Devoir maison n° 1 – corrigé

Table des matières

1 Commentaires

Ce devoir maison est une adaptation relativement fidèle du sujet de Mathématiques 1 de l'École Polytechnique, année 1979, filière P'. *À ma connaissance* (mais je n'ai pas la science infuse), l'étude des intégrales de la forme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(U(x))\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est artificielle, néanmoins les techniques déployées dans ce problème sont instructives à quelques égards :

— comme ce fut déjà le cas pour le devoir des vacances d'été, et comme ce sera encore le cas durant toute l'année : on cherche à obtenir des résultats de régularité (continuité, dérivabilité) pour des fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, où le nœud du problème est bien sûr que la somme est à support infini (sinon on se contenterait d'invoquer les résultats de 1re année sur les sommes de fonctions continues, ou dérivables), et la clé de la résolution est dans la majoration du reste (puisque c'est lui qui fait la jonction entre la somme à support infini et celles à support fini, pour lesquelles on sait que tout se passe bien) : il est important d'en avoir conscience pour y penser de soi-même !

— nous utilisons le lien suite-série ou la transformation d'Abel, deux belles et profondes techniques, en plusieurs endroits : questions 7, 9 et 16 ;

— les natures d'intégrales difficiles à obtenir passent parfois par l'emploi de la relation de Chasles, pour nous placer sur des intervalles où nous savons majorer ou minorer plus finement l'intégrande : c'est exactement ce que l'on fait ici dans les questions 13 et 18, difficilement à cause du caractère non explicite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$; on se demandera pourquoi nous avons dû recourir à une telle approche ici : pourquoi n'arrive-t-on pas à encadrer directement l'intégrale sur $[1, +\infty[$, sans passer par les intervalles proposés ?

> **Ce qu'on retiendra en bref.** Majoration du reste d'une série pour obtenir la continuité ou dérivabilité de sa somme. Transformations d'Abel et lien suite-série. Comment obtenir la nature d'une intégrale en se ramenant à la nature de séries appropriées *via* la relation de Chasles.

Questions faciles ou classiques à retravailler

— les questions 2' et 11', pour voir comment montrer la continuité ou classe C^1 d'une somme de série de fonctions (cependant, plus tard dans l'année, il sera plus pertinent de directement faire les questions 2 et 11 avec les outils adaptés) ;

— la question 7, dont le corrigé récapitule de nombreuses méthodes de calcul de sommes ! en tous les cas, il s'agit de se ramener à une somme usuelle, en l'occurrence géométrique ; de toutes ces méthodes, celles qui sont les plus susceptibles d'être exploitables en d'autres circonstances sont néanmoins celles par dérivation et par une transformation d'Abel ;

— la question 8, classique mais pas facile au premier abord, comme souvent pour les énoncés du type : « hypothèse sur $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n \Rightarrow$ conclusion non triviale sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$ » ;

— les questions 9 et 16, qui illustrent à la fois la transformation d'Abel et l'usage du lien suite-série (pertinent ici : on connaît $u_n - u_{n+1}$, on veut u_n).

2 Corrigé

Première partie

1. Notons d'abord que u est décroissante, donc elle admet nécessairement une limite ℓ, finie et positive puisque u est positive.

   Démontrons d'abord le sens réciproque. Supposons : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, et soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, alors la convergence de la série est évidente puisqu'elle n'a qu'un nombre fini de termes. Supposons donc : $x \neq 0$. Par définition de la limite, il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_x$, on ait : $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2|x|}$. On a alors : $\forall n \geqslant N_x$, $|(u_n x)^n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, et comme la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$ converge (elle est en effet de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$), le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure que la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n x)^n$ converge absolument donc converge. Ainsi U est définie sur $\mathbb{R}$.

   Passons au sens direct. Nous allons raisonner par contraposée. Si $\ell > 0$, alors pour tout n suffisamment grand on a : $u_n \geqslant \frac{\ell}{2}$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| \geqslant \frac{2}{\ell}$, on a : $|(u_n x)^n| \geqslant 1$. On en déduit que $((u_n x)^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0 lorsqu'on prend $x \geqslant \frac{2}{\ell}$, puis que la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n x)^n$ diverge grossièrement pour ces mêmes valeurs de x, donc U n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat.

   Remarque. La règle de Cauchy-Hadamard nous dit que si la limite suivante existe : $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < \frac{1}{\ell}$, et diverge grossièrement si $|x| > \frac{1}{\ell}$ (avec la convention $\frac{1}{\ell} = +\infty$). Nous en avons ici démontré un cas particulier.

   > **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
   > - Comment ai-je choisi le ε avec lequel appliquer la définition de la limite ? Pourquoi avoir pris $\frac{1}{2x}$?
   > - Essayer de démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 par un raisonnement direct (sous l'hypothèse que U est définie sur $\mathbb{R}$), afin de comprendre la difficulté qui m'a conduit à raisonner ainsi.
   > - Et si l'on enlève l'hypothèse que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroît, peut-on sauver le résultat de cette question ?
   > - On remarque ici que c'est tout « tout ou rien » : soit il y a convergence absolue (avec même une décroissance rapide du terme général, puisqu'il est dominé par une suite géométrique), soit il y a divergence grossière. Peut-on généraliser les séries dépendant d'une variable x pour lesquelles on observe ce phénomène ?

2. La question précédente montre que $\sum_{n\geqslant 0} (u_n x)^n$ est une série entière de rayon de convergence infini, donc sa somme U est continue (et même indéfiniment dérivable) sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat.

2' (a) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la fonction U_n est continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. Montrons la convergence uniforme demandée. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in [-a, a]$, on a :

$$|U_n(x) - U(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k x)^k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k x|^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k a|^k.$$

Cette majoration est indépendante de $x \in [-a, a]$. Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \left\| (U_n - U)_{|[-a,a]} \right\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k a|^k.$$

Or la démonstration de la question 1 montre que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n x)^n$ converge absolument en tout $x\in\mathbb{R}$ (sous l'hypothèse que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0), et en particulier en $x=a$. On en déduit que $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}|u_k a|^k\right)_{n\geqslant 0}$ est la suite des restes d'une série absolument convergente : elle converge vers 0. Par le théorème des gendarmes : $\lim_{n\to+\infty}\left\|(U_n-U)_{|[-a,a]}\right\|_\infty=0$, donc la suite de fonctions $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers U.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
>
> — Plus généralement, si une série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument en tout $x\in\mathbb{R}$, est-ce que la suite des sommes partielles converge uniformément sur tout segment, en imitant le raisonnement de cette question ? De quoi avions-nous besoin exactement ?
> Si vous méditez comme il faut ceci, et les items de la question 1, vous aurez déjà une petite compréhension de ce qui distingue les *séries entières* des autres séries.
>
> — Pourquoi s'être restreint à $[-a,a]$? Pourquoi ne pas avoir pris $[a,b]$? ou $\mathbb{R}$?

(b) La suite de fonctions continues $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+$, donc également sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$ (puisqu'un tel segment peut toujours être inclus dans un intervalle de la forme $[-a,a]$ avec $a\in\mathbb{R}_+$). En tant que limite uniforme de fonctions continues, U est continue sur $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

3. Notons que la positivité de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ implique que U est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme : $U(0)=1$, l'application U est à valeurs dans $[1,+\infty[$, donc $\ln\circ U$ est correctement définie sur $\mathbb{R}_+$ et est continue en tant que composition de fonctions continues. Par conséquent $x\mapsto \ln(U(x))\dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ (et même $\mathbb{R}_+^*$).
Remarquons ensuite que si U est la fonction associée à u, celle associée à λu est $x\mapsto U(\lambda x)$. Le changement de variable $t=\lambda x$ implique que les intégrales $\int_1^{+\infty}\ln(U(\lambda x))\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et $\lambda\int_\lambda^{+\infty}\ln(U(t))\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ sont de même nature. Or la première converge si et seulement si $\lambda u\in T$, et la seconde converge si et seulement si $u\in T$: d'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
>
> — Faire ce que je n'ai pas détaillé (la fonction associée à λu, le changement de variable).
>
> — Comprendre pourquoi je ressens le besoin de préciser que l'intégrande est continu sur $\mathbb{R}_+^*$, alors qu'on intègre sur $[1,+\infty[$. Ce n'est pas pour le plaisir.

4. Soient U et V les fonctions associées à u et v respectivement. L'inégalité de l'énoncé entraîne facilement : $\forall x\in[1,+\infty[,\ \dfrac{\ln(U(x))}{x^2}\geqslant\dfrac{\ln(V(x))}{x^2}\geqslant 0$ (cette dernière inégalité vient du fait que par la question précédente, $V([1,+\infty[)$ soit inclus dans $[1,+\infty[$). Le résultat demandé découle alors du théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.
Remarque. Il suffit d'avoir l'inégalité pour tout n *suffisamment grand*. Supposons en effet l'existence de $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geqslant N$, $u_n\geqslant v_n$. S'il existe $n\geqslant N$ tel que : $u_n=0$, alors $u_n=0$ pour tout n au-delà d'un certain rang, et l'inégalité précédente implique que $v_n=0$ également, si bien que $\ln(U(x))$ et $\ln(V(x))$ sont tous les deux équivalents à $\ln(x)$ à une constante non nulle près : il est alors facile de démontrer que u et v vérifient T. Plaçons-nous donc dans le cas où pour tout $n\geqslant N$ on a : $u_n\neq 0$. On a alors, pour tout $x\in[1,+\infty[$:

$$U(x)=\sum_{n=0}^{N-1}(u_n x)^n+\sum_{n=N}^{+\infty}(u_n x)^n=P_N(x)+x^N\sum_{n=N}^{+\infty}u_n^n x^{n-N},$$

où tout ce qu'il importe de retenir est que : $P_N(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(x^{N-1}\right)$. Or :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^n x^{n-N} \geqslant u_N + \underbrace{u_{N+1}}_{>0} x \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc :

$$\frac{P_N(x)}{x^N \sum\limits_{n=N}^{+\infty} u_n^n x^{n-N}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sum\limits_{n=N}^{+\infty} u_n^n x^{n-N}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\,(1)\,.$$

On en déduit : $U(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{n=N}^{+\infty} (u_n x)^n$, et comme cette quantité ne tend pas vers 1 par le raisonnement ci-dessus on a aussi : $\ln(U(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\left(\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (u_n x)^n\right)$. On a un équivalent analogue pour $\ln(V(x))$ (à la nuance près que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ peut s'annuler en des indices $n \geqslant N$; mais comme on l'a dit plus haut, dans ce cas on a $v \in T$ indépendamment de la relation avec u, donc ce cas ne nous intéresse pas). On s'est ramené à une somme qui commence à $n = N$, ce qui permet d'utiliser l'inégalité $u_n \geqslant v_n$ supposée uniquement pour $n \geqslant N$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** En s'inspirant de la remarque, que peut-on dire informellement sur l'ordre de grandeur d'une fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur $\mathbb{R}$, et dont les coefficients a_n sont positifs ? (Pourquoi la positivité est si importante ? Connaissez-vous une fonction de cette forme, mais avec des coefficients de signe inconstant, dont l'ordre de grandeur n'a rien à voir avec la conjecture que je veux vous faire formuler ?)

5. Deux suites équivalentes ont même limite, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 si et seulement si c'est le cas de $(v_n)_{n\geqslant 0}$. On en déduit que si U et V sont les fonctions associées à u et v, alors U est définie sur $\mathbb{R}$ si et seulement si c'est le cas de V. Cela règle l'étude de la première condition pour appartenir à T. Il reste à comparer la nature des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(U(x))\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(V(x))\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$. Il suffit pour cela d'utiliser la question précédente (et sa remarque). En effet, si : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors pour tout n suffisamment grand on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{2} v_n \overset{(\clubsuit)}{\leqslant} u_n \overset{(\spadesuit)}{\leqslant} \frac{3}{2} v_n.$$

D'après les questions 3 et 4, on a donc :

$$u \in T \overset{(q.\,3)}{\iff} 2u \in T \overset{(\clubsuit)}{\Longrightarrow} v \in T \overset{(q.\,3)}{\iff} \frac{3}{2} v \in T \overset{(\spadesuit)}{\Longrightarrow} u \in T,$$

d'où l'équivalence : $u \in T \iff v \in T$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.** Vérifier qu'on sait justifier l'encadrement proposé.

6. Il est clair que les trois suites proposées sont strictement positives (et elles convergent vers 0, ce qui nous servira plus loin). Seule la décroissance nécessite un peu plus de soin. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}} = \left(\frac{(n!)^{\frac{n+1}{n}}}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \left(\frac{(n^n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant 1,$$

et de même :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{((2n)!)^{\frac{1}{n}}}{(2n+1)(2n+2)}\right)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \left(\frac{((2n)^{2n})^{\frac{1}{n}}}{(2n+1)(2n+2)}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{(2n)\cdot(2n)}{(2n+1)(2n+2)}\right)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant 1,$$

ce qui démontre que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ décroissent (comparer les valeurs pour $n=0$ et $n=1$ est trivial, nous le laissons au lecteur). La décroissance de $(w_n)_{n\geqslant 0}$ s'obtient semblablement. Ainsi u, v et w appartiennent à E. Il s'agit à présent d'étudier leur appartenance à S et à T.
Commençons par l'étude de l'appartenance à S. À cause de la présence des factorielles, il est bon de rappeler la formule de Stirling, que j'écris sous une forme légèrement différente :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) = \frac{\ln(2\pi)}{2},$$

afin de mettre en valeur le développement asymptotique suivant :

$$\ln(n!) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Cela donne un meilleur terme d'erreur que si l'on se contente de l'équivalent écrit sous cette forme : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, et nous en aurons besoin pour le manipuler dans des exponentielles ci-dessous. En effet, pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$u_n = e^{-\frac{\ln(n!)}{n}} = e^{-\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln(n)+1-\underset{n\to+\infty}{o}(1)} = \frac{e}{n}\times e^{\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n} > 0,$$

et la série harmonique diverge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, donc : $u \notin S$. Un raisonnement en tous points analogue mène à l'équivalent :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^2}{4n^2} > 0,$$

et cette fois-ci la convergence de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ implique celle de $\sum_{n\geqslant 0} v_n$, donc : $v \in S$. Enfin, trivialement : $w_n = \dfrac{e^{-\frac{\ln(n)}{n}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} > 0$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ diverge et : $w \notin S$.

Passons à l'appartenance à T. Soient U, V et W les fonctions associées à u, v et w. Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, puisque les trois suites convergent vers 0. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(U(x)) = x$, ce dont on déduit immédiatement que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(U(x))\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge. Ainsi : $u \notin T$. Ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\frac{\sqrt{x}^n}{n!} = \frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2},$$

donc : $\ln(V(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln(V(x))\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge puisque son intégrande est équivalent à la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{3/2}}$ d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$. En bref : $v \in T$.

Pour $W : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (w_n x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{n+1}}$, il suffit de remarquer que nos calculs ci-dessus impliquent : $w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{e} u_n$, or $u \notin T$ comme on l'a démontré, donc par la question précédente : $w \notin T$.
En conclusion :

	$\in S$	$\in T$
u	non	non
v	oui	oui
w	non	non

Partant de ces exemples, il n'est pas très difficile de conjecturer où ce problème veut en venir.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Se convaincre, éventuellement par quelques calculs, qu'effectivement l'équivalent $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ n'aurait pas permis d'avoir un équivalent de u_n et v_n.

— Vérifier l'équivalent de v_n que je n'ai pas détaillé.

— Pourquoi n'a-t-on pas tout simplement : $(n!)^{\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \frac{n}{e} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{e}$?

— Être certain d'avoir bien compris la manipulation pour calculer $V(x)$ (ou trouver une autre démonstration ; dans tous les cas, on joue sur la parité). À mettre en parallèle avec ce dont je parle dans *Méthodes* du chapitre II, *Calculer la somme d'une série convergente*, et notamment la « formule d'orthogonalité » que j'y introduis.

— Je passe avec légèreté aux équivalents dans les logarithmes : pourquoi est-ce licite ici ?

Deuxième partie

7. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Notons d'abord que la série $\sum_{n \geqslant 0} nt^n$ diverge grossièrement dès que : $t \geqslant 1$. Pour $t < 1$, le théorème des croissances comparées nous permet de montrer que : $nt^n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$ donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 0} nt^n$ converge.

Pour déterminer si sa somme est inférieure ou égale à 1, encore nous faut-il la calculer. On essaie à chaque fois de se ramener à la somme géométrique. Nous proposons cinq façons de faire, dont les deux dernières qui nécessitent des théorèmes sur les familles sommables.

Par bête changement d'indice. En faisant le changement d'indice $n \mapsto n-1$, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)t^{n+1} = t \sum_{n=0}^{+\infty} nt^n + \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1}$, la scission de la somme en deux étant permise par la convergence de toutes les séries en présence. On en déduit : $(1-t) \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} = \frac{t}{1-t}$, et donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2}$.

Par dérivation de la somme géométrique. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a : $\sum_{n=0}^{N} t^n = \frac{1-t^{N+1}}{1-t}$. Après dérivation : $\sum_{n=1}^{N} nt^{n-1} = \frac{-(N+1)t^N}{1-t} + \frac{1-t^{N+1}}{(1-t)^2}$. Quand on prend la limite de chaque membre quand $N \to +\infty$, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$. On obtient la somme de l'énoncé après multiplication par t.

Par une transformation d'Abel. Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} t^k = \frac{t^n}{1-t}$. Remarquons que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ t^n = V_n - V_{n+1}$. Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} nt^n = \sum_{n=0}^{N} n(V_n - V_{n+1}) = \sum_{n=0}^{N} nV_n - \sum_{n=0}^{N} nV_{n+1} = \sum_{n=0}^{N} nV_n - \sum_{n=1}^{N+1}(n-1)V_n = -NV_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} V_n,$$

et donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} nt^n = -\frac{Nt^{N+1}}{1-t} + \frac{1}{1-t}\sum_{n=1}^{N} t^n.$$

Chaque terme de cette égalité a clairement une limite finie quand $N \to +\infty$ (on a $Nt^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées car $t < 1$). Donc :

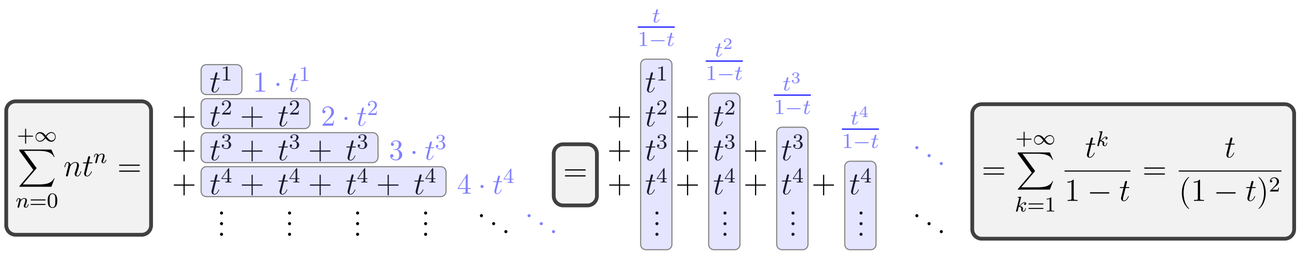
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nt^n = \frac{1}{1-t}\sum_{n=1}^{+\infty} t^n = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Par un produit de Cauchy. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} t^n$ converge (absolument) car $t \in]0,1[$, ce qui permet de faire son produit de Cauchy par elle-même. On obtient :

$$\frac{1}{1-t} \times \frac{1}{1-t} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} t^k t^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n,$$

donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^{n+1} = \frac{t}{(1-t)^2}$, ce qui nous donne notre somme après changement d'indice.

Par une sommation par paquets convenable. On va formaliser le raisonnement suivant :



Posons :

$$\Delta = \left\{(k,n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2 \mid 1 \leqslant k \leqslant n\right\},$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ L_n = [\![1,n]\!] \times \{n\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ C_k = \{k\} \times [\![k,+\infty[\![.$$

Comme la famille $(t^n)_{(k,n)\in\Delta}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut utiliser le théorème de sommation par paquets, tantôt avec les paquets $(L_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, tantôt avec les paquets $(C_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ (qui forment bien une partition de Δ). Cela nous donne d'une part :

$$\sum_{(k,n)\in\Delta} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(k,n)\in L_n} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n,$$

ce qui nous fait reconnaître la somme à calculer, et d'autre part, comme $t \in]0,1[$:

$$\sum_{(k,n)\in\Delta} t^n = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{(k,n)\in C_k} t^n = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} t^n = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n = \frac{t}{(1-t)^2}$.

Ceci étant dit : revenons à la question posée. On nous demande de déterminer pour quelles valeurs de t cette somme est inférieure ou égale à 1. Comme $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n$ est évidemment strictement croissante sur $]0,1[$ comme somme de fonctions croissantes, il suffit de résoudre : $\dfrac{t}{(1-t)^2} = 1$, pour ensuite avoir toutes les valeurs qui donnent l'inégalité $\dfrac{t}{(1-t)^2} \leqslant 1$. On est certain qu'il existe une solution et qu'elle est unique, par stricte monotonie et continuité, étant donné que $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n$ vaut 0 en 0 et tend vers l'infini en 1. Or :

$$\frac{t}{(1-t)^2} = 1 \iff t = (1-t)^2 \iff t^2 - 3t + 1 = 0,$$

ce qui, après une résolution sans mystère, admet une unique solution dans $]0,1[$, à savoir : $t_0 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (nul besoin de vérifier *vraiment* que l'autre solution est en dehors de cet intervalle, par l'argument de stricte monotonie invoqué plus haut). On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n \in]0,1] \iff t \in \left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Autre moyen plus rapide d'étudier la nature et de calculer la somme. Plus tard, lorsque vous aurez vu la théorie des séries entières, vous direz sobrement que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} t^n$ est usuellement de rayon de convergence 1, donc sa somme est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$. Vous pourrez alors directement dériver : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, pour avoir : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Quel rapport entre les croissances comparées et la relation $nt^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

— Lire dans *Méthodes* du chapitre II ce qu'est la transformation d'Abel, et à la lecture des conseils que j'y donne : comprend-on comment j'ai choisi les deux suites auxquelles appliquer la transformation ? Pourquoi n'ai-je pas pris $V_n = \sum_{k=0}^{n} t^k$? ou $V_n = \sum_{k=0}^{n} k$?

— La même sommation par paquets permet-elle d'obtenir la valeur d'autres sommes ? Et la dérivation ? Peut-on obtenir la valeur d'autres sommes en partant de sommes usuelles, mais par d'autres opérations analytiques ?

— Comment vérifier que effectivement, t_0 est dans $]0,1[$?

8. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive et décroissante par définition de E (et donc de S qui est une partie de E), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant 2nu_{2n} = \frac{2n}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On reconnaît le reste d'une série convergente, donc par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(2n)u_{2n} = 0$. Un raisonnement analogue permet de montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(2n+1)u_{2n+1} = 0$, donc finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Remarque. On a démontré que si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, positive, et que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. C'est un raffinement du résultat banal : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, souvent très utile, car les hypothèses sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'ont rien d'exotique !

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Pourquoi ne pas avoir utilisé cette idée de décroissance directement avec nu_n ? Pourquoi avoir fait apparaître $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ plutôt que $\sum_{k=1}^{n} u_k$? Les deux interrogations sont liées. On se demandera alors dans quels contextes on peut recycler cette idée.

9. Nous allons effectuer ce qu'on appelle une transformation d'Abel. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :
$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} (n-(n-1))\, u_n = \sum_{n=0}^{N} nu_n - \sum_{n=0}^{N}(n-1)u_n = \sum_{n=0}^{N} nu_n - \sum_{n=-1}^{N-1} nu_{n+1}$$
$$= Nu_{N+1} + u_0 + \sum_{n=0}^{N} n(u_n - u_{n+1}).$$
On a donc :
$$\sum_{n=0}^{N} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{N} u_n - u_0 - (N+1)u_{N+2}.$$
On sait que : $u \in S$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. De plus, par la question précédente, on a : $\lim_{N\to+\infty} (N+1)u_{N+2} = 0$. Par conséquent, chaque quantité du membre de droite de l'égalité a une limite finie quand $N \to +\infty$. On en déduit d'une part que la série $\sum_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ converge, et d'autre part que l'on a, en prenant la limite :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - u_0.$$
D'où le résultat (et un peu plus que demandé).
Remarque. On peut se dispenser de démontrer le résultat de la question précédente, si l'on se contente d'utiliser l'égalité ci-dessus pour montrer : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} n(u_n - u_{n+1}) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Les sommes partielles sont donc majorées, et comme la série $\sum_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ est à termes positifs par décroissance de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, cela démontre sa convergence.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

- En général, la présence d'un $u_{n+1} - u_n$ fait penser au lien suite-série. Pourquoi ne m'en suis-je pas servi ici ? Se poser à nouveau la question après avoir traité la question 16.
- Comme à chaque transformation d'Abel, on doit se poser les mêmes questions : pourquoi on pouvait pressentir que ce serait avisé d'en utiliser une, et comment a été motivé le choix des suites auxquelles appliquer la transformation.
- En enlevant les hypothèses sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$, peut-on trouver des exemples où les séries $\sum_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ne sont pas de même nature ? Si vous trouvez de tels exemples : bien analyser où, ici, servent les différentes hypothèses sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

10. D'après la question 8, on a : $n\,(u_n x)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\,(u_n^{n-1}x^n)$, or la décroissance et positivité de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ permet d'écrire :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|u_n^{n-1}x^n\right| \leqslant |x| \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}^{n-1}|x|^{n-1} = |x| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n x|^n < +\infty,$$

la convergence *absolue* de $\sum_{n\geqslant 0}(u_nx)^n$ ayant implicitement été démontrée dans la question 1. Ceci démontre que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n^{n-1}x^n$ converge absolument, et donc $\sum_{n\geqslant 0} n(u_nx)^n$ également.

Autre démonstration plus rapide. Plus tard, vous vous contenterez de dire que la série entière $\sum_{n\geqslant 1}(u_nx)^n$ est de rayon de convergence infini, comme on l'a démontré dès la première question, et que multiplier par n le terme général ne change pas le rayon de convergence (c'est d'ailleurs ce qu'on a démontré dans un cas très particulier).

11. La série entière $\sum_{n\geqslant 0}(u_nx)^n$ est de rayon de convergence infini, donc sa somme U est indéfiniment dérivable, qui plus est terme à terme, sur $\mathbb{R}$. On en déduit, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$xU'(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} nu_n^nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_nx)^n = F(x).$$

11' (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application U_n est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad U_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} ku_k^kx^{k-1}.$$

Étudions la convergence uniforme de la suite de fonctions $(x\mapsto U_n'(x))_{n\geqslant 0}$. Il est clair qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} k(u_kx)^k = F(x)$, et nous allons montrer la convergence uniforme sur $[-a,a]$ avec $a\in\mathbb{R}_+$ quelconque. Soit $a\in\mathbb{R}_+$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[-a,a],\quad |xU_n'(x)-F(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} k(u_kx)^k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|u_kx|^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_ka^k.$$

Cette majoration est indépendante de x. Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant \left\|(x\mapsto xU_n'(x)-F(x))_{|[-a,a]}\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_ka^k.$$

Nous avons là le reste d'indice n de la série convergente $\sum_{n\geqslant 0} n(u_na)^n$ (nous avons en effet démontré dans la question 10 que la série $\sum_{n\geqslant 0} n(u_nx)^n$ converge absolument en tout réel x, donc en particulier en $x=a$). Il converge donc vers 0. Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|(x\mapsto xU_n'(x)-F(x))_{|[-a,a]}\right\|_\infty = 0,$$

donc la suite de fonctions $(x\mapsto U_n'(x))_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers F, pour tout $a\in\mathbb{R}_+$. Comme tout segment inclus dans $\mathbb{R}$ peut être inclus dans un segment de la forme $[-a,a]$ avec $a\in\mathbb{R}_+$, cela démontre que cette suite de fonctions converge uniformément vers F sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$: d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Reprendre les questions posées à la fin de la résolution de la question 2'.(a).

— Pourquoi s'être restreint à $[-a,a]$? Pourquoi ne pas avoir pris $[a,b]$? ou $\mathbb{R}$?

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $I_x = [0,x]$ si $x \geqslant 0$ et $I_x = [x,0]$ sinon. Notons d'abord que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que limite uniforme, sur tout segment, de fonctions continues) et $t \mapsto tU_n'(t)$ l'est également pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $t \mapsto F(t) - tU_n'(t)$ est donc continue sur le segment I_x, et son intégrale a donc bien un sens. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\left|\int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} n(u_n t)^n \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x (F(t) - tU_n'(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^x |F(t) - tU_n'(t)|\mathrm{d}t\right|.$$

Une valeur absolue peut paraître de trop : c'est pour utiliser la croissance de l'intégrale sans faire une distinction de cas poussive selon que $x \geqslant 0$ ou $x < 0$. Majorons à présent l'intégrande par sa norme infinie sur $[0,x]$ (qui est finie par la question précédente). On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left|\int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} n(u_n t)^n \mathrm{d}t\right| \leqslant |x| \left\|(t \mapsto tU_n'(t) - F(t))_{|I_x}\right\|_\infty.$$

Grâce à la question précédente, nous savons que chaque extrémité de l'encadrement converge vers 0. Par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} n(u_n t)^n \mathrm{d}t = 0$, d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Quelle conséquence intéressante a cette question ? Comment peut-on reformuler l'égalité démontrée ?

— Peut-on généraliser le raisonnement effectué dans cette question, pour avoir un énoncé du type : « si ★ converge ♠, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int ♣ = \int \lim_{n\to+\infty} ♣$ » ?

— Vérifier de plus près ma majoration suspecte de $\left|\int_0^x |\cdots|\mathrm{d}t\right|$ (on ne sait que trop quels dangers il y a à majorer « dans » une valeur absolue).

(c) Vu que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} xU_n'(x) = F(x)$, il est très tentant d'en déduire : $xU'(x) = F(x)$. Problème : nous ne savons absolument pas si $(U_n')_{n\geqslant 0}$ converge (simplement ou non) vers U', dérivée dont l'existence n'est d'ailleurs pas démontrée. Pour faire le lien entre $(U_n')_{n\geqslant 0}$ et U, nous allons intégrer la suite (puisqu'on sait que $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers U), ce qui est possible grâce à la question précédente, qui démontre implicitement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^x tU_n'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x F(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui équivaut, après intégration par parties, à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(xU_n(x) - \int_0^x U_n(t)\mathrm{d}t\right) = \int_0^x F(t)\mathrm{d}t,$$

Or la convergence simple de $(U_n)_{n\geqslant 0}$ vers U et la convergence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de $\left(\int_0^x U_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ vers $\int_0^x U(t)\mathrm{d}t$ (qui se démontre en raisonnant exactement comme dans la question précédente : on majore la valeur absolue de la différence par $|x| \left\|(U_n - U)_{|I_x}\right\|_\infty$, qui converge vers 0 par la question 2'.(a)), permet d'écrire par unicité de la limite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xU(x) - \int_0^x U(t)\mathrm{d}t = \int_0^x F(t)\mathrm{d}t.$$

Les deux intégrales définissent des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par le théorème fondamental de l'analyse. On en déduit que $x \mapsto xU(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc U l'est aussi sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1), et on a en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad xU'(x) = F(x).$$

Cette relation reste valable pour $x = 0$, par le théorème de la limite de la dérivée ; il est en effet facile de démontrer que l'on a : $\lim\limits_{x\to 0} U'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x} = u_1$, en imitant les arguments de continuité des questions 2' et 11'.(b), et on en déduit par ailleurs que U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'où le résultat.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> - Pourquoi cette question résout-elle un problème d'interversion, c'est-à-dire un problème de la forme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int \bigstar \overset{(?)}{=} \int \lim\limits_{n\to+\infty} \bigstar$, ou : $\sum \int \bigstar \overset{(?)}{=} \int \sum \bigstar$? Qu'ai-je dit à plusieurs reprises, sur la façon de résoudre ces problèmes ?
> - Comprendre la philosophie de la démonstration. Je pense que mon cheminement est plus clair si l'on se représente sur un diagramme les convergences (simples ou uniformes) connues, et chaque fonction avec sa dérivée (connue ou candidate). Se demander ensuite en quoi notre raisonnement revient à parcourir ce diagramme – s'il est bien fait – dans un sens naturel et que la question précédente rend licite.
> - Le raisonnement pour passer de $\int_0^x tU_n'(t)\mathrm{d}t$ à $U(x)$ est franchement peu direct. Pouvait-on rédiger autrement la résolution, de sorte à avoir directement $U(x) = \int_0^x \frac{F(t)}{t}\mathrm{d}t + \cdots$ sans passer par $\int_0^x tU_n'(t)\mathrm{d}t$?
> - Vérifier ce que je n'ai pas détaillé en 0. Ne pouvait-on pas avoir la continuité de U' en 0 directement, de la même manière que pour U et F ?

12. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \left[0, \dfrac{1}{3u_{n+1}}\right]$. On a, en utilisant la décroissance de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,(u_k x)^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,(u_k x)^k \leqslant \sum_{k=1}^{n} k(u_k x)^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,(u_{n+1} x)^k \leqslant \sum_{k=1}^{n} k(u_k x)^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{3^k}.$$

Or : $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (en effet cette inégalité équivaut à : $45 \leqslant 49$, ce qui est vrai), donc d'après la question 7 on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{3^k} \leqslant 1$ (un calcul direct de cette somme n'aurait pas été insurmontable, et aurait donné $\dfrac{3}{4}$). Donc :

$$F(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\,(u_k x)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{3^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\,(u_k x)^k + 1,$$

ce qui donne la première inégalité. On en déduit, par positivité du terme général de la somme :

$$F(x) \leqslant 1 + n \sum_{k=1}^{n} (u_k x)^k = (1-n) + n \sum_{k=0}^{n} (u_k x)^k \leqslant nU(x),$$

d'où le résultat en divisant par $U(x) > 0$.

> **Questions à se poser, réflexes à acquérir.**
> - Comprendre l'idée de découper la somme $F(x)$ ainsi (idéalement, autrement qu'en se disant : c'est parce que c'est ce que l'énoncé demande ; comment pouvait-on flairer la bonne idée ?).
> - Peut-on en déduire une majoration de $\frac{F}{U}$ sur $\mathbb{R}_+$? Éventuellement se poser la question à nouveau après avoir fini cette partie.

13. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a par la question précédente :

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{3u_n}}^{\frac{1}{3u_{n+1}}} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leqslant n \int_{\frac{1}{3u_n}}^{\frac{1}{3u_{n+1}}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 3 \cdot n\,(u_n - u_{n+1}),$$

et on a justifié à la question 9 que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,(u_n - u_{n+1})$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_{\frac{1}{3u_n}}^{\frac{1}{3u_{n+1}}} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Pour en déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$: notons d'abord que l'intégrande est positif, ce qui permet de manipuler *a priori* son intégrale. Ensuite, comme la suite $\left(\frac{1}{3u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante et de limite égale à $+\infty$ grâce aux hypothèses sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on sait que l'on a la relation de Chasles suivante :

$$\int_{\frac{1}{3u_0}}^{+\infty} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{1}{3u_n}}^{\frac{1}{3u_{n+1}}} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} < +\infty,$$

donc l'intégrale $\int_{\frac{1}{3u_0}}^{+\infty} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ également.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.
- Pourquoi les deux dernières intégrales citées sont bien de même nature ?
- Comprendre l'intérêt de s'être ramené à cette série : n'aurait-on pas pu majorer directement l'intégrale sur $[1, +\infty[$ en s'inspirant de la question précédente ?

14. Remarquons que d'après les questions 11 et 11', on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{F(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{U'(x)}{U(x)} \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

ce qui incite à intégrer par parties pour faire apparaître $\ln \circ U$. Faisons :
- en intégrant $\frac{U'}{U}$, qui est continue sur $[1, +\infty[$ et de primitive $\ln \circ U$;
- en dérivant $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

La subtilité est l'existence du terme entre crochets. On doit montrer que la limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(U(x))}{x}$$

existe et est finie. On remarque que les questions précédentes permettent d'avoir un ordre de grandeur de $\frac{U'}{U}$: espérons qu'il suffise, après intégration, pour avoir un ordre de grandeur de $\ln \circ U$. Plus précisément : soit $x \in [1, +\infty[$. Comme la suite $\left(\frac{1}{3u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante et tend vers $+\infty$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{3u_{n_x}} < x \leqslant \frac{1}{3u_{n_x+1}}$. Par la question 12, on en déduit :

$$0 \leqslant \frac{U'(x)}{U(x)} = \frac{1}{x} \frac{F(x)}{U(x)} \leqslant \frac{n_x}{x}.$$

Pour poursuivre, nous devons estimer n_x. Par la question 8 et par composition de limites (on a $n_x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ comme on s'en convainc facilement), on a : $n_x \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u_{n_x}}\right)$, et l'inégalité

$\dfrac{1}{3u_{n_x}} < x$ implique : $n_x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$. Tout cela combiné permet d'obtenir :

$$\frac{U'(x)}{U(x)} \underset{x\to+\infty}{=} o(1)\,,$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 1\mathrm{d}x$ diverge (de plus : $1>0$), donc par le théorème d'intégration des relations de comparaison on a :

$$\ln(U(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(U(x)) - \ln(U(1)) = \int_1^x \frac{U'(t)}{U(t)}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_1^x \mathrm{d}t\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)\,,$$

donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(U(x))}{x} = 0$. D'après la formule de l'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{U'(x)}{U(x)}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(U(x)\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sont donc de même nature. Or la première converge d'après la question précédente, donc la seconde également : d'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Essayer de majorer directement $\ln(U(x))$, afin de comprendre pourquoi il m'a paru plus simple de majorer $\frac{U'(x)}{U(x)}$ (et dans ce cas, comprendre pourquoi le problème qui se posait pour majorer $\ln(U(x))$ ne se pose plus pour majorer ce quotient).

— Retenir ce principe général selon lequel, ayant majoré la dérivée d'une fonction, on sait en déduire une majoration de ladite fonction, alors que le contraire est en général impossible : pourquoi cette différence ?

15. Il est évident que si $u\in S$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, donc la fonction U associée à u est définie sur $\mathbb{R}$ par la question 1. De plus, la question précédente montre que si $u\in S$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(U(x)\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge. En bref : si $u\in S$, alors : $u\in T$, donc : $S\subseteq T$.

Troisième partie

16. Reprenons les calculs effectués dans la question 9. On a, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} n(u_n-u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{N} u_n - u_0 - (N+1)u_{N+2}. \tag{$*$}$$

Si l'on parvient à démontrer que $(N+1)u_{N+2}$ tend vers 0 quand $N\to+\infty$ (ce qu'on fit dans la question 8 avec l'hypothèse supplémentaire que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge), il devient évident que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n(u_n-u_{n+1})$ sont de même nature. Mais c'est *a priori* faux en l'état : on peut très bien avoir $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ par exemple, qui ne vérifie pas : $\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_{n+2} = 0$.

Pour malgré tout poursuivre, nous suivons donc l'indication de l'énoncé, et raisonnons par l'absurde en supposant que la série $\sum_{n\geqslant 0} n\left(u_n-u_{n+1}\right)$ converge. Sous cette hypothèse supplémentaire, nous avons la convergence vers 0 de la suite $\left((N+1)u_{N+2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$. En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a, comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 :

$$u_{N+1} = \sum_{k=N+1}^{+\infty}\left(u_k-u_{k+1}\right) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{k\left(u_k-u_{k+1}\right)}{k}. \qquad \text{(lien suite-série)}$$

On en déduit, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant (N+1)u_{N+2} \leqslant (N+1)u_{N+1} = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(N+1)}{k} k(u_k - u_{k+1}) \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} k(u_k - u_{k+1}).$$

Nous avons supposé que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\left(u_n - u_{n+1}\right)$ converge, donc la suite de ses restes converge vers 0. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{N\to+\infty}(N+1)u_{N+2} = 0$. L'égalité $(*)$ implique donc que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature ; or $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge par hypothèse, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ aussi : c'est contraire à ce que nous avons supposé.

Par l'absurde, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Remarque. Le sujet nous demande de raisonner par l'absurde, mais on voit bien qu'en vérité, nous avons plutôt raisonné par contraposition.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Chose étrange : ici j'ai utilisé le lien suite-série, ce qui est *a priori* naturel puisque, partant d'une hypothèse faisant intervenir $u_n - u_{n+1}$, je veux en déduire quelque chose sur u_n. Mais pourquoi ne l'ai-je pas fait dans la question 9 qui est pourtant très semblable ?

— Pourquoi ai-je utilisé $u_{N+1} = \sum\limits_{k=N+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$ au lieu de $u_{N+1} - u_0 = \sum\limits_{k=0}^{N} (u_{k+1} - u_k)$, qui semble plus naturel ?

17. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $x \in \left[\dfrac{e}{u_n}, +\infty\right[$. On fait un raisonnement analogue à celui de la question 12. Remarquons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ étant décroissante, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a : $xu_k \geqslant xu_n \geqslant e$. Donc :

$$U(x) = \sum_{k=0}^{n} (xu_k)^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (xu_k)^k \geqslant \sum_{k=0}^{n} e^k \geqslant e^n.$$

D'où le résultat en prenant l'image par le logarithme, qui est croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, dans cette inégalité.

Questions à se poser, réflexes à acquérir.

— Comme dans la question 12, se demander ce qui a motivé ce découpage de la somme $U(x)$, et comment on aurait été capable d'y songer de soi-même.

— Pourquoi prendre $x \geqslant \frac{e}{u_n}$? Pouvait-on remplacer e par d'autres réels positifs ?

— Remarquer que $\sum\limits_{k=0}^{n} e^k \approx e^n$: cela s'inscrit dans une série d'analogies déjà soulevées dans *Méthodes*, sur la transformation d'Abel, et en d'autres endroits. Lesquelles ?

— On parvient ici à minorer U sans aucune difficulté ; pourquoi ne fut-ce pas le cas pour le majorer, dans la partie précédente ?

18. La positivité du terme général nous permet d'écrire, avec l'inégalité de la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\frac{e}{u_n}}^{\frac{e}{u_{n+1}}} \ln\left(U(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} n \int_{\frac{e}{u_n}}^{\frac{e}{u_{n+1}}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{e} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(u_n - u_{n+1}\right) = +\infty,$$

puisque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ est à termes positifs et divergente d'après la question précédente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \displaystyle\int_{\frac{e}{u_n}}^{\frac{e}{u_{n+1}}} \ln\left(U(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est donc divergente, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(U(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ aussi par la relation de Chasles (même raisonnement que dans la question 13). D'où le résultat.

Questions à se poser, réflexes à acquérir. Reprendre les interrogations de la question 13.

19. Soit $u \in T$. Alors u a une limite nulle en l'infini d'après la question 1, et la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge (dans le cas contraire, on aurait la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln\left(U(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ par la question précédente, ce qui est impossible par définition de T), donc : $u \in S$. Ceci montre : $T \subseteq S$. L'inclusion réciproque ayant été démontrée dans la question 15, on en déduit : $S = T$.