Devoir maison n° 11
(corrigé)

Table des matières

1 Commentaires **1**

2 Rapport officiel de l'épreuve (problème) **2**

3 Corrigé **2**

1 Commentaires

Ce sujet est une adaptation du sujet 2005 de Mathématiques de l'École Polytechnique, filière PC. J'ai simplement retiré les deux premières questions (où l'on réinvente l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) et ôté les complications artificielles du reste du problème.

Il donne les propriétés les plus générales des familles orthogonales de polynômes obtenues *via* l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, pour un produit scalaire intégral. Parmi les plus importantes, on retiendra :
- tous leurs zéros sont dans l'intervalle d'intégration ;
- elles servent à calculer des intégrales *via* de banales évaluations (de manière exacte pour des polynômes de degré raisonnable, de manière approchée pour des *fonctions continues* quelconques) ;
- ce sont des vecteurs propres d'un endomorphisme autoadjoint (aviez-vous remarqué que T_n est autoadjoint dans ce sujet ? cela simplifie quelques raisonnements) ;
- ils décrivent les solutions d'équations différentielles.

Tous les polynômes orthogonaux remarquables vérifient les propriétés ci-dessus, et un sujet sur ce thème abordera tout ou partie d'icelles (remarquez qu'on couvre ainsi une grande partie du programme de MP : c'est une bonne raison d'apprécier ces polynômes lorsqu'on est un concepteur de sujet). Vous êtes donc sommés de savoir retrouver autant de ces propriétés que possible, les yeux fermés.

Le tableau suivant récapitule les polynômes que vous êtes très susceptibles de croiser le cas échéant (on décrit à chaque fois l'intégrale définissant le produit scalaire, les premiers termes de la famille de ces polynômes, l'endomorphisme autoadjoint ayant ces polynômes pour vecteurs propres, et enfin l'équation différentielle qu'ils vérifient) :

Nom	Produit scalaire	Vecteurs propres de :	EDO $(=0)$
Hermite	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$	$P \mapsto XP' - P''$	$y'' - 2xy' + 2ny$
Laguerre	$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$	$P \mapsto XP'' + (1-X)P'$	$xy'' + (1-x)y' + ny$
Legendre	$\displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t$	$P \mapsto \left((X^2-1)P'\right)'$	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y$
Tchebychev (1re espèce)	$\displaystyle\int_a^b \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$	$P \mapsto (1-X^2)P'' - XP'$	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y$
Tchebychev (2re espèce)	$\displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$	$P \mapsto (1-X^2)P'' - 3XP'$	$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y$

Illustrons sur un exemple l'intérêt des polynômes orthogonaux dans le calcul d'intégrales. Ci-dessous je le fais avec les polynômes de Tchebychev de première espèce, qui permettent de montrer :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_0^\pi P(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{n}\sum_{\ell=1}^{n} P\left(\cos\left(\theta_\ell\right)\right),$$

en imitant ce qui a été démontré dans ce problème (pour des familles plus générales de polynômes orthogonaux). Ci-dessus les $\cos(\theta_\ell)$ sont les zéros du n^{e} polynôme de Tchebychev ; on retiendra que $\theta_\ell = \frac{(2\ell-1)\pi}{2n}$ pour tout ℓ.

Je vous ai indiqué dans l'énoncé du sujet des annales où vous pouvez croiser ces polynômes. Mais fondamentalement, il y a peu de différence entre le cas général et le cas particulier (hormis lorsqu'on s'intéresse de plus près à la question de l'interpolation de Lagrange et du phénomène de Runge : les polynômes de Tchebychev ont un intérêt tout particulier dans ce cas).

Cette formule nous permet de calculer une intégrale *a priori* compliquée, uniquement en évaluant le polynôme trigonométrique de l'intégrale en quelques réels convenables, et en sommant. Par exemple, si $P = X^2(X^3-1) \in \mathbb{R}_5[X]$, alors on a plus simplement (on prend $n=3$) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi (\cos(\theta))^2\left((\cos(\theta))^3-1\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3-1\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^3-1\right) + \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^2\left(\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^3-1\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-1\right)+\frac{3}{4}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}-1\right)\right) = -\frac{\pi}{3}\times 2\times\frac{3}{4} = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

À comparer avec les calculs que vous mèneriez si vous deviez expliciter une primitive (*via* linéarisation).

Ce qu'on retiendra en bref. Produit scalaire intégral sur $\mathbb{R}[X]$. Conséquences théoriques de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Utilisation de l'orthogonalité pour démontrer des identités. Les zéros des polynômes d'une famille orthogonale pour un produit scalaire intégral sont simples et dans l'intervalle d'intégration. Interpolation de Lagrange pour représenter une intégrale par des évaluations. Lien entre polynômes orthogonaux et endomorphismes autoadjoints, équations différentielles de Sturm-Liouville. Interversion somme-limite lorsque le théorème de la double limite ne s'applique pas. Utilisation du wronskien pour une étude qualitative des solutions d'un système fondamental.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— Première partie : questions 1, 2, 5, 6 et 7 ;

— Deuxième partie : 9, 10, 13 et 15.

2 Rapport officiel de l'épreuve (problème)

3 Corrigé

Première partie

1. Tout d'abord, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien définie parce que les applications polynomiales sont continues sur le segment $[a,b]$. Elle est linéaire par rapport à chaque variable par linéarité de l'intégrale, et

symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Il reste à démontrer la positivité et le caractère défini : soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors :

$$\langle P, P\rangle = \int_a^b (P(t))^2\omega(t)\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

parce que $(P(t))^2\omega(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [a,b]$ (par hypothèse ω est strictement positive sur $]a,b[$, donc par continuité elle est positive sur $[a,b]$) ; d'où la positivité. Une fonction positive et CONTINUE est d'intégrale nulle si et seulement si elle est identiquement nulle, donc $\langle P, P\rangle = 0$ implique : $\forall t \in [a,b]$, $(P(t))^2\omega(t) = 0$, or ω est par hypothèse strictement positive sur $]a,b[$ donc : $\forall t \in]a,b[$, $P(t) = 0$. Le polynôme P admet donc une infinité de racines (tous les réels de l'intervalle $]a,b[$), ce qui implique $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$; d'où le caractère défini.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— On note qu'il n'était pas nécessaire que ω soit strictement positive sur $[a,b]$ (on a exclu les bornes). Peut-on encore plus alléger les hypothèses sur ω ?

— Ne pas omettre le passage de : $\forall t \in]a,b[$, $P(t) = 0$, à : $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, très important et fréquemment présent lorsqu'on étudie des produits scalaires et normes sur des espaces de polynômes.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on orthonormalise la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ avec l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : on obtient ainsi une famille orthonormée $(V_0, \dots, V_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons la famille $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue. Par construction, elle est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$, et d'après l'algorithme de Gram-Schmidt on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$V_n \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((V_0, \dots, V_n)\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1, \dots, X^n)\right) = \mathbb{R}_n[X].$$
Pour $n = 0$ on a $V_0 \in \mathbb{R}_0[X]$, donc $\deg(V_0) = 0$. Si $n \geqslant 1$, alors $V_n \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\deg(V_n) \leqslant n$, et $V_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\deg(V_n) > n-1$. On en déduit : $\deg(V_n) = n$. De plus, si l'on écrit :
$$V_n = \lambda_n X^n + R_n$$
avec $\deg(R_n) < n$, alors le fait que V_n soit orthogonal aux vecteurs de la famille $(V_0, \dots, V_{n-1})$ implique l'orthogonalité à $\mathrm{Vect}(V_0, \dots, V_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc :
$$1 = \langle V_n, V_n\rangle = \lambda_n \langle X^n, V_n\rangle + \langle R_n, V_n\rangle = \lambda_n \langle X^n, V_n\rangle,$$
donc : $\lambda_n = \frac{1}{\langle X^n, V_n\rangle}$, et d'après l'algorithme de Gram-Schmidt on a : $\langle X^n, V_n\rangle > 0$, donc le coefficient dominant de V_n est strictement positif.

La famille $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie tous les items sauf le dernier puisque ses vecteurs sont unitaires ; on y remédie en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \alpha_n V_n$. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conserve la propriété d'orthogonalité de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le coefficient dominant de P_n est égal à $\alpha_n\lambda_n$ et il est donc strictement positif par hypothèse sur α_n : cela assure en même temps que P_n est de même degré que V_n, c'est-à-dire n. Enfin : $\|P_n\|^2 = \alpha_n^2\|V_n\| = \alpha_n^2$: d'où l'existence de la famille désirée.

Montrons l'unicité : si $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille vérifiant les trois propriétés de l'énoncé, alors il est clair qu'on doit avoir $Q_0 = \alpha_0$ par un calcul direct (en utilisant le fait que ce soit un polynôme constant tel que $\|Q_0\|^2 = \alpha_0^2$ et de coefficient strictement positif).

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $Q_n \in \mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ puisque Q_n est orthogonal aux vecteurs de la famille $(Q_0, \dots, Q_{n-1})$ qui engendre $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (c'est une famille de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de cardinal n et échelonnée en degré) ; or $\mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ est de dimension 1, et P_n y appartient ; donc Q_n et P_n sont proportionnels pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que : $Q_n = \lambda_n P_n$. En comparant leurs normes : $\|Q_n\|^2 = |\lambda_n| \cdot \|P_n\|^2$, or Q_n et P_n sont de norme α_n^2, donc : $|\lambda_n| = 1$. Puisqu'on veut un coefficient dominant strictement positif, ceci impose $\lambda_n = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $Q_n = P_n$, le cas $n = 0$ étant déjà étudié ci-dessous, donc il existe une unique famille de polynômes vérifiant les trois propriétés demandées : c'est la famille obtenue en orthonormalisant la base canonique grâce à l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Remarque importante. Mettons en évidence les propriétés suivantes de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, très importantes à avoir en tête et que l'on utilisera abondamment dans ce corrigé :

$$P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \quad (\text{mieux : } \mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \mathrm{Vect}_\mathbb{R}(P_n)). \tag{$*$}$$

Il découle aussi de ce qui fut démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(P_0, \dots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]. \tag{$\dagger$}$$

Le premier point est un moyen extrêmement commode de montrer des identités vérifiées par les polynômes P_n (pour montrer que $P_n = \lambda\bigstar$, il suffit de montrer que $\bigstar$ est de degré n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le second point aussi (pour montrer $\bigstar = \clubsuit$, il suffit de montrer que $\bigstar - \clubsuit$ est de degré au plus n et orthogonal à $P_0, \dots, P_n$), mais il sert également à faciliter les démonstrations d'orthogonalité. Voir *Méthodes* du chapitre XII pour plus de détails.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Bien observer comment la caractérisation de la famille orthonormalisée fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt permet d'obtenir toutes les propriétés demandées sans jamais écrire une seule fois l'expression explicite des vecteurs de la famille orthonormalisée, et dispense de faire des raisonnements par récurrence.

— Pour que la famille $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit correctement définie, il faudrait que la famille obtenue en orthonormalisant $(1, X, \dots, X^k)$ soit effectivement égale aux k premiers termes de la famille obtenue en orthonormalisant $(1, X, \dots, X^n)$ (si $n \geqslant k$). Pourquoi est-ce bien le cas ?

— Remarquer que le coefficient dominant des P_n est connu : utile en quelques circonstances (comme la question suivante).

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Comme $XP_{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$, qui admet $(P_0, \dots, P_n)$ pour base orthonormée (propriété ($\dagger$) ci-dessus), on peut écrire :

$$XP_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle XP_{n-1}, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k.$$

Or : $\forall k \in [\![0, n-3]\!]$, $\langle XP_{n-1}, P_k\rangle = \langle P_{n-1}, XP_k\rangle = 0$ car $XP_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X] \subseteq \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et P_{n-1} est orthogonal à ce sous-espace vectoriel (propriété ($*$) ci-dessus). Donc :

$$XP_{n-1} = \frac{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle}{\|P_n\|^2} P_n + \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1} + \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-2}\rangle}{\|P_{n-2}\|^2} P_{n-2}.$$

On a donc :

$$\langle XP_{n-1}, P_n\rangle P_n = \left(\|P_n\|^2 X - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}\langle XP_{n-1}, P_{n-1}\rangle\right) P_{n-1} - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-2}\|^2}\langle XP_{n-1}, P_{n-2}\rangle P_{n-2}.$$

Il reste à justifier : $\langle XP_{n-1}, P_n\rangle \neq 0$, afin de diviser cette relation par ce réel et obtenir la relation de récurrence demandée. Pour cela, il suffit de noter que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle Q, P_n\rangle = c_n(Q)\langle X^n, P_n\rangle\,, \tag{$\ddagger$}$$

où $c_n(Q)$ est le coefficient de Q en facteur de X^n. On le démontre en décomposant Q dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et en utilisant encore une fois l'identité ($*$) selon laquelle P_n est orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Or, comme on l'a justifié à la question précédente : $\langle X^n, P_n\rangle > 0$ (avec V_n au lieu de P_n), d'où le résultat : $\langle XP_{n-1}, P_n\rangle \neq 0$, puis :

$$P_n = \left(\frac{\|P_n\|^2}{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle} X - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle}\right) P_{n-1} - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-2}\|^2} \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-2}\rangle}{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle} P_{n-2}.$$

On a donc, avec les notations de l'énoncé :

$$A_n = \frac{\|P_n\|^2}{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle}, \quad B_n = -\frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle}, \quad C_n = -\frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-2}\|^2} \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-2}\rangle}{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle}.$$

Remarque. Je pense qu'au vu de la question suivante, le concepteur du sujet attendait un autre argument (par exemple : noter que $(P_0, \dots, P_{n-1}, XP_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et exprimer P_n dans cette base).

Remarque. Ainsi tous les polynômes orthogonaux pour un produit scalaire intégral vérifient une relation de récurrence d'ordre 2, ce que vous ne manquerez pas de croiser dans un problème sur les polynômes de Hermite, Laguerre, Tchebychev, etc.

Remarque. On a implicitement utilisé le fait que l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P \mapsto XP$ est autoadjoint pour le produit scalaire intégral de ce sujet (en admettant que le sens de « autoadjoint » reste le même dans $\mathbb{R}[X]$).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Est-ce que cette démonstration marcherait pour des polynômes orthogonaux, peu importe le produit scalaire ?

— Est-ce que cette relation de récurrence est un moyen *pratique* de calcul des P_n ? Comparer avec l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

— Peut-on simplifier $\langle XP_{n-1}, P_n\rangle$ de la même manière qu'on le fit pour $\langle XP_{n-1}, P_k\rangle$?

— Retenir l'identité (‡), selon laquelle il suffit finalement de connaître $\langle X^n, P_n\rangle$ pour savoir calculer le produit scalaire de P_n par n'importe quel polynôme de degré n : seul le coefficient dominant intervient.

4. On reprend l'identité (‡) de la question précédente, qui permet d'écrire :

$$\langle XP_{n-1}, P_n\rangle = c_n(XP_{n-1}) \langle X^n, P_n\rangle, \quad \langle P_n, P_n\rangle = c_n(P_n) \langle X^n, P_n\rangle.$$

Or le coefficient dominant de P_n est k_n par définition, et celui de XP_{n-1} est évidemment égal à celui de P_{n-1}, donc il est égal à k_{n-1}. On en déduit :

$$\langle XP_{n-1}, P_n\rangle = k_{n-1} \langle X^n, P_n\rangle, \quad \|P_n\|^2 = k_n \langle X^n, P_n\rangle,$$

puis, par la relation obtenue à la question précédente : $A_n = \dfrac{k_n}{k_{n-1}}$. Un raisonnement analogue avec P_{n-2} donne :

$$C_n = -\frac{\|P_n\|^2}{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle} \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-2}\rangle}{\|P_{n-1}\|^2} \frac{\|P_{n-1}\|^2}{\|P_{n-2}\|^2} = -\frac{k_n}{k_{n-1}} \cdot \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_{n-2}^2} = -\frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_{n-2}^2} \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2}.$$

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comprendre pourquoi la présence de $\langle XP_{n-1}, P_{n-2}\rangle$ m'a conduit à faire apparaître $\|P_{n-1}\|^2$ par multiplication et division adéquates : le calcul de A_n montre qu'on sait simplifier $\frac{\langle XP_{n-1}, P_n\rangle}{\|P_n\|^2}$, et donc $\frac{\langle XP_{n-2}, P_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|^2}$ également : comment m'y suis-je ramené ?

— Pourquoi ne demande-t-on pas B_n ? Peut-on aussi l'obtenir ?

5. (a) Si $P_n = \prod_{i=1}^{r} (X-a_i)^{2\beta_i} \cdot R_n$, où R_n ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors R_n est de signe constant sur $[a,b]$ par continuité. Disons par exemple que $R_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Alors :

$$\forall t \in [a,b], \quad P_n(t) = \left(\prod_{i=1}^{r}(t-a_i)^{\beta_i}\right)^2 \cdot R_n(t) \geqslant 0,$$

et $t \mapsto P_n(t)$ n'est pas identiquement nulle vu que P_n est de norme 1, donc non nul. Or une application CONTINUE, positive et non identiquement nulle est d'intégrale strictement positive, donc : $\int_a^b P_n(t)\mathrm{d}t > 0$. Mais c'est impossible, puisque : $\int_a^b P_n(t)\mathrm{d}t = \langle P_n, 1\rangle = 0$ par orthogonalité de P_n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ (question 2, identité $(*)$). De même si $R_n < 0$; on en déduit une contradiction : il doit exister des racines de P_n dans $]a,b[$ d'ordre de multiplicité impair.

(b) Notons qu'on ne peut pas avoir $r = 0$ d'après la question précédente. Si $r < n$, alors $P = \prod_{i=1}^{r}(X-a_i)$ est de degré r inférieur ou égal à $n-1$, et donc appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; or $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ d'après la question 2 (identité $(*)$), donc : $\int_a^b P_n(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle P_n, P\rangle = 0$.

Or, si l'on note encore une fois R_n un polynôme tel que $P_n = \prod_{i=1}^{r}(X-a_i)^{2\gamma_i+1}R_n$, alors R_n est de signe constant sur $[a,b]$ (s'il admet des racines sur $]a,b[$, alors elles sont d'ordre de multiplicité pair par définition des a_i), par exemple positif. Par suite :

$$\forall t \in [a,b], \quad P_n(t)P(t) = \prod_{i=1}^{r}(t-a_i)^{2\gamma_i+2}R_n(t) = \left(\prod_{i=1}^{r}(t-a_i)^{\gamma+1}\right)^2 R_n(t) \geqslant 0.$$

Une application CONTINUE, positive et non identiquement nulle est d'intégrale strictement positive, donc $\int_a^b P_n(t)P(t)\mathrm{d}t > 0$; nous avons démontré le contraire ci-dessus. On en déduit une contradiction si $r < n$ (le raisonnement est le même si R_n est négatif sur $]a,b[$).

La question 5.(a) démontre qu'il est impossible pour P_n de n'avoir que des racines d'ordre de multiplicité pair dans $]a,b[$. Il en existe au moins une d'ordre de multiplicité impair dans $]a,b[$; ce qu'on vient de prouver montre que dans le cas où il en existe, il doit y en avoir n. Ainsi P_n admet autant de racines distinctes que son degré, donc est scindé et à racines simples : d'où le résultat.

6. Le fait R soit de degré au plus $n-1$ est une conséquence immédiate du théorème de division euclidienne. De plus, on a, si Q est non constant :

$$\deg(P) = \deg(QP_n + R) = \max(\deg(QP_n), \deg(R)) = \deg(QP_n)$$

parce que $\deg(P_nQ) \geqslant \deg(P_n) = n > \deg(R)$. Or $\deg(QP_n) = \deg(Q) + \deg(P_n)$, donc : $\deg(Q) = \deg(P) - \deg(P_n) \leqslant (2n-1) - n = n-1$. Si Q est constant, cette majoration reste vraie trivialement. On a donc bien : $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

7. Soit $G \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On intègre l'égalité déduite de la division euclidienne : $G = QP_n + R$. On a alors :

$$\int_a^b G(t)\mathrm{d}t = \int_a^b Q(t)P_n(t)\mathrm{d}t + \int_a^b R(t)\mathrm{d}t.$$

Or $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$, donc : $\int_a^b Q(t)P_n(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P_n\rangle = 0$ d'après la question 2 (identité $(*)$). Ensuite, en utilisant l'identité d'interpolation $R = \sum_{i=1}^{n} R(a_i)\ell_i$, on obtient :

$$\int_a^b G(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} R(a_i)\ell_i(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b \ell_i(t)\mathrm{d}t\right) R(a_i).$$

Or, l'égalité issue de la division euclidienne donne :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad G(a_i) = Q(a_i)P_n(a_i) + R(a_i) = R(a_i)$$

parce que les a_i sont les racines de P_n par définition. Il reste à poser $\lambda_i = \int_a^b \ell_i(t)\mathrm{d}t$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, et l'on a bien le résultat voulu :

$$\int_a^b G(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i G(a_i).$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — L'intérêt de cette identité est qu'on peut calculer une intégrale de polynôme par simple évaluation. Que pensez-vous de l'intérêt pratique de cette formule ? Le calcul des a_i et de λ_i est-il coûteux ?
> — Si G est de degré supérieur ou égal à $2n$, que se passe-t-il ?

8. L'égalité précédente est valable pour tout $G \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Pour obtenir le signe des λ_i, un choix pertinent de G serait un polynôme annulant tous les termes de la somme sauf 1, de sorte à isoler un des λ_i ; cela motiverait le choix $G = \ell_i$, qui a toutefois le défaut de ne pas permettre de conclure sur le signe, puisqu'on ne connaît pas le signe de $\int_a^b \ell_i(t)\mathrm{d}t$. En revanche le polynôme $G = \ell_i^2$ a les mêmes mérites et est d'intégrale positive. Ceci motive ce choix.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. L'égalité de la question précédente étant valable pour tout $G \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, elle est valable pour $G = \ell_i^2$ (qui est de degré $2n-2 < 2n-1$). On a alors :

$$\int_a^b (\ell_i(t))^2\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\ell_i(\alpha_j)\right)^2 = \lambda_i \left(\ell_i(a_i)\right)^2 = \lambda_i.$$

Or ℓ_i est un polynôme non nul (puisqu'il vaut 1 en a_i), donc $\int_a^b (\ell_i(t))^2\mathrm{d}t = \langle \ell_i, \ell_i \rangle > 0$. On en déduit : $\lambda_i = \int_a^b (\ell_i(t))^2\mathrm{d}t > 0$, d'où le résultat.

Deuxième partie

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme F_n s'obtient après n dérivations d'un polynôme de degré $2n$, on a :

$$\deg(F_n) = n.$$

Calculons à présent $F_n(\pm 1)$ et $F_n'(\pm 1)$. Posons : $U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$. On utilise la formule de dérivation de Leibniz avec $P = (X-1)^n$ et $Q = (X+1)^n$. On a $P \cdot Q = (X^2-1)^n = U_n$, et donc :

$$F_n = U_n^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left((X-1)^n\right)^{(k)} \left((X+1)^n\right)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(X+1)^k, \quad (1)$$

et tous les polynômes de cette somme sont nuls en 1, sauf pour $k = n$ (en effet $(X-1)^0 = 1$). De même, tous les polynômes de cette somme sont nuls en -1, sauf pour $k = 0$. On en déduit :

$$F_n(1) = U_n^{(n)}(1) = n!2^n, \text{ et : } F_n(-1) = U_n^{(n)}(-1) = n!(-2)^n.$$

De même, puisque $F_n' = U_n^{(n+1)}$:

$$F_n' = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left((X-1)^n\right)^{(k)} \left((X+1)^n\right)^{(n+1-k)}.$$

La dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ de $(X-1)^n$ est nulle, donc le terme $k=n+1$ de la somme est nul. De même, la dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ de $(X+1)^n$ est nulle, donc le terme $k=0$ de la somme est nul. On a :

$$F_n' = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!}(X+1)^{k-1}. \tag{2}$$

Par suite, en faisant le même raisonnement que ci-dessus :

$$F_n'(1) = \binom{n+1}{n} n! \frac{n!}{(n-1)!} 2^{n+1} = n(n+1)!2^{n-1}, \quad \text{ et : } \quad F_n'(-1) = n(n+1)!(-2)^{n-1}.$$

Remarque. En notant que U_n est une fonction paire, et en dérivant n fois, on trouve facilement par récurrence : $U_n^{(k)}(-X) = (-1)^k U_n^{(k)}(X)$. Ainsi la valeur en -1 peut s'obtenir à partir de la valeur en 1, et de la parité de $U_n^{(k)}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Si vous avez fait l'erreur de simplement écrire : $F_n(1) = \left((1^2-1)^n\right)^{(n)} = 0$, j'espère que le résultat de cette question vous fera méditer sur cette ânerie à tout jamais.

— Que dire de $U_n^{(k)}(\pm 1)$, plus généralement ? (pour $k<n$ et $k>n$)

10. Comme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique famille à vérifier les trois propriétés de la question 2, il suffit de montrer que $(\lambda_n F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie ces mêmes propriétés pour un bon choix de λ_n. Par unicité on aurait : $\forall n\in\mathbb{N},\ \lambda_n F_n = P_n$, puis le résultat. Je vais néanmoins opter pour une approche qui a l'air différente (mais ne l'est pas vraiment si l'on va au fond des choses) : j'ai formulé en fin de question 2 que l'on a : $\mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(P_n)$. Par conséquent, montrer que F_n est proportionnel à P_n équivaut exactement à montrer que F_n est de degré n (ce que l'on sait déjà) et orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n-1$ (pour $n \geqslant 1$ du moins, et c'est ce qu'on suppose à présent ; le cas $n=0$ est évident puisque deux polynômes constants non nuls sont proportionnels). Montrons donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \langle F_n, P\rangle = \int_{-1}^{1} F_n P = 0.$$

Comme $F_n = U_n^{(n)}$ avec $U_n = (X^2-1)^n$, cela incite à intégrer par parties en dérivant n fois le facteur Q (de sorte à tomber sur 0) et en intégrant n fois $U_n^{(n)}$. Pour alléger la rédaction, je vais procéder par récurrence (afin de ne faire qu'une seule intégration par parties). Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, soit P_k la proposition :

$$\text{« } \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \langle F_n, P\rangle = (-1)^k \left\langle U_n^{(n-k)}, P^{(k)} \right\rangle. \text{ »}$$

Montrons-la par récurrence sur $k\in[\![0,n]\!]$.

Si $k=0$, alors on a $F_n = U_n^{(n)}$ par définition de F_n, et pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$ on a $P^{(0)}=P$ évidemment, donc : $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\langle F_n, P\rangle = (-1)^0\left\langle U_n^{(n-0)}, P^{(0)}\right\rangle$: d'où l'initialisation.

À présent, soit $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel qu'on ait P_k. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\langle F_n, P\rangle \overset{[\mathrm{P}_k]}{=} (-1)^k \left\langle U_n^{(n-k)}, P^{(k)}\right\rangle = (-1)^k \int_{-1}^{1} U_n^{(n-k)} P^{(k)}. \tag{3}$$

Pour montrer que c'est égal à $(-1)^{k+1}\left\langle U_n^{(n-(k+1))}, P^{(k+1)}\right\rangle$, intégrons par parties, en dérivant $P^{(k)}$ (de classe C^1 sur $[-1,1]$) et en intégrant $U_n^{(n-k)}$ (continue sur $[-1,1]$). D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{-1}^{1} U_n^{(n-k)} P^{(k)} = \left[U_n^{(n-k-1)}(t)P^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U_n^{(n-k-1)} P^{(k+1)}.$$

Pour montrer que le terme entre crochets est nul, on note que si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $n-k-1 \in [\![0, n-1]\!]$, donc $U_n^{(n-k-1)}(1) = U_n^{(n-k-1)}(-1) = 0$ puisque 1 et -1 sont des racines de U_n d'ordre de multiplicité n. Donc finalement :

$$\int_{-1}^{1} U_n^{(n-k)} P^{(k)} = -\int_{-1}^{1} U_n^{(n-k-1)} P^{(k+1)}. \tag{4}$$

En combinant (3) et (4), on en déduit :

$$\langle F_n, P\rangle = -(-1)^k \int_{-1}^{1} U_n^{(n-k-1)} P^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \left\langle U_n^{(n-(k+1))}, P^{(k+1)} \right\rangle,$$

d'où P_{k+1}.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, on a P_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \langle F_n, P\rangle = (-1)^k \left\langle U_n^{(n-k)}, P^{(k)} \right\rangle.$$

En posant $k = n$, on a donc : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle F_n, P\rangle = (-1)^n \left\langle U_n, 0_{\mathbb{R}[X]} \right\rangle = 0$, donc : $F_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$. D'après le rappel effectué en début de résolution, on conclut que F_n et P_n sont proportionnels : d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Bien noter l'usage de la propriété d'orthogonalité des P_n pour démontrer des identités (c'est une des motivations que j'ai données en remarque dans la question 2). On peut cependant s'interroger sur les situations où c'est pertinent de procéder ainsi : qu'est-ce qui, dans la définition de F_n, permettait de « sentir » qu'on arriverait effectivement à démontrer que F_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ facilement ?

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ alors $F_0 = 1$ et $T(F_0) = 0$: il y a bien relation de proportionnalité dans ce cas. Supposons à présent $n \geqslant 1$.

Il est peut-être possible de s'en sortir par une démonstration purement calculatoire (je n'ai pas essayé). L'approche suivie ci-dessous est proche en esprit de celle de la question précédente : on montre que $T(F_n)$ et F_n sont proportionnels en notant que F_n engendre $\mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ (c'est vérifié par P_n d'après la question 2, or F_n et P_n sont proportionnels) : il suffit donc de montrer que $T(F_n)$ appartient également à ce sous-espace vectoriel. Il est clair que $T(F_n)$ est de même degré que F_n grâce au fait que la dérivation abaisse le degré, donc il est dans $\mathbb{R}_n[X]$: il reste à montrer qu'il est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$. Cela va découler de l'identité :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle T(P), Q\rangle = \langle P, T(Q)\rangle,$$

que l'on va obtenir en intégrant par parties. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$. On a :

$$\langle P, T_n(Q)\rangle = \int_{-1}^{1} P(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((t^2-1)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t)\right) \mathrm{d}t,$$

où l'on ferme les yeux sur l'abus de notation. On intègre par parties, en intégrant $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((t^2-1)\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t)\right)$ (qui est bien continue car polynomiale sur $[-1,1]$) et en dérivant $t \mapsto P(t)$ (qui est de classe C^1 sur $[-1,1]$ car polynomiale). On obtient :

$$\begin{aligned}\langle P, T_n(Q)\rangle &= \left[(t^2-1)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t)P(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}(t)P'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} (t^2-1)Q'(t)P'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Cette identité étant symétrique en P et Q, on a aussi : $\langle T(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)Q'(t)P'(t)\mathrm{d}t$, d'où l'égalité souhaitée.

Déduisons-en que $T(F_n)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. L'égalité ci-dessus démontre que T est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}[X]$ (si l'on s'autorise à utiliser ce terme en dimension infinie ; si cela vous choque, réservez ce terme à l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{R}_n[X]$), qui laisse stable $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ puisqu'on a clairement : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\deg(T(P)) = \deg(P)$ (voir la question 12 pour plus de détails), donc il laisse aussi stable son supplémentaire orthogonal $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$: ce qu'on voulait démontrer.

En conclusion : $T(F_n) \in \mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \mathrm{Vect}(F_n)$, donc $T(F_n)$ est proportionnel à F_n.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Essayer de montrer que $T(F_n)$ est proportionnel à F_n par un calcul direct. Échouer, ou réussir au prix d'un effort pénible. Apprécier d'autant mieux la joliesse de l'approche ci-dessus (vous pourriez à juste titre me rétorquer qu'il « faut y penser » ; c'est vrai, mais puisque je vous ai dit en commentaire du devoir que les polynômes orthogonaux sont souvent des vecteurs propres d'endomorphismes autoadjoints, vous pouvez y penser spontanément désormais...).

12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\deg(P') = \deg(P) - 1$ (sauf si $P = 0$, mais ce cas se traite immédiatement et est trivial), donc $\deg((X^2-1)P') = 2 + (\deg(P) - 1) = \deg(P) + 1$. On en déduit :

$$\deg(T(P)) = \deg(P) + 1 - 1 = \deg(P).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(T(P)) = \deg(P) \leqslant n$ donc $T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$: le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par T.

Soit T_n l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{R}_n[X]$. Par la question précédente, la famille $(F_0, \ldots, F_n)$ est constituée de vecteurs propres de T_n, or c'est une base puisqu'elle est orthogonale (donc libre) et de cardinal maximal : les F_k sont en effet proportionnels aux P_k qui forment une famille orthogonale. Par conséquent, si on détermine les valeurs propres associées aux F_k, on connaîtra à la fois le spectre et des bases des sous-espaces propres.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$, et soit $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que : $T_n(F_k) = \lambda_k F_k$. Alors par définition de T_n on a :

$$(X^2-1)F_k'' + 2XF_k' = \lambda_k F_k,$$

or le coefficient dominant de $(X^2-1)^k$ est 1, donc on en déduit facilement, après k dérivations, que le coefficient de X^k dans F_k est $\dfrac{(2k)!}{k!}$. Après une dérivation de plus, celui de X^k dans $2XF_k'$ est $2\frac{(2k)!}{(k-1)!}$, et enfin celui de X^k dans X^2F_k'' est $\dfrac{(2k)!}{(k-2)!}$ (il n'y en a pas dans $-F_k''$), donc :

$$\frac{(2k)!}{(k-2)!} + 2\frac{(2k)!}{(k-1)!} = \lambda_k \frac{(2k)!}{k!}.$$

Après division par $\dfrac{(2k)!}{k!}$, on en déduit : $\lambda_k = k(k-1) + 2k = k(k+1)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme F_k est un vecteur propre de T_n associé à la valeur propre $k(k+1)$; par ce qui précède, on peut conclure :

$$\mathrm{Sp}(T_n) = \{k(k+1) \mid k \in [\![0, n]\!]\}, \quad \text{et} : \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ \ker\left(T_n - k(k+1)\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = \mathrm{Vect}\,(F_k).$$

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> — Pouvait-on aussi trouver les éléments propres en passant par la matrice représentative de T_n dans la base canonique ? Et inversement, ayant trouvé le spectre *via* la matrice, conclure que les vecteurs propres sont forcément les F_n par examen du degré nécessaire d'un vecteur propre associé à une valeur propre donnée ?
> — Ne pouvait-on pas utiliser le théorème spectral pour faciliter tout ou partie du raisonnement ? Pourquoi ne l'ai-je pas fait ?

13. Notons S la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$. Elle est de classe C^2 sur son intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$, en tant que somme de série entière de rayon de convergence non nul, et dérivable terme à terme. Donc pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\begin{aligned}
&(x^2-1)S''(x) + 2xS'(x) - \gamma S(x) \\
&= (x^2-1)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x^{n-1} - \gamma\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2nc_n x^n - \gamma\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2nc_n x^n - \gamma\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(n(n+1)-\gamma\right)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2}\right)x^n.
\end{aligned}$$

On en déduit que S vérifie (E) si et seulement si :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(n(n+1)-\gamma\right)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2}\right)x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière, cette égalité est vérifiée si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(n(n+1)-\gamma\right)c_n - (n+2)(n+1)c_{n+2} = 0,$$

si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = \dfrac{n(n+1)-\gamma}{(n+2)(n+1)}c_n$. D'où le résultat.

14. On réécrit la relation de récurrence suivante pour les indices pairs :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad c_{2(p+1)} = \frac{2p(2p+1)-\gamma}{(2p+2)(2p+1)}c_{2p}. \tag{5}$$

Si $c_0 = 0$, alors la suite est nulle et le rayon de convergence est infini. Supposons donc $c_0 \neq 0$. Avant d'appliquer la règle de D'Alembert pour déterminer le rayon de convergence de $\sum_{p\geqslant 0} c_{2p}x^{2p}$, encore faut-il s'assurer que les termes consécutifs de cette suite sont non nuls. S'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = 2p_0(2p_0+1)$, alors on déduit aisément de (5) que les coefficients c_{2p} sont nuls pour tout $p > p_0$. Mais alors, si l'on revient à l'équation (E) grâce aux équivalences de la question précédente, on voit que la somme $S_{\text{pair}} : x \mapsto \sum_{p=0}^{p_0} c_{2p}x^{2p}$ (qui est polynomiale donc la série entière associée est de rayon de convergence infini) vérifie (E), qui équivaut à l'égalité : $T(S_{\text{pair}}) = 2p_0(2p_0+1)S_{\text{pair}}$, donc $S_{\text{pair}} \neq 0$ est vecteur propre de T associé à la valeur propre $2p_0(2p_0+1)$: d'après la question 12, cela signifie que S_{pair} est proportionnel au polynôme F_{2p_0}.
Si $\gamma \neq 2p(2p+1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors il est clair que la suite $(c_{2p})_{n\geqslant 0}$ ne contient pas de terme nul (on le montrerait proprement par récurrence, à l'aide de (5)). D'après la règle de D'Alembert, si $x \neq 0$ on a :

$$\left|\frac{c_{2(p+1)}x^{2(p+1)}}{c_{2p}x^{2p}}\right| = \left|\frac{2p(2p+1)-\gamma}{(2p+2)(2p+1)}\right| \cdot x^2 \underset{p\to+\infty}{\sim} x^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x^2,$$

donc d'après la règle de D'Alembert la série $\sum_{p\geqslant 0} c_{2p}x^{2p}$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$: le rayon de convergence est donc 1.

L'étude est la même pour $\sum\limits_{p\geqslant 0} c_{2p+1}x^{2p+1}$: Si $c_1 = 0$, alors la suite est nulle et le rayon de convergence est infini. Ensuite, si $c_1 \neq 0$ et s'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = (2p_0+1)(2p_0+2)$, alors la somme $S_{\text{impair}} : x \mapsto \sum\limits_{p=0}^{p_0} c_{2p+1}x^{2p+1}$ (qui est polynomiale donc la série entière associée est de rayon de convergence infini) définit un vecteur propre de T pour la valeur propre $\lambda_{2p_0+1} = (2p_0+1)(2p_0+2)$, donc S_{impair} est égale à F_{2p_0+1} à une constante multiplicative près. Sinon, la règle de D'Alembert démontre que le rayon de convergence est égal à 1.

En résumé :

— la série entière $\sum\limits_{p\geqslant 0} c_{2p}x^{2p}$ est de rayon de convergence $R = 1$ si $\gamma \neq 2p(2p+1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et de rayon de convergence infini dans tous les autres cas ; de même, la série entière $\sum\limits_{p\geqslant 0} c_{2p+1}x^{2p+1}$ est de rayon de convergence $R = 1$ si $\gamma \neq (2p+1)(2p+2)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et de rayon de convergence infini dans tous les autres cas ; cela dit, en remplaçant p par $p+1$, on voit que si $\gamma \neq 2p(2p+1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors on a aussi $\gamma \neq (2p+1)(2p+2)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ (réciproque éventuellement fausse : γ peut être nul), de sorte que les deux séries entières sont simultanément de rayon de convergence 1 ;

— les sommes S_{pair} et S_{impair} des séries entières $\sum\limits_{p\geqslant 0} c_{2p}x^{2p}$ et $\sum\limits_{p\geqslant 0} c_{2p+1}x^{2p+1}$ définissent des applications polynomiales, respectivement, si et seulement s'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = 2p_0(2p_0+1)$ (pour S_{pair}) ou $\gamma = (2p_0+1)(2p_0+2)$ (pour S_{impair}) ; les deux cas ne peuvent se produire simultanément pour une raison de parité, donc soit S_{pair} est polynomiale (pour $\gamma = n(n+1)$ avec n pair), soit c'est S_{impair} qui l'est (pour $\gamma = n(n+1)$ avec n impair).

Conclusion.

— s'il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $\gamma = p(p+1)$, alors soit S_{pair}, soit S_{impair} est polynomiale, selon que p soit pair ou impair ;

— si $\gamma \neq p(p+1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, les deux solutions ne sont pas polynomiales.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Expliciter S_{impair} dans quelques cas particuliers où c'est possible, comme $\gamma = 0$, pour se convaincre de la justesse de ce qui précède, mais aussi conjecturer à quoi ressemblent généralement les solutions non polynomiales.

— Bien noter qu'il peut effectivement se produire que $c_n = 0$ pour tout n assez grand : attention à ceux qui foncent vers la règle de D'Alembert sans examen attentif !

— Il est évident que si $c_k = 0$ pour tout k au-delà d'un certain rang alors $x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_kx^k$ est polynomiale. La réciproque est-elle vraie, et pourquoi ?

— Peut-on expliciter le coefficient de proportionnalité, lorsque ces séries entières sont proportionnelles à F_{2p} ou F_{2p+1} ?

15. Soit $(c_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant la relation de récurrence de la question 13, avec $c_0 = 1$ et $c_1 = 1$ par exemple (pour avoir des séries non nulles). Alors les applications $S_1 : x \mapsto \sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et $S_2 : x \mapsto \sum\limits_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$ sont deux solutions de (E) sur $]-1{,}1[$, linéairement indépendantes parce que la famille :

$$\left(\begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_1'(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_2(0) \\ S_2'(0) \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

est libre (conséquence du théorème de Cauchy linéaire), et d'après le théorème de Cauchy linéaire l'ensemble des solutions sur $]-1{,}1[$ de (E) est un espace vectoriel de dimension 2 (notons bien que

$x^2 - 1 \neq 0$ pour tout $x \in]-1,1[$). On en déduit que la famille (S_1, S_2) est un système fondamental de solutions de (E) sur $]-1,1[$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Peut-on justifier autrement et facilement que S_1 et S_2 sont libres ?

— Vous avez peut-être déjà constaté que, lorsqu'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle d'ordre 2 est constitué de deux fonctions développables en série entière, souvent l'une est paire et l'autre impaire. Est-ce général ? Sauriez-vous l'expliquer ?

16. On reprend les notations de la question précédente. Nous allons montrer que si S_1 ou S_2 est polynomiale (cas où il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = n(n+1)$), alors les solutions sur $[-1,1]$ sont toutes proportionnelles à F_n, et que dans le cas contraire il n'existe pas de solution non nulle.

Cas où il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\gamma = n(n+1)$.

Supposons par exemple que n est pair, le cas impair étant analogue. Soit f une solution de (E) sur $[-1,1]$. Elle définit par restriction une solution sur $]-1,1[$, donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]-1,1[$, $f = \alpha S_1 + \beta S_2$. Le membre de gauche admet une limite finie en 1 et -1 par continuité de f (puisque ce doit être une application de classe C^2 sur $[-1,1]$), donc le membre de droite aussi ; or, par la question 14, si n est pair et $\gamma = n(n+1)$ alors S_1 est polynomiale donc elle est continue en 1 et -1 aussi ; on déduit de l'identité ci-dessus que βS_2 doit aussi être continue en 1 et -1. Nous allons montrer que c'est possible uniquement si $\beta = 0$, car S_2 a une limite infinie en 1. Nous proposons deux démonstrations de ce fait : avec et sans le wronskien (la démonstration avec le wronskien a le défaut de ne pas marcher dans le cas où $\gamma \neq n(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, au contraire de l'autre, parce qu'elle nécessite de savoir que l'une des deux solutions est continue en 1).

Démonstration sans le wronskien. Nous allons le démontrer par une technique classique d'interversion limite-somme dans le cas où les coefficients de la somme sont positifs. En effet, il existe un rang p_0 tel que c_{2p+1} soit de même signe que c_{2p_0+1} pour tout $p \geqslant p_0$ (on le déduit aisément de la relation de récurrence vérifiée par la suite $(c_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$; un rang p_0 qui convient est n'importe quel rang tel que $(2p_0+1)(2p_0+2) > \gamma$). Quitte à changer S_2 en $-S_2$, on peut supposer que c_{2p+1} est strictement positif pour tout entier $p \geqslant p_0$. Posons : $C(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{p_0-1} c_{2p+1} x^{2p+1}$. On a alors, pour tout $x \in [0,1[$ et tout entier $N \geqslant p_0$:

$$S_2(x) = C(x) + \sum_{p=p_0}^{+\infty} c_{2p+1} x^{2p+1} \geqslant C(x) + \sum_{p=p_0}^{N} c_{2p+1} x^{2p+1}.$$

Comme S_2 est une somme de fonctions croissantes (quitte à éventuellement mettre de côté les termes entre $p = 0$ et $p = p_0 - 1$), elle est croissante et admet une limite en 1, éventuellement infinie. Prenons donc la limite dans cette inégalité quand $x \to 1^-$. On obtient :

$$\lim_{x\to 1^-} S_2(x) \geqslant C(1) + \sum_{p=p_0}^{N} c_{2p+1}.$$

Quand $N \to +\infty$, on a :

$$\lim_{x\to 1^-} S_2(x) \geqslant C(1) + \sum_{p=p_0}^{+\infty} c_{2p+1}.$$

Or la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} c_{2p+1}$ diverge comme nous allons le justifier. Nous avons déjà vu comment le lien suite-série permet d'obtenir un équivalent d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à l'aide d'un équivalent de $u_{n+1} - u_n$: on s'y ramène ici en considérant le logarithme du quotient ci-avant (notons que tout est strictement positif au voisinage de l'infini, donc considérer le logarithme est licite). On a :

$$\begin{aligned}
\ln(c_{2p+3}) - \ln(c_{2p+1}) &= \ln\left(\frac{c_{2p+3}}{c_{2p+1}}\right) \\
&\overset{(q.\,13)}{=} \ln\left(\frac{(2p+1)(2p+2)-\gamma}{(2p+3)(2p+2)}\right) \\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{2p}\right)\left(1+\frac{1}{p}\right) - \frac{\gamma}{4p^2}\right) - \ln\left(1+\frac{3}{2p}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{3}{2p} + \underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) - \frac{3}{2p} - \frac{1}{p} + \underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \\
&= -\frac{1}{p} + \underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{p^2}\right).
\end{aligned}$$

De cela on déduit : $\ln(c_{2p+3}) - \ln(c_{2p+1}) \underset{p\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{p}$. Or la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} \frac{1}{p}$ diverge et est à termes positifs, donc par le théorème de sommation des équivalents on a :

$$\ln(c_{2p+1}) - \ln(c_3) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\ln(c_{2k+3}) - \ln(c_{2k+1})\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} -\ln(p).$$

Ce dernier équivalent s'obtient classiquement par une comparaison série-intégrale (par exemple). Cependant l'équivalent $\ln(c_{2p+1}) \underset{p\to+\infty}{\sim} -\ln(p)$ ne suffit pas pour en déduire un équivalent de c_{2p+1}, puisque $\exp\left(\underset{p\to+\infty}{o}(\ln(p))\right)$ n'est pas simplifiable. Pas grave : il suffit de reprendre le développement ci-dessus avec $\ln(c_{2p+1}) + \ln(p)$ à la place de $\ln(c_{2p+1})$ (c'est par anticipation de cette étape que nous avons fait le développement asymptotique ci-dessus à un ordre plus élevé que nécessaire). On obtient :

$$\begin{aligned}
(\ln(c_{2p+3}) + \ln(p+1)) - (\ln(c_{2p+1}) + \ln(p)) &= \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) + \ln(c_{2p+3}) - \ln(c_{2p+1}) \\
&= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{p^2}\right) \\
&= \underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{p^2}\right),
\end{aligned}$$

La série $\sum\limits_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^2}$ est à termes positifs et converge. Cela prouve d'une part, par comparaison, que la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} \left((\ln(c_{2p+3}) + \ln(p+1)) - (\ln(c_{2p+1}) + \ln(p))\right)$ converge (et donc $(\ln(c_{2p+1}) + \ln(p))_{p\geqslant 1}$ aussi, par le lien suite-série ; notons γ sa limite), et d'autre part que, par le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\gamma - (\ln(c_{2p+1}) + \ln(p)) = \sum_{k=p}^{+\infty} (\ln(c_{2k+3}) + \ln(k+1)) - (\ln(c_{2k+1}) + \ln(k)) = \underset{p\to+\infty}{O}\left(\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right).$$

Or une comparaison série-intégrale classique permet de montrer : $\sum\limits_{k=p}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}$. On en déduit :

$$\ln(c_{2p+1}) = -\ln(p) + \gamma + \underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{p}\right),$$

et donc :

$$c_{2p+1} = \frac{e^\gamma}{p}\exp\left(\underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{p}\right)\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{e^\gamma}{p} > 0.$$

La série $\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{p}$ diverge, donc par comparaison il en est de même de $\sum_{p\geqslant 1} c_{2p+1}$. Par ce qui précède : $\lim_{x\to 1^-} S_2(x) = +\infty$. La continuité de f en 1 impose : $\beta = 0$, donc : $f = \alpha S_1 \in \mathrm{Vect}(S_1)$. La résolution de la question 14 montre que dans le cas $\gamma = n(n+1)$ avec n pair, S_1 et F_n sont proportionnels, donc : $f \in \mathrm{Vect}(F_n)$. Ainsi l'ensemble des solutions sur $[-1,1]$ de (E), que l'on note $\mathscr{S}([-1,1])$ dans ce qui suit, est inclus dans $\mathrm{Vect}(F_n)$, et l'inclusion réciproque est vraie du fait que F_n soit un vecteur propre de T (l'égalité $T(F_n) = n(n+1)F_n$ équivaut à l'équation différentielle (E)). Donc :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \gamma = n(n+1) \implies \mathscr{S}([-1,1]) = \mathrm{Vect}(F_n),$$

le cas où n est impair se traitant de manière analogue (il faut simplement montrer que S_1 tend vers l'infini en 1 au lieu de S_2).

Cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\gamma \neq n(n+1)$.

Alors S_1 et S_2 ont toutes les deux une limite infinie en 1 par un raisonnement analogue à celui ci-dessus, donc aucune fonction solution n'est continue en 1 sauf la fonction nulle. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma \neq n(n+1) \implies \mathscr{S}([-1,1]) = \{0\}.$$

Démonstration avec le wronskien. Supposons $\beta \neq 0$. Soit W le wronskien de S_1 et S_2. On sait que l'on a, après normalisation de (E) (de sorte à avoir 1 en facteur de $y''(x)$) :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad W(x) = W(0)\exp\left(-\int_0^x \frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t\right) = W(0)\exp\left(-\ln\left(1-x^2\right)\right) = \frac{W(0)}{1-x^2},$$

mais on a aussi, par définition du wronskien :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad W(x) = S_1(x)S_2'(x) - S_1'(x)S_2(x).$$

Comme $W(0) \neq 0$ (en effet (S_1,S_2) est un système fondamental de solutions sur $]-1,1[$), ce qui précède implique :

$$\lim_{x\to 1}\left(S_1(x)S_2'(x) - S_1'(x)S_2(x)\right) = \pm\infty.$$

Déduisons-en que S_2 a une limite infinie en 1. On sait déjà que S_1 est de classe C^1 en 1 en tant qu'application polynomiale, donc S_1 et S_1' ont des limites finies en 1. Si S_2 admet une limite infinie, alors on a le résultat voulu. Si l'on fait l'hypothèse absurde que S_2 admet une limite finie (sachant S_2 a forcément une limite en 1 en tant que somme de fonctions croissantes sur $[0,1[$), alors en écrivant, pour tout x au voisinage de 1 par valeurs inférieures :

$$S_2'(x) = \frac{W(x)}{S_1(x)} + \frac{S_2(x)S_1'(x)}{S_1(x)}$$

et en se souvenant que $S_1(1) \neq 0$ (car S_1 est ici proportionnel à F_n, comme on l'a vu dans la question 14, et on a montré à la question 9 que $F_n(1) = n!2^n \neq 0$), on obtient :

$$S_2'(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{W(x)}{S_1(1)} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{c}{1-x},$$

où l'on a posé : $c = \dfrac{W(0)}{2S_1(1)} \neq 0$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est de signe constant et n'est pas intégrable au voisinage de 1, le théorème d'intégration des équivalents implique :

$$S_2(x) - S_2(0) = \int_0^x S_2'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\sim} c\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} \underset{x\to 1^-}{\sim} -c\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

Cela contredit l'hypothèse absurde.

On a donc montré : $\lim\limits_{x\to 1^-} S_2(x) = +\infty$, or $f = \alpha S_1 + \beta S_2$ a une limite finie en 1 par continuité : ce n'est possible que si $\beta = 0$. On conclut à présent comme ci-dessus (démonstration sans le wronskien).

Remarque. On a ainsi un exemple concret où le théorème de Cauchy linéaire devient faux si l'équation différentielle n'est pas sous la forme normalisée habituelle (pas de terme en facteur de y'' pouvant s'annuler sur l'intervalle considéré).

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Pourquoi l'utilisation du wronskien était-elle naturelle et pertinente pour montrer que S_2 a une limite infinie ici ? À rapprocher d'autres exercices du chapitre XI où nous avons démontré des résultats analogues.

— Retenir la démarche (fréquemment) rencontrée permettant de justifier : $\lim\limits_{x\to 1} S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, lorsque $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est à coefficients positifs et de rayon de convergence 1. C'est très souvent intervenu cette année, donc très utile ! Prendre garde au fait que ce n'est pas une conséquence du théorème d'Abel radial, et que c'est FAUX en général si l'on supprime l'hypothèse de positivité.

— Je fais un certain nombre de commentaires sur ce raffinement de la règle de D'Alembert dans les indications des exercices 17 et 18 du chapitre II. La systématisation de l'argument ci-dessus mène à ce qu'on appelle la règle de Raabe-Duhamel, qui permet de souvent trancher lorsqu'on est dans le cas d'incertitude.

  Les démonstrations de cette règle passent souvent par un usage astucieux des propriétés des « dérivées logarithmiques de suites » $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Il est effectivement intéressant d'avoir une certaine culture à ce sujet. Notamment, il me semble très utile de connaître par cœur un développement asymptotique à un ou deux termes de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque $u_n = n^\alpha$, afin de conjecturer avec pertinence un ordre de grandeur de v_n lorsque $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ a exactement le même développement asymptotique : faites-le.

  Néanmoins, comme vous le voyez ci-dessus, *en situation pratique* nul besoin de démontrer cette règle : il suffit de faire ce qu'on a toujours fait pour obtenir un développement asymptotique à plusieurs termes d'une suite définie avec une somme ou un produit : cf. la constante d'Euler dans le cours du chapitre II.