Devoir maison n° 10 – Compte rendu

Remarques rédactionnelles, fautes de français, présentation.

1. Mettez en valeur le caractère uniforme de votre majoration lorsque vous démontrez une convergence uniforme. Écrire : « $\mathrm{P}(A_{n,\eta}(x)) \leqslant \frac{1}{n\eta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ » laisse un doute sur votre compréhension de ce qu'est la convergence uniforme (dois-je rappeler que l'examinateur n'aura que votre copie pour vous juger, au contraire de votre serviteur ? il ne sait pas que vous êtes étoilés, beaux, intelligents et érudits : vous devez le lui prouver). Or le doute profite rarement au candidat !
   Écrire : « $\mathrm{P}(A_{n,\eta}(x)) \leqslant \frac{1}{n\eta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ indépendamment de x » est très laxiste, pas très rigoureux, mais au moins on comprend que vous avez compris. Ce serait probablement toléré la plupart du temps, hormis pour quelques majorations epsilonesques redoutables comme celles vues en début d'année, qui ne laissent pas de place à l'approximation. Ma préférence va bien sûr vers une rédaction rigoureuse (apparition d'une norme infinie ou de la quantification de x *après* celle du rang N assurant la majoration de $\mathrm{P}(A_{n,\eta}(x))$ par ε).
2. Gagnez du temps. Beaucoup d'élèves ont d'abord montré que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par une minoration, puis $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} np$ par un encadrement. Vu que la deuxième assertion implique la première, il était inutile de procéder en deux temps.

Imprécisions mathématiques.

3. Plusieurs élèves ont oublié que le théorème d'approximation de Weierstraß vaut peu importe le segment : le démontrer sur $[0,1]$ ne suffit pas *a priori*.
4. L'inégalité $(2n)! \geqslant 2^n n!$ ne me semble pas usuelle (en aviez-vous conscience avant qu'on fasse l'inégalité de Hoeffding en travaux dirigés ? j'en doute) et je ne comprends pas que des élèves aient la hardiesse de l'invoquer sans démonstration.
5. Pour écrire : $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{t^{2n}}{2^n n!}$, encore fallait-il dire que $t^{2n} \geqslant 0$.
6. Peu d'élèves ont expliqué pourquoi $\mathrm{P}(-\langle X,Y\rangle \geqslant \varepsilon)$ se calcule comme $\mathrm{P}(\langle X,Y\rangle \geqslant \varepsilon)$.

Problèmes et erreurs mathématiques rédhibitoires.

7. Je pense que tout le monde n'a pas compris que la variable de $\frac{S_n(x)}{n}$ et $\mathbb{1}_{A_{n,\eta}(x)}$ n'est pas x : ce sont des variables aléatoires et elles sont définies sur un univers Ω (non spécifié, comme de coutume). Écrire « soit $x \in [0,1]$ tel que $|\frac{S_n(x)}{n} - x| > \eta$ » est incongru.
8. Cette incompréhension découle probablement de la précédente : quelques élèves ont cru pouvoir montrer que $\mathrm{E}(\bigstar \mathbb{1}_\clubsuit) \leqslant \varepsilon$, en faisant une distinction de cas selon que $\mathbb{1}_\clubsuit = 1$ ou $\mathbb{1}_\clubsuit = 0$ pour simplifier $\mathrm{E}(\bigstar \mathbb{1}_\clubsuit)$. C'est interpréter de travers ce qu'est l'espérance, qui tient compte de TOUTES les valeurs prises par la variable aléatoire $\bigstar \mathbb{1}_\clubsuit$ (il suffit de regarder sa définition pour s'en convaincre). Ce qui était simplifiable en revanche, c'était $\bigstar(\omega)\mathbb{1}_\clubsuit(\omega)$ avec $\omega \in \Omega$.
9. J'ai été étonné par le nombre faramineux de négligences concernant la quantification de t, au moment d'écrire : $\mathrm{P}(\langle X,Y\rangle \geqslant \varepsilon) = \mathrm{P}\left(e^{t\langle X,Y\rangle} \geqslant e^{t\varepsilon}\right)$. C'est très clairement faux pour $t \leqslant 0$, ce qui n'a pas gêné la majeure partie de la classe.