toutefois beaucoup de copies prétendant (à tort, bien sûr) que « $(M^\top J_n M)^{-1} = (M^\top)^{-1} J_n^{-1} M^{-1}$ ».

Pour la partie concernant la structure de sous-espace vectoriel, beaucoup pensent, à raison, à invoquer l'absence de la matrice nulle. Une proportion non négligeable de réponses, insatisfaisantes, proposent des contre-exemples de combinaisons linéaires non symplectiques insuffisamment précis.

— **Question 4** : beaucoup de candidats pensent qu'il suffit que les colonnes d'une matrice de taille 2×2 soient orthogonales pour que la matrice le soit. Or, il s'agit aussi de vérifier que les colonnes sont de norme égale à 1. (...)

— **Question 5** : une grande proportion de candidats oublie que $\varphi(X, X)$ est un réel, rendant stérile leur calcul, pourtant correct, de $\varphi(X, X)^\top$. Ceux qui, à l'inverse, l'ont bien noté, parviennent généralement à conclure correctement.

— **Question 6** : question globalement bien traitée. On a noté quelques fourvoiements dans le calcul de $X^\top J_n$, mais plutôt en faible proportion parmi les candidats.

— **Question 7** : beaucoup ont malheureusement confondu $\varphi(J_n X, X)$ et $\langle J_n X, X\rangle$. Parmi ceux qui n'ont pas commis cette erreur, on note une grande majorité de réponses satisfaisantes.

— **Question 8** : question traitée avec une fortune variable d'une copie à l'autre, principalement à cause de la mauvaise gestion de l'égalité ensembliste. Une seule inclusion ne peut suffire. Quant à l'utilisation d'une éventuelle égalité de dimensions, elle n'est pas pertinente dans cette question.

— **Question 9** : les candidats se sont surtout intéressés au caractère orthonormé de la famille des colonnes de P (deux premières conclusions demandées). Le jury a vu très peu de propositions satisfaisantes pour la troisième conclusion attendue (question difficile).

— **Questions 10 et 11** : rarement traitées.

— **Question 12** : le calcul de $M^\top J_n M X$, où X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, est une bonne idée qui a été trouvée en proportion importante dans les copies. Toutefois, très peu pensent à vérifier la non nullité de λ au moment d'écrire que $M J_n X = \frac{1}{\lambda} J_n X$, et encore moins à vérifier (en le justifiant correctement) que $J_n X \neq 0$ au moment de conclure qu'il s'agit d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Pourtant, un vecteur propre doit être non nul pour être considéré comme tel.

— **Question 13** : question plutôt difficile, qui a été très peu réussie. Une erreur, vraiment regrettable, est malheureusement répandue : « puisque $J_n(a_1 X_1 + \cdots + a_p X_p) = 0$, alors $a_1 X_1 + \cdots + a_p X_p = 0$ *car J_n est non nulle* » là où on attendait évidemment un argument d'inversibilité. Beaucoup prétendent, sur une bonne intuition, que « J_n est bijective de E_λ sur $E_{1/\lambda}$ », ce qui n'a pas vraiment de sens et qui aurait gagné à être remplacé par « l'application $X \mapsto J_n X$ induit une bijection de E_λ sur $E_{1/\lambda}$ ». Ce genre d'affirmation appelle par ailleurs une justification qui n'a pas toujours été apportée.

Le jury a également noté beaucoup de raisonnements formulés ainsi, « J_n est inversible donc *envoie une base sur une base* », sans aucune précision des espaces concernés, alors que là est toute la substance de la question.

- **Question 14** : il semble que beaucoup de candidats n'ont pas remarqué le « Y » figurant au milieu de l'écriture « $(\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_nY_1, \dots))^\perp$ » et n'ont traité que la question de l'orthogonalité aux Y_i et aux J_nY_i. Beaucoup de tentatives plutôt heureuses sur cette question.
- **Question 15** : question difficile, très peu réussie et peu comprise. L'erreur selon laquelle en concaténant deux familles libres de E_1 on obtient une base de E_1 apparaît de manière répétée.
- **Question 17** : question difficile, peu comprise, et réussie uniquement par les tout meilleurs candidats.
- **Question 18** : question beaucoup tentée, peu réussie. Les bonnes propositions s'appuyent sur un raisonnement par l'absurde construit sur le calcul de $\langle X, MX\rangle$ ou de $\overline{X}^\top MX$.
- **Question 19** : la référence au résultat de la partie précédente est apparue à presque tous, mais peu ont pensé à vérifier la totalité des conditions de son application. (...) Il ne faut pas négliger la moitié des hypothèses lorsqu'on invoque un résultat précédemment établi dans le sujet.
- **Question 20** : question très peu traitée intégralement, la plupart des candidats se contentant d'étudier MX. Même parmi les réponses se rapprochant d'une réponse correcte, le jury n'a vu qu'extrêmement rarement une vérification de la non nullité des vecteurs proposés et pourtant, à nouveau, un vecteur propre se doit d'être non nul.
- **Question 21** : pour un bon nombre de tentatives, peu de candidats se sont consacrés sérieusement à l'appartenance de MJ_nX à F.
- **Questions 22 à 25** : questions très peu traitées. La question 25 était difficile, mais le jury a tout de même trouvé quelques réponses correctes (moins de dix).

2.4 Conclusion

Il est absolument primordial de veiller à la rigueur du raisonnement, en particulier sur ce qui semble être considéré par de nombreux candidats, à tort, comme des détails : déclaration des variables, utilisation pertinente des liens logiques (implications, équivalences) et des mots de liaison, justification de la non nullité d'une quantité avant simplification. Il importe également que le candidat vérifie la totalité des hypothèses nécessaires avant utilisation d'un résultat précédemment établi, cela est très loin d'être systématique parmi les copies. Le correcteur, contrairement à l'examinateur à l'oral), ne peut interroger le candidat afin de lui demander d'étayer ses affirmations ou de les compléter ; il faut donc que tout soit exprimé sur la copie. Ce manque de rigueur explique que de nombreux candidats risquent de se retrouver déçus par leur note, ayant eu l'impression de traiter de nombreuses questions du sujet, alors que la plupart des réponses auront été incomplètes ou insuffisamment précises.

Le jury tient également à rappeler la plus-value importante qu'apportent une rédaction soignée et une copie bien présentée. Et ce, à double titre :

- sur le fond, un certain manque de soin ou une rédaction précipitée fait manquer des points importants de la question ou certaines étapes cruciales d'un raisonnement ;
- sur la forme, l'impression laissée au correcteur par une copie négligée est forcément négative. Pour éviter tout désagrément, le jury recommande aux candidats de soigner leur écriture, de limiter les ratures, d'éviter de multiplier les inserts plus ou moins lisibles ou les renvois vers une autre page et d'écrire dans un français correct.

Même si le jury n'a retenu aucun item de barème portant explicitement sur ces derniers points de forme, l'impression globale s'en ressent et ce facteur finit par avoir une influence, consciente ou non, sur la note attribuée.

Enfin, comme souvent, il n'est pas nécessaire de se précipiter et de traiter un nombre impressionnant de questions pour obtenir un très bon total : il suffit de procéder avec soin, dans un esprit scientifique empreint de rigueur et de précision. Les bonnes et très bonnes copies auront, presque sans exception, été de cette espèce.

3 Corrigé

Dans tout ce corrigé, nous noterons $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme euclidienne usuels de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

Première partie

1. En faisant un produit matriciel par blocs, on trouve directement : $J_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}$. Montrons que J_n est antisymétrique. On a :

$$J_n^\top = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}^\top & (-\mathrm{I}_n)^\top \\ \mathrm{I}_n^\top & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \end{pmatrix} = -J_n,$$

donc : $J_n \in \mathrm{A}_{2n}(\mathbb{R})$. Montrons que c'est une matrice symplectique. On a : $J_n^\top J_n J_n = J_n^\top J_n^2 = (-J_n)(-\mathrm{I}_{2n}) = J_n$, donc : $J_n \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$. On a à ce stade : $J_n \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}_{2n}(\mathbb{R})$.
Enfin, puisque : $J_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}$, et : $J_n^\top = -J_n$, ces deux égalités combinées donnent : $J_n^\top J_n = \mathrm{I}_{2n}$, donc J_n est aussi une matrice orthogonale. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Si l'objectif est de produire une matrice J_n telle que $J_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ en orthogonale et antisymétrique, pourquoi faut-il une matrice de taille paire ?

2. Soit M une matrice symplectique. On a : $M^\top J_n M = J_n$. En passant au déterminant, qui est multiplicatif et invariant par transposition, on a :

$$\det(J_n) = \det(M^\top J_n M) = \det(M^\top)\det(J_n)\det(M) = \det(J_n)(\det(M))^2,$$

donc, comme $\det(J_n) \neq 0$ (car $J_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}$), on a : $(\det(M))^2 = 1$, puis : $\det(M) \in \{1, -1\}$.

3. L'ensemble des matrices symplectiques est inclus dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ d'après la question précédente, non vide puisque I_{2n} est évidemment symplectique. Montrons qu'il est stable par inversion et produit.
Soit M une matrice symplectique. Alors, comme $|\det(M)| = 1 \neq 0$, la matrice M est inversible. De plus on a : $M^\top J_n M = J_n$, donc, en multipliant à gauche par $(M^\top)^{-1}$ et à droite par M^{-1} :

$$(M^\top)^{-1} M^\top J_n M M^{-1} = (M^\top)^{-1} J_n M^{-1},$$

donc : $J_n = (M^\top)^{-1} J_n M^{-1}$. Enfin, comme : $(M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$, on a :

$$(M^{-1})^\top J_n M^{-1} = J_n,$$

donc M^{-1} est symplectique. D'où la stabilité par inversion.
Soient M et N deux matrices symplectiques. Alors $M^\top J_n M = J_n$ et $N^\top J_n N = J_n$, donc :

$$(MN)^\top J_n MN = N^\top \underbrace{M^\top J_n M}_{=J_n} N = N^\top J_n N = J_n,$$

donc MN est encore symplectique. D'où la stabilité par produit.
L'ensemble des matrices symplectique est inclus dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, non vide, stable par produit et par inverse, donc c'est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}), \cdot)$.
Cependant la matrice nulle n'est pas symplectique puisqu'elle n'est même pas inversible, donc $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Remarque. Ces différentes questions ont dû vous faire remarquer que $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ ressemble beaucoup à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. C'est normal. En fait, de la même manière qu'une matrice orthogonale est au fond la donnée d'une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symplectique est la donnée d'une base φ-orthonormée pour la forme bilinéaire (non symétrique) φ introduite dans la seconde partie du problème. Ou, si l'on ne regarde pas les colonnes d'une matrice symplectique mais son endomorphisme canoniquement associé, une matrice symplectique est associée à un endomorphisme f préservant cette même forme φ, c'est-à-dire :

$$\forall (X,Y) \in (\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad \varphi(f(X), f(Y)) = \varphi(X,Y)$$

(de même qu'une matrice orthogonale peut être vue aussi bien comme une matrice de passage entre bases orthonormées ou une matrice d'isométrie). Ayant cela à l'esprit, vous comprendrez peut-être mieux l'esprit des questions à venir.

4. Notons M la matrice de l'énoncé (dont les colonnes sont X_1 et X_2), et posons $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors en posant : $X_2 = -J_1 X_1 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\|X_2\|^2 = x_2^2 + x_1^2 = \|X_1\|^2 = 1 \quad \text{ et : } \quad \langle X_1, X_2 \rangle = x_1(-x_2) + x_2 x_1 = 0,$$

donc la famille (X_1, X_2) est orthonormée et de cardinal 2, donc c'est une base orthonormale de $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et M est orthogonale.
Justifions que M est aussi symplectique. Comme M est orthogonale : $M^\top = M^{-1}$, donc M est symplectique si et seulement si :

$$M^{-1} J_1 M = J_1 \iff J_1 M = M J_1 \iff \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ -x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ -x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

ce qui est manifestement vrai : d'où le résultat, M est symplectique et orthogonale.
Autre démonstration. Comme $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ avec $x_1^2 + x_2^2 = 1$, la classification des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ nous enseigne immédiatement que M est une matrice de rotation (introduire $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, x_2) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ si vous n'en êtes pas convaincus). Or $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en est aussi une : c'est la matrice de la rotation planaire de mesure d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Comme $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif on a immédiatement, sans calcul : $J_1 M = M J_1$, d'où le caractère symplectique après multiplication à gauche par $M^\top = M^{-1}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Cette question permet de fabriquer des matrices symplectiques d'ordre 2. Peut-on ainsi fabriquer des matrices d'ordre quelconque ?
- Obtient-on ainsi *toutes* les matrices symplectiques d'ordre 2 ?
- Ainsi une telle matrice est orthogonale. Peut-on préciser de quel type de matrice orthogonale il s'agit ? (Rappelons qu'à l'ordre 2, on les a classifiées.)

Deuxième partie

5. Remarquons que, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, alors φ est l'application :

$$(X,Y) \mapsto \langle X, J_n Y \rangle = \left\langle J_n^\top X, Y \right\rangle = -\langle J_n X, Y \rangle$$

(la première égalité vient du fait qu'une matrice d'ordre 1 soit égale à sa transposée, ou plus conceptuellement : cela provient des propriétés de l'adjonction). Pour $X \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, cela donne : $\varphi(X,X) = -\varphi(X,X)$, par symétrie du produit scalaire, donc : $\varphi(X,X) = 0$.

Une forme bilinéaire alternée est toujours antisymétrique, d'où le résultat. Peut-être le concepteur du sujet attendait-il une démonstration de ce résultat de cours. Auquel cas il suffit d'écrire, pour tout $(X,Y) \in (\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2$:

$$0 = \varphi(X+Y, X+Y) = \varphi(X,X) + \varphi(X,Y) + \varphi(Y,X) + \varphi(Y,Y) = \varphi(X,Y) + \varphi(Y,X)$$

pour retrouver : $\forall (X,Y) \in (\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\varphi(X,Y) = -\varphi(Y,X)$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Bien vérifier les relations en début de question si elles vous paraissent trop rapides (notamment mon amalgame entre adjoint et transposition).
- Réciproquement, une forme bilinéaire antisymétrique est-elle alternée ?

6. Soient X et Y dans $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, qu'il est plus commode d'écrire : $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, avec $(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \in (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^4$. On a :

$$\varphi(X,Y) = X^\top (J_n Y) = (X_1^\top \ X_2^\top) \begin{pmatrix} Y_2 \\ -Y_1 \end{pmatrix} = \langle X_1, Y_2 \rangle - \langle X_2, Y_1 \rangle .$$

En écrivant X et Y (et donc X_1, X_2, Y_1 et Y_2) en fonction de leurs coordonnées x_i et y_i, cela donne :

$$\varphi(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n+k} - \sum_{k=1}^{n} x_{j+n} y_j = \sum_{k=1}^{n} (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k),$$

d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Apprécier l'économie de calcul en introduisant des blocs, plutôt que de directement remplacer X et Y par leurs expressions avec des coordonnées.
- Est-ce que l'aspect alterné ou antisymétrique se voit mieux sur cette expression ?

7. Soit $X \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Comme φ est alternée, on a : $\langle X, J_n X \rangle = \varphi(X,X) = 0$, d'où : $J_n X \in X^\perp$. Ensuite :

$$\varphi(J_n X, X) = (J_n X)^\top J_n X = X^\top J_n^\top J_n X = -X^\top J_n^2 X = -X^\top (-\mathrm{I}_{2n}) X = X^\top X = \|X\|^2$$

car J_n est antisymétrique et $J_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ d'après la question 1. D'où le résultat.

Remarque. On retrouve le fait connu que l'image d'un vecteur par un endomorphisme antisymétrique est un vecteur qui lui est orthogonal.

8. Soit $X \in \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$Y \in X^{\perp_\varphi} \iff \varphi(Y,X) = 0 \iff \langle Y, J_n X \rangle = 0 \iff Y \in (J_n X)^\perp,$$

d'où le résultat : $X^{\perp_\varphi} = (J_n X)^\perp$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Le fait que J_n « préserve les orthogonaux » peut-il s'interpréter en termes d'isomorphisme entre deux structures ?

9. Comme P est orthogonale, la famille formée par ses vecteurs colonnes est une base orthonormée de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, ce qui répond à la première partie de la question. Ensuite, pour tout $i \in [\![1,2n]\!]$ on

a : $X_i = PE_i$, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,2n]\!]^2$:

$$\begin{aligned}
\varphi(X_i, X_j) = X_i^\top J_n X_j = (PE_i)^\top J_n (PE_j) &= E_i^\top (P^\top J_n P) E_j \\
&= E_i^\top J_n E_j && (\text{car } P \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})) \\
&= \varphi(E_i, E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\delta_{k,i}\delta_{k+n,j} - \delta_{k+n,i}\delta_{k,j}\right), && (\text{q. } 6) \\
&= \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}
\end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient par une menue vérification : il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\delta_{k,i}\delta_{k+n,j} = 1$ si et seulement s'il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $k = i$ et $k + n = j$, si et seulement si : $j = i + n$. Raisonnement analogue pour le second produit de symboles de Kronecker. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Faire ce que j'ai omis sur la justification de la dernière égalité. S'attarder sur la rédaction « il existe k tel que... » dans ma suite d'équivalences : noter qu'on ne peut pas conclure correctement sans cela.

10. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Notons d'abord que X_{i+n} n'étant pas nul, il engendre une droite vectorielle de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et donc $X_{i+n}^\perp$ est de dimension $2n-1$. Justifions que c'est aussi le cas de $X_i^{\perp_\varphi}$ (il est clair que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ par linéarité à droite de φ) : c'est le noyau de la forme linéaire $f : Z \mapsto \varphi(X_{i+n}, Z)$, donc c'est soit un hyperplan de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ soit l'espace vectoriel entier ; le second cas est exclu parce que f n'est pas la forme linéaire nulle. En effet, par la question 7 on a : $f(J_n X_i) = \|X_i\|^2 = 1 \neq 0$. On a donc :

$$\dim\left(X_i^{\perp_\varphi}\right) = \dim(\ker(f)) = 2n - 1 = \dim(X_{i+n}^\perp).$$

Ainsi, pour montrer l'égalité de ces deux sous-espaces vectoriels, il suffit de montrer une inclusion. Montrons donc : $X_{i+n}^\perp \subseteq X_i^{\perp_\varphi}$. Il suffit pour cela de montrer que les vecteurs de la famille $(X_j)_{j \neq i+n}$, qui engendre $X_{i+n}^\perp$ par la question précédente, sont tous φ-orthogonaux à X_i.
Soit $j \in [\![1,2n]\!] \setminus \{i+n\}$. Par la question précédente, on a : $\varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n,j} - \delta_{i,j+n}$. Or $j \neq i+n$ donc : $\varphi(X_i, X_j) = -\delta_{i,j+n}$. Or $i \in [\![1,n]\!]$ par hypothèse et $j \geqslant n+1$, donc $i \neq j+n$; cela implique $\varphi(X_i, X_j) = 0$, d'où : $X_j \in X_i^{\perp_\varphi}$. D'après ce qui précède, cela montre l'inclusion $X_{i+n}^\perp \subseteq X_i^{\perp_\varphi}$ et donc l'égalité par un argument dimensionnel : d'où le résultat.
Remarque. On a implicitement démontré que dans ce cas particulier, la fameuse formule $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ (valable pour les espaces euclidiens) se généralise. Ce n'est en général pas le cas si φ n'est pas une forme bilinéaire *définie*.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — A-t-on $\dim(F) + \dim(F^{\perp_\varphi}) = 2n$ pour des sous-espaces vectoriels quelconques de $\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$? L'introduction de la forme linéaire f ci-dessus est présente dans la plupart des tentatives de généralisation de ces identités.
> — A-t-on aussi $\mathrm{Vect}(X_i) \oplus \mathrm{Vect}(X_i)^{\perp_\varphi} = \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$?

11. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Toujours sous les mêmes hypothèses on a d'après les questions 8 et 10 :

$$X_i^{\perp_\varphi} = (J_n X_i)^\perp, \quad \text{et :} \quad X_i^{\perp_\varphi} = (X_{i+n})^\perp,$$

donc : $(J_n X_i)^\perp = X_{i+n}^\perp$. Comme on est en dimension finie, on en déduit :

$$\mathrm{Vect}(J_n X_i) = ((J_n X_i)^\perp)^\perp = (X_{i+n}^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(X_{i+n}).$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J_n X_i = \lambda X_{i+n}$ (rappelons que X_{i+n} est unitaire, donc : $X_{i+n} \neq 0$). Déterminons λ afin de répondre à la question posée. D'après la question 7 on a : $\varphi(J_n X_i, X_i) = \|X_i\|^2 = 1$, mais aussi :

$$\begin{aligned} \varphi(J_n X_i, X_i) = \varphi(\lambda X_{i+n}, X_i) = \lambda \varphi(X_{i+n}, X_i) &= \lambda(\delta_{i+n+n,i} - \delta_{i+n,i+n}) \qquad \text{(q. 9)} \\ &= -\lambda, \end{aligned}$$

donc : $\lambda = -1$, ce qui permet de conclure : $J_n X_i = -X_{i+n}$.

Troisième partie

Remarquons que par le théorème spectral, on sait déjà que M est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. La vraie nouveauté du résultat à démontrer est qu'on peut prendre une base orthonormée et « symplectique » de vecteurs propres.

Partie A. Propriété.

12. Soient λ une valeur propre de M et $X \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})}$ un vecteur propre associé. Comme M est inversible par la question 2, on a : $\lambda \neq 0$. Comme J_n est inversible et $X \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})}$, on a $J_nX \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})}$ et, comme $MX = \lambda X$, et : $M^\top J_n M = J_n$, la symétrie de M implique :
$$J_nX = M^\top J_n MX = M^\top J_n(\lambda X) = \lambda M(J_nX),$$
donc : $M(J_nX) = \frac{1}{\lambda}(J_nX)$. Ceci montre que J_nX est un vecteur propre de M associé à $\frac{1}{\lambda}$.
Remarque. Remarquez l'analogie entre le résultat de cette question et la démonstration qu'une isométrie admet pour seules valeurs propres réelles 1 et -1. À approcher de ma remarque de la question 3.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** À comparer avec les raisonnements faits dans le cours (sur les matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales) pour obtenir des informations sur les valeurs propres.

13. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Par la question précédente, l'application $X \mapsto J_nX$ induit une application linéaire de E_λ dans $E_{1/\lambda}$, injective puisque J_n est inversible, donc : $\dim(E_\lambda) \leqslant \dim(E_{1/\lambda})$. Le même raisonnement, appliqué à $\frac{1}{\lambda}$ au lieu de λ, donne l'inégalité en sens contraire et donc :
$$\dim(E_{1/\lambda}) = \dim(E_\lambda) = p.$$
En particulier $X \mapsto J_nX$ induit une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Un isomorphisme préserve les bases et on en déduit que $(J_nX_1, \dots, J_nX_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$: d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Noter le recours aux applications linéaires dans les arguments dimensionnels (il n'y a pas que les explicitations de bases dans la vie). Ici c'était plus subtil puisque l'application $X \mapsto J_nX$ n'est pas immédiatement un isomorphisme.

14. Soit $Y \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp$. Montrons que J_nY est orthogonal à Y_i, Y et J_nY_i : cela suffit à avoir le résultat.
D'après la question 1, la matrice J_n est orthogonale, donc elle préserve les produits scalaires et en particulier les relations d'orthogonalité. Donc :
$$\left\{\begin{array}{ccc} Y & \perp & Y_i \\ Y & \perp & J_nY_i \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} J_nY & \perp & J_nY_i \\ J_nY & \perp & J_n^2Y_i \end{array}\right.,$$
et comme $J_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}$, cela montre que J_nY est orthogonal à J_nY_i et Y_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Enfin, d'après la question 7, les vecteurs J_nY et Y sont orthogonaux. On a donc bien : $J_nY \in (\mathrm{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_nY_1, \dots, J_nY_p))^\perp$, ce qu'il fallait démontrer.

15. Si $E_1 = \{\vec{0}\}$, alors la dimension de E_1 est évidemment paire (et il n'y a pas de base dans ce cas). Sinon l'idée est de prendre un vecteur X_1 unitaire quelconque, son image par J_n pour avoir une famille orthonormée (X_1, J_nX_1) (puisque J_n transforme tout vecteur en un vecteur orthogonal par la question 8, et conserve la norme par la question 1), puis de recommencer si besoin avec un vecteur X_2 qui n'est pas dans le plan engendré par X_1 et J_nX_1, etc.

Pour justifier que le procédé se termine et fournit une base de E_1, posons :

$$q = \max\left\{\text{card}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} = (X_1, \ldots, X_k, J_nX_1, \ldots, J_nX_k) \text{ famille orthonormée de } E_1\right\}.$$

Ce maximum existe bien, puisque pour tout X_1 vecteur non nul de E_1 (il en existe si E_1 n'est pas trivial), la famille (X_1, J_nX_1) est orthonormée par l'argument ci-dessus, donc cet ensemble est non vide et il est de plus majoré par la dimension de E_1 (elle majore en effet le cardinal de toute famille libre). C'est nécessairement un entier pair vu que les familles considérées sont de cardinal pair. On a donc le résultat voulu si $q = \dim(E_1)$.

Montrons cette égalité en raisonnant par l'absurde : soit $\mathcal{F}$ une famille orthonormée de E_1 de la forme $\left(X_1, \ldots, X_{q/2}, J_nX_1, \ldots, J_nX_{q/2}\right)$ et qui réalise ce maximum. Supposons : $q < \dim(E_1)$. Alors le supplémentaire orthogonal de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ dans E_1 n'est pas réduit au vecteur nul : soit $X \in E_1$ un vecteur unitaire dans cet orthogonal. Alors par la question précédente la famille $\left(X_1, \ldots, X_{q/2}, X, J_nX_1, \ldots, J_nX_{q/2}, J_nX\right)$ est orthogonale, et même orthonormée puisque X est unitaire et J_n conserve la norme, et enfin elle est constituée de vecteurs de E_1 puisque la question 12 montre que E_1 est stable par J_n ; or elle est de cardinal strictement supérieur à celui de $\mathcal{F}$, ce qui contredit sa maximalité. C'est absurde.

Par l'absurde, on a montré : $q = \dim(E_1)$, et donc la dimension de E_1 est paire puisque q l'est ; en prenant une famille $\mathcal{F}$ qui réalise le maximum ci-dessus, on achève de répondre à la question de l'énoncé.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Au vu de mon premier paragraphe, un raisonnement par récurrence semblait plus indiqué. Comprendre pourquoi en fait, mon raisonnement *est* un raisonnement par récurrence déguisé.

16. Le même procédé marche à l'identique pour E_{-1} qui est aussi stable par J_n par la question 12, permettant ainsi de construire une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_k, J_nX_1, \ldots, J_nX_k)$ de E_{-1}, qui est donc un espace vectoriel de dimension paire.

17. Comme M est symétrique, par le théorème spectral ses sous-espaces propres sont orthogonaux et on a :

$$\bigoplus_{\substack{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \\ \lambda \neq \pm 1}} (E_\lambda \oplus E_{1/\lambda}) \oplus E_1 \oplus E_{-1} = \text{M}_{2n,1}(\mathbb{R}).$$

Pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ tel que : $|\lambda| > 1$, on construit une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_{n_\lambda})$ de E_λ. Alors $(J_nX_{1,\lambda}, \ldots, J_nX_{n,\lambda})$ est une base de $E_{1/\lambda}$, orthonormée puisque J_n conserve les produits scalaires par la question 1.

De plus, si $E_1 \neq \{0\}$ alors il existe une base orthonormée $(X_{1,1}, \ldots, X_{p,1}, J_nX_{1,1}, \ldots, J_nX_{p,1})$ de E_1, de même pour E_{-1}, par les deux questions précédentes.

D'où, en construisant une base dans laquelle on met d'abord tous les X_i, puis tous les $-J_nX_i$ dans le même ordre (on met $-J_nX_i$ suite à la question 11 : rappelons qu'on veut obtenir une matrice de passage orthogonale et symplectique), et en prenant P la matrice de passage de la base canonique à la base ainsi formée, alors P est orthogonale en tant que matrice de passage entre bases orthonormées.

Par la formule du changement de base, $P^\top MP$ est une matrice diagonale de la forme voulue.

Enfin, toujours d'après la formule de changement de base, $P^\top J_nP = P^{-1}J_nP$ est la matrice de l'application $X \mapsto J_nX$ dans la base $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n, -J_nX_1, \ldots, -J_nX_n)$, donc :

$$\begin{aligned} P^\top J_nP &= \text{M}_{\mathcal{B}}\left((J_nX_1, \ldots, J_nX_n, -J_n^2X_1, \ldots, -J_n^2X_n)\right) \\ &= \text{M}_{\mathcal{B}}\left((J_nX_1, \ldots, J_nX_n, X_1, \ldots, X_n)\right) \\ &= J_n, \end{aligned}$$

donc P est bien symplectique.

Remarque. Ce dernier point de la démonstration, avec le résultat de la question 11, permet de montrer que si $P \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$ a pour colonnes $X_1, \ldots, X_{2n}$, alors :

$$P \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad X_{i+n} = -J_n X_i.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Bien comprendre l'usage de la question 11.

Quatrième partie

Partie A. Un peu de théorie.

18. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de M, alors il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$. On a alors, comme M est antisymétrique : $\langle MX, X\rangle = -\langle X, MX\rangle$ (se démontre soit en utilisant le fait qu'une matrice d'ordre 1 soit égale à sa transposée, soit grâce aux propriétés de l'adjonction), donc :

$$\lambda \langle X, X\rangle = -\lambda \langle X, X\rangle,$$

donc : $2\lambda\|X\|^2 = 0$. Comme $\|X\|^2 \neq 0$ (un vecteur propre est non nul), on en déduit : $\lambda = 0$.

On a montré : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subseteq \{0\}$. Or, comme M est symplectique, M est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de M. En conclusion : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

Remarque. On a redémontré que l'unique valeur propre réelle d'une matrice antisymétrique réelle est 0. À savoir démontrer.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Si l'on a en tête le sens géométrique d'un endomorphisme antisymétrique (et de ce qu'est un vecteur propre), pourquoi est-il *évident* que 0 est l'unique valeur propre réelle possible, et pourquoi est-il *naturel* de formaliser cette idée par un calcul de produit scalaire ?

19. La matrice M^2 est symplectique comme produit de matrices symplectiques (question 3), et de plus M^2 est symétrique car : $(M^2)^\top = M^\top M^\top = (-M)(-M) = M^2$. D'après la question 17, il existe donc $P \in \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $P^\top M^2 P$ soit diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_{2n}$ avec, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'égalité : $d_{k+n} = \frac{1}{d_k}$. D'où le résultat.

20. Comme X est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ, on a $M^2X = \lambda X$. Par suite :
    - on a : $M^2(MX) = M(M^2X) = M(\lambda X) = \lambda MX$ et $MX \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})}$ car M inversible et $X \neq 0_{\mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})}$, donc MX est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ ;
    - comme M^2 est symétrique et symplectique et X un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ, le vecteur J_nX est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre $1/\lambda$ d'après la question 12 ;
    - de même, MX est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre λ, donc J_nMX est un vecteur propre de M^2 associé à la valeur propre $1/\lambda$;

    d'où le résultat : X et MX sont associés à λ tandis que J_nX et J_nMX sont associés à $\frac{1}{\lambda}$.

21. On rappelle que pour montrer la stabilité d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire, il suffit de vérifier la stabilité sur une partie génératrice. Or :

$$MX \in F, \quad M(MX) = \lambda X \in F,$$

puis, comme M est symplectique et antisymétrique :

$$M(J_nX) = M(M^\top J_n M)X = -M^2(J_nMX) = \frac{1}{\lambda}J_nMX \in F,$$

et enfin, par un raisonnement analogue :

$$M(J_nMX) = -M^\top J_nMX = -J_nX \in F.$$

On en déduit que $F = \mathrm{Vect}(X, MX, J_nX, J_nMX)$ est stable par m. De même (en utilisant aussi le fait que $J_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}$) :

$$J_nX \in F, \quad J_n(MX) \in F, \quad J_n(J_nX) = -X \in F, \quad J_n(J_nMX) = -MX \in F,$$

donc F est stable par J_n.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Bien noter qu'on allège considérablement la rédaction en raisonnant sur une partie génératrice, comme souvent en algèbre.

22. Il est classique de démontrer que la matrice $M^\top M$ est symétrique positive, et même définie positive car M est inversible en tant que matrice symplectique. Son spectre est donc dans $\mathbb{R}_+^*$. Or : $M^\top M = -M^2$, car M est antisymétrique. Le spectre de M^2 est donc inclus dans $\mathbb{R}_-^*$: d'où le résultat.

    Remarque. Cette question aurait également permis de montrer que le spectre de M est vide : les valeurs propres réelles de M s'injectent dans celles de M^2 *via* $\lambda \mapsto \lambda^2$. Si le spectre était non vide, il y aurait donc des valeurs propres positives de M^2, ce qui est absurde par ce qu'on vient de montrer.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Faire ce que j'ai omis (la matrice $M^\top M$ est symétrique positive, ou définie positive). Savoir le démontrer du point de vue des endomorphismes également (avec $f^* \circ f$).

23. Supposons $\lambda \neq -1$. Montrons d'abord l'orthogonalité des vecteurs X, MX, J_nX et J_nMX. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ vérifications à faire. Comme souligné en remarque dans la question 8, le fait que M et J_n soient antisymétriques implique :

$$X \perp MX, \quad X \perp J_nX, \quad MX \perp J_nMX.$$

De plus on sait que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux, donc, comme :

$$\mathrm{Vect}(X, MX) \subseteq \ker(M^2 - \lambda \mathrm{I}_n) \quad \text{et :} \quad \mathrm{Vect}(J_nX, J_nMX) \subseteq \ker\left(M^2 - \frac{1}{\lambda}\mathrm{I}_n\right),$$

où $\lambda \neq \dfrac{1}{\lambda}$ (car $\lambda \neq \{-1,1\}$ grâce aux hypothèses de l'énoncé ; rappelons que λ est négatif par la question précédente), on a : $\mathrm{Vect}(X, MX) \perp \mathrm{Vect}(J_nX, J_nMX)$. Ceci implique :

$$X \perp J_nMX, \quad \text{et :} \quad MX \perp J_nX.$$

Enfin, comme une isométrie préserve le produit scalaire (question 1) :

$$\langle J_nX, J_nMX \rangle = \langle X, MX \rangle = 0,$$

donc : $J_nX \perp J_nMX$. La famille $\left(X, \dfrac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$ est donc orthogonale.

De plus, elle est composée de vecteurs unitaires car X et J_nX sont unitaires (pour X c'est par hypothèse et pour J_nX parce que J_n conserve la norme). Ensuite :

$$\|MX\|^2 = X^\top M^\top MX = -X^\top M^2X = -\lambda X^\top X = -\lambda\|X\|^2 = -\lambda$$

donc : $\|MX\| = \sqrt{-\lambda}$ et, comme J_n orthogonale : $\|J_nMX\| = \|MX\| = \sqrt{-\lambda}$.
C'est donc une famille orthonormée, donc libre. Ceci achève de démontrer que :

$$F = \mathrm{Vect}\left(X, \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX, -J_nX, \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right)$$

est de dimension 4.
Il reste à déterminer la matrice de l'endomorphisme m_F. On a :

$$m(X) = MX = -\sqrt{-\lambda}\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX.$$

Ensuite :

$$m\left(\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}MX\right) = -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}M^2X = \frac{-\lambda}{\sqrt{-\lambda}}X = \sqrt{-\lambda}X$$

puis, comme M est symplectique, et en utilisant le fait que J_nMX soit un vecteur propre de M associé à $\frac{1}{\lambda}$:

$$m(-J_nX) = -MJ_nX = -MM^\top J_nMX = M^2J_nMX = \frac{1}{\lambda}J_nMX = \frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX.$$

Enfin :

$$m\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_nMX\right) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}MJ_nMX = -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}M^\top J_nMX = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}(-J_nX).$$

Ceci montre que la matrice de l'application m_F induite par m sur F dans la base obtenue est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda} & 0 & 0 \\ -\sqrt{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{-\lambda} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{-\lambda} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda}J_1 & 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})} & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}J_1 \end{pmatrix}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Comparer cette construction avec la réduction des matrices antisymétriques, où l'on peut aussi prendre des bases des plans stables de la forme $(\vec{x}, f(\vec{x}))$, où $\vec{x}$ est un vecteur propre de f^2 (pourquoi ?). C'est en fait cette réduction classique qui a influencé celle de cette question.

24. Comme F est stable par m et $X \mapsto J_nX$, le sous-espace orthogonal $F^\perp$ est stable par leurs adjoints $m^* : X \mapsto M^\top X$ et $X \mapsto J_n^\top X$, et donc par m et $X \mapsto J_nX$ puisque M et J_n sont antisymétriques. D'où le résultat.

25. Soient λ une valeur propre de M^2 et X_1 un vecteur unitaire tel que : $M^2X_1 = \lambda X_1$ (il en existe). Notons : $F_1 = \mathrm{Vect}\,(X_1, MX_1, J_nX_1, J_nMX_1)$. On a vu aux deux questions précédentes que F_1 est de dimension 2 ou 4, que F_1 et $F_1^\perp$ sont stables par M et J_n et qu'il existe une base orthonormée de F_1 dans laquelle la matrice de m_{F_1} a une des deux formes indiquées.
    — Si $F_1^\perp = \{0\}$, c'est terminé.
    — Sinon, $F_1^\perp$ est un sous-espace stable par M et donc par M^2. l'endomorphisme induit par m^2 sur $F_1^\perp$ est autoadjoint, donc il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $X_2 \in F_1^\perp$, tels que : $M^2X_2 = \lambda_2X_2$ et $\|X_2\| = 1$.
    Notons $F_2 = \mathrm{Vect}\,(X_2, MX_2, J_nX_2, J_nMX_2)$. Grâce aux deux questions précédentes, il est immédiat que F_1 et F_2 vérifient les propriétés (b), (c), (e) et (f).
    De plus, F_1 et F_2 sont orthogonaux et si $Y \in F_1, Z \in F_2$, alors : $\varphi(Y, Z) = \langle Y, J_nZ\rangle = 0$ car $J_nZ \in F_2$. Donc F_1 et F_2 vérifient (d).

— Supposons avoir construit, pour un certain $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, des sous-espaces $F_1, \dots, F_k$ deux à deux orthogonaux (donc en somme directe) et vérifiant les propriétés (b) à (f).

 — Si $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k = \mathrm{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, c'est terminé.

 — Sinon, $G = (F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k)^\perp$ est un sous-espace stable par M donc par M^2.
 L'endomorphisme induit par m^2 sur G est autoadjoint, donc il existe $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}$ et $X_{k+1} \in G$, tels que : $M^2 X_{k+1} = \lambda_{k+1} X_{k+1}$ et $\|X_{k+1}\| = 1$.
 Posons $F_{k+1} = \mathrm{Vect}\,(X_{k+1}, MX_{k+1}, J_n X_{k+1}, J_n M X_{k+1})$. On vérifie comme précédemment que les sous-espaces $F_1, \dots F_k, F_{k+1}$ satisfont aux propriétés (b) à (f).
 Vu que $\dim\,(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k) \geqslant 2k$, ce procédé de construction s'arrête au bout d'au plus n étapes, ce qui montre le résultat voulu.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Je n'ai pas fait un raisonnement par récurrence sur la dimension, comme ce fut le cas pour les réductions du cours. Pourquoi ? Vous devriez déjà rencontrer une difficulté au moment de formuler l'hypothèse de récurrence (et ne pas réussir à la résoudre), ce qui justifie cette rédaction laborieuse.