Devoir maison n° 11 – Compte rendu

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Lorsque vous cherchez les séries entières solutions d'une équation différentielle (E) : $\bigstar = 0$, vous auriez une rédaction plus légère (sans rédaction de « $\Leftrightarrow\ \forall x \in]-R, R[$... » à chaque ligne) en mettant $\bigstar$ sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \heartsuit x^n$ dans un calcul *à part*, puis en l'injectant dans (E) *ensuite*. Je le fais systématiquement (cours, exercices, document *Méthodes*, Banque des Cent) et je m'étonne que ce ne soit pas imité.
2. Toujours dans ce contexte : je suis surpris que vous fussiez si rares à remarquer que toutes les sommes pouvaient commencer à $k = 0$ (phénomène très fréquent d'ailleurs, puisque kx^k et $k(k-1)x^k$, qui apparaissent naturellement dès qu'on a $x^2S''(x)$ et $xS'(x)$, sont nuls pour $k = 0$ et $k = 1$). Le constater vous aurait évité d'isoler les premiers termes de toutes vos sommes et de traîner d'inélégants termes de rebut.
3. Beaucoup de raisonnements auraient pu être allégés en remarquant (et en mettant en évidence) le fait que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et $\deg(P_n) = n$ pour tout n, alors : 1° le polynôme P_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, 2° tout polynôme de degré n vérifiant cette même propriété est proportionnel à P_n.

   Vous vous en êtes énormément servis mais avez été nombreux à le redémontrer à chaque fois : formuler et démontrer ces résultats une bonne fois pour toutes aurait apporté un énorme confort rédactionnel.

Imprécisions mathématiques.

4. Vous n'avez pas toujours prêté attention au signe de ω, seulement donné sur $]a, b[$ et que vous avez utilisé librement sur $[a, b]$: il fallait soit invoquer un argument de continuité pour conclure à la positivité en a et b, soit rappeler qu'une intégrale ignore les valeurs en les points isolés.
5. Peu d'élèves utilisent la connaissance explicite des coordonnées dans une base orthonormée pour écrire XP_{n-1} en fonction de P_n, P_{n-1} et P_{n-2}. Les raisonnements élaborés pour éliminer les termes d'indice inférieur revenaient à retrouver l'expression des coordonnées en question : perte de temps.
6. Il y eut de nombreux problèmes dans les deux questions où l'on montre que P_n a n racines distinctes dans $]a, b[$: certains pensent que le contraire de « il n'y a pas de racine de multiplicité impaire » est « tout le monde est de multiplicité impaire ». D'autres oublient qu'en factorisant un polynôme réel sur $\mathbb{R}[X]$, il peut apparaître des facteurs irréductibles de degré 2.
7. Dans la division euclidienne $G = P_nQ + R$, on affirme trop vite que $\deg(G) = \deg(P_nQ)$, ce qui est faux si $Q = 0$ et $G \neq 0$.
8. Après avoir calculé F_n *via* la formule de dérivation de Leibniz, pourquoi ne pas en avoir fait autant pour F_n' ? Vous auriez simplement eu à réexploiter ce qui fut démontré pour F_n.
9. Peu d'élèves ont remarqué la parité de F_n et F_n' pour déduire les valeurs en -1 des valeurs en 1.
10. Précisez que c'est parce que vous avez une fonction développable en série entière que vous pouvez dériver terme à terme $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$. Ne donnez pas l'impression que vous ignorez les subtilités cachées derrière la dérivation des séries de fonctions, et la raison pour laquelle ici tout marche bien.
11. Au moment d'affirmer que les sommes de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_{2p}x^{2k}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_{2p+1}x^{2k+1}$ sont linéairement indépendantes (chose rarement justifiée par ailleurs), il eût été avisé de préciser qu'on prend c_0 et c_1 non nuls, sinon c'est faux.

💣 Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

12. Quelques élèves ne distinguent pas applications polynomiales et polynômes, et ne réalisent pas qu'ils n'ont pas montré le caractère défini d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ en obtenant seulement : $\forall x \in]a,b[,\ P(x) = 0$. Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls : ce n'est pas ce que formule l'égalité ci-avant et il faut justifier le lien avec la nullité du polynôme (argument sur le nombre de racines).
13. Je ne compte pas le nombre de formulations fausses de l'unicité de la famille obtenue *via* l'algorithme de Gram-Schmidt, ni le nombre de formules fausses (voire délirantes) pour la construction du k^{e} vecteur de la famille : si vous avez compris qu'il se construit en soustrayant à $\vec{e}_k$ son projeté orthogonal sur $\operatorname{Vect}\left((\vec{e}_i)_{i\leqslant k-1}\right)$, et que vous savez comment exprimer une projection orthogonale, il n'y a aucune ambiguïté possible sur la formule !

    Pour l'unicité, simplement dire : « par l'algorithme de Gram-Schmidt, il existe une unique famille orthonormée » est une bêtise sans nom : changer des vecteurs en leurs opposés, les permuter, en prendre l'image par une isométrie... tout cela permet de produire de nouvelles familles orthonormées à outrance.
14. Beaucoup d'élèves citent le résultat d'unicité de la famille obtenue *via* l'algorithme de Gram-Schmidt, et affirment qu'il équivaut à l'unicité de la famille exigée par l'énoncé sans s'embarrasser d'explications.
15. Le nombre d'élèves appliquant la règle de D'Alembert sans se soucier de la positivité des coefficients (rarement vérifiée !), et surtout de leur non annulation, est très insatisfaisant. Je ne comprends pas d'ailleurs comment vous pûtes l'appliquer tout en affirmant cinq lignes plus loin que $c_p = 0$ pour tout $p \geqslant k(k+1)$ si $\gamma = k(k+1)$. Vous avez manqué toute la subtilité de cette question et des suivantes.
16. La dernière question du sujet était subtile (solutions sur $[-1,1]$) et je ne m'attendais pas à un nombre élevé de bonnes réponses. Le contraire m'aurait même rendu suspicieux. Néanmoins, je fus étonné que personne n'ait remarqué la grande analogie avec un exercice traité en classe (sur l'équation différentielle de Bessel) et essayé de s'en inspirer pour obtenir le caractère non borné d'une des solutions développables en série entière obtenues (*via* le wronskien).

    Sans atteindre ce niveau conceptuel, on pouvait obtenir un équivalent de c_{2p} et c_{2p+1} (dans le cas non asymptotiquement nul) par des méthodes classiques vues au chapitre II, pour en déduire la divergence des séries entières étudiées en $x = 1$. Si la méthode du corrigé ne vous évoque rien : je vous encourage à revoir comment on eut un développement asymptotique de la constante d'Euler à plusieurs termes, puis à lire le document *Méthodes* du même chapitre, section 7 (*Étudier des suites en passant par des séries télescopiques*).